HITP

数学奥林匹克系列

2010·第三辑（竞赛卷）

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

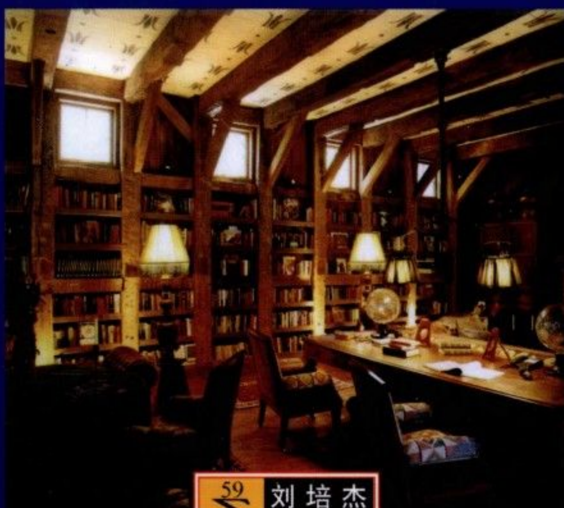
刘培杰　主编

《数学奥林匹克与数学文化》是数学竞赛与数学文化方面的系列专业文集。本文集旨在为从事数学竞赛的师生与从事数学文化研究与传播的专业人员提供深度阅读，搭建表达平台，促进海内外华人同业人士的学术交流与合作，推动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

- 一道西部数学奥林匹克竞赛题的证明与拓广
- 关于一道IMO试题研究的补记
- 一道日本数奥题及联想
- 谈一道叶中豪提出的几何题的证法
- 苦乐人生 数学相伴
- 一个竞赛数学爱好者的学习历程
- 第49届的IMO试题解答



刘培杰数学工作室

策划编辑 刘培杰
张永芹
责任编辑 李广鑫
整体设计 孙茵艾

上架建议 数学竞赛/数学教育

ISBN 978-7-5603-2954-3

定价 48.00元

HITP

数学奥林匹克系列

2010·第三辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰 主编

哈爾濱工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化.第3辑,竞赛卷/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-5603-2954-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课-中学-竞赛题-研究
Ⅳ.G634.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第179098号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张32　字数700千字
版　　次　2010年1月第1版　2010年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2954-3
印　　数　1~2 000册
定　　价　58.00元

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

第三辑(竞赛卷)

目　录　CONTENTS

试题之窗 The Column of Test Questions

一组数奥名题的赏析

邓寿才

1

1995年国家集训队试题采用了一道单墫老师的创新题：

题1 求最小正数 λ，使对任意 $n \geqslant 2$ 和 $a_i, b_i \in [1,2](i = 1,2,\cdots,n)$，且 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列，都有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{A}$$

为此，刘培杰主编在本书第一辑的第32页和第46页解析了本题，用巧妙的方法求出了出人意料的结果：

$$\lambda_{\min} = \frac{17[\frac{n}{2}] + 1 + (-1)^{n+1}}{10[\frac{n}{2}] + 1 + (-1)^{n+1}} \quad ,2 \leqslant n \in \mathbf{N}$$

当 n 为偶数时，$\lambda_{\min} = \frac{17}{10}$.

1998年全国高中数学联赛降低难度取 $\lambda = \frac{17}{10}$ 作为第二试的第二题：

题2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n \in [1,2]$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{B}$$

本题的特点是：第一，证法技巧性强，当届许多参赛者都“栽”在本题上；第二，本题是少见的反向不等式，与常规的传统性题目比较，显得与众不同；第三，等号成立的条件特点：仅当 n 为偶数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有一半取1，另一半取2，$a_ib_i = 2(i = 1,2,\cdots,n)$，显得别具一格.

有的数奥资料上，将题2推广成：

题3 设 $0 < p \leqslant a_i, b_i \leqslant 9(i = 1,2,\cdots,n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\left(\frac{p^4+q^4}{p^3q+pq^3}\right)\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{C}$$

我们先建立式(B)的两个拓广,然后指出式(C)的再推广.

推广1 设$0<p\leqslant a_i\leqslant q,0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\frac{\alpha p+\beta q}{p^2+q^2}\right)\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{①}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{D}$$

其中

$$\lambda=\frac{(p^2+q^2)(\alpha p+\beta q)}{4\alpha\beta pq} \tag{②}$$

特别地,当取$p=\alpha=1,q=\beta=2$时,条件式①化为$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i,\lambda=\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

证明 设$\frac{a_i}{b_i}=\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$,则

$$\left.\begin{matrix}0<p\leqslant a_i\leqslant q\\0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{p}{\beta}\leqslant\lambda_i\leqslant\frac{q}{\alpha} \tag{③}$$

我们不妨设

$$0<\frac{p}{\beta}=\lambda_1\leqslant\lambda_i\leqslant\lambda_n=\frac{q}{\alpha}(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_i-\lambda_1\geqslant0\\\lambda_i-\lambda_n\leqslant0\end{cases}\Rightarrow(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)\leqslant0\Rightarrow$$

$$\lambda_i^2+\lambda_1\lambda_n\leqslant(\lambda_1+\lambda_n)\lambda_i\Rightarrow \tag{④}$$

$$\lambda_ia_i^2+\lambda_1\lambda_n\left(\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\leqslant(\lambda_1+\lambda_n)a_i^2\Rightarrow \tag{⑤}$$

$$2\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\lambda_1\lambda_n\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2+\lambda_1\lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_ia_i^2+\lambda_1\lambda_n\left(\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\right]\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_1+\lambda_n)a_i^2=(\lambda_1+\lambda_n)\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha p+\beta q}{p^2+q^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\leqslant$$

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\text{(应用已知条件中的式 ①)}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

即式(D) 成立.

为了给式(D) 配对,我们建立:

推广 2 设 $0<p\leqslant a_i\leqslant q,0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且

$$pq\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant\alpha\beta\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{E}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\geqslant\sqrt{\frac{pq}{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{F}$$

特别地,当取 $p=\alpha=1,q=\beta=2$ 时,式(F) 化为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{⑥}$$

式(B) 与式 ⑥ 结合,可将式(B) 完善成一个双向不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{G}$$

证明 应用柯西不等式,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)^2\geqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)\right]^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^4\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^3\div\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^3\div\left(\frac{\alpha\beta}{pq}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\geqslant\frac{pq}{\alpha\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\geqslant\sqrt{\frac{pq}{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

等号成立仅当 $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{\frac{pq}{\alpha\beta}}$$

最后,我们将式(C) 从定义域、系数、指数 3 个方面综合推广为:

推广 3 设 $k,m,\lambda_i>0,0<p\leqslant a_i\leqslant q,0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta(1\leqslant i\leqslant n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足关系

$$(pq)^k\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i^{2m}\right)\geqslant(\alpha\beta)^m\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^{2k}\right) \tag{⑦}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i^{3k}}{b_i^m}\right)\leqslant\delta\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^{2k}\right) \tag{H}$$

其中

$$\delta = \frac{\alpha^{2m}p^{2k} + \beta^{2m}q^{2k}}{(\alpha\beta)^m(\alpha^m p^k + \beta^m q^{2k})} \quad ⑧$$

显然,当取 $m = k = 1$ 时,及 $p = \alpha = 1, q = \beta = 2, \lambda_i = 1(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,式(H) 化为式(B).

略证 设参数 $t \in \mathbf{R}^+$,令(记$\sum\limits_{i=1}^{n}$为$\sum$)

$(a_i^k, b_i^m, p^k, q^k, \alpha^m, \beta^m) = (a_{i1}, b_{i2}, p_1, q_1, \alpha_1, \beta_1)(1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow$

$$\begin{cases} p_1 \leqslant a_{i1} \leqslant q_1 \\ \dfrac{1}{\beta_1} \leqslant \dfrac{1}{b_{i1}} \leqslant \dfrac{1}{\alpha_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{p_1}{\beta_1} \leqslant \frac{a_{i1}}{b_{i1}} \leqslant \frac{q_1}{\alpha_1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_1 q_1 \sum \lambda_i b_{i1}^2 \geqslant \alpha_1\beta_1 \sum \lambda_1 a_{i1}^2 \\ \begin{cases} a_{i1} - \dfrac{p_1}{\beta_1} b_{i1} \geqslant 0 \\ a_{i1} - \dfrac{q_1}{\alpha_1} b_{i1} \leqslant 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(a_{i1} - \frac{p_1}{\beta_1} b_{i1}\right)\left(a_{i1} - \frac{q_1}{\alpha_1} b_{i1}\right) \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\left(a_{i1} - \frac{p_1}{\beta_1} b_{i1}\right)\left(a_{i1} - \frac{q_1}{\alpha_1} b_{i1}\right)\left(\frac{a_{i1}}{b_{i1}} + t\right) \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\left[a_{i1}^2 - \left(\frac{p_1}{\beta_1} + \frac{q_1}{\alpha_1}\right) a_{i1} b_{i1} + \frac{p_1 q_1}{\alpha_1\beta_1} b_{i1}^2\right] \cdot \left(\frac{a_{i1}}{b_{i1}} + t\right) \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}} \leqslant A a_{i1}^2 - B b_{i1}^2 + Q a_i b_i \quad ⑨$$

为了消去 $a_i b_i$,我们令

$$Q = t\left(\frac{p_1}{\beta_1} + \frac{q_1}{\alpha_1}\right) - \frac{p_1 q_1}{\alpha_1\beta_1} = 0 \Rightarrow t = \frac{p_1 q_1}{p_1\alpha_1 + q_1\beta_1} \quad ⑩$$

记

$$A = \frac{p_1}{\beta_1} + \frac{q_1}{\alpha_1} - t, B = \frac{p_1 q_1}{\alpha_1\beta_1} t \quad ⑪$$

于是

$$\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}} \leqslant A a_{i1}^2 - B b_{i1}^2 \Rightarrow \lambda_i\left(\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}}\right) \leqslant A\lambda_i a_{i1}^2 - B\lambda_i b_{i1}^2 \Rightarrow$$

$$\sum \lambda_i\left(\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}}\right) \leqslant A \sum \lambda_i a_{i1}^2 - B \sum \lambda_i b_{i1}^2 \leqslant \delta_1 \sum \lambda_i a_{i1}^2 \Rightarrow$$

$$\sum \lambda_i\left(\frac{a_i^{3k}}{b_i^m}\right) \leqslant \delta \sum \lambda_i a_i^{2k}$$

其中 $\delta_1 = \delta$.

2

许多数奥资料上都有如下题目：

题 4 设 a,b,c 为任意正数，则有

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \tag{I}$$

众所周知，式(I)因题意简洁、结构匀称、外观优美而被人们所熟悉，而美国有一道竞赛将它推广后深受大家喜爱：

题 5 设 a,b,c,d,e 为任意正数，则有

$$a^a b^b c^c d^d e^e \geqslant (abcde)^{\frac{a+b+c+d+e}{5}}$$

下面我们先再推广式(I)，然后建立该推广式的配对式.

推广 4 $x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n;n \in \mathbf{N})$，则有

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \tag{J}$$

关于式(J)的证明有十余种，我们介绍几种初等的妙证：

证法 1 (1) 当 $n = 1$ 时，式(J)显然成立；

当 $n = 2$ 时，由于

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_1-x_2} \geqslant 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1^{x_1}x_2^{x_2} \geqslant x_1^{x_2}x_2^{x_1} \\ x_1^{x_1}x_2^{x_2} = x_1^{x_1}x_2^{x_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_1^{x_1}x_2^{x_2})^2 \geqslant (x_1x_2)^{x_1+x_2} \Rightarrow x_1^{x_1}x_2^{x_2} \geqslant (x_1x_2)^{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

此时式(J)成立，等号成立仅当 $x_1 = x_2$.

(2) 假设当 $n = k+1$ 时，式(J)成立，记 $x_1x_2\cdots x_k = G^k$，那么有

$$(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_k^{x_k}G^G)^{k+1} \geqslant (x_1x_2\cdots x_kG)^{x_1+x_2+\cdots+x_k+G} = (G^k\cdot G)^{x_1+x_2+\cdots+x_k+G} =$$
$$G^{(k+1)(x_1+x_2+\cdots+x_k+G)} \Rightarrow x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_k^{x_k}G^G \geqslant G^{x_1+x_2+\cdots+x_k+G} \Rightarrow$$
$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_k^{x_k} \geqslant G^{x_1+x_2+\cdots+x_k} = (x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}}$$

即当 $n = k$ 时，式(J)也成立，等号成立仅当

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = G$$

综合(1)和(2)知，对任意 $n \in \mathbf{N}$，式(J)成立，等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证法 2 (1) 由证法 1 知，当 $n = 1,2$ 时，式(J)成立.

(2) 假设当 $n = k$ 时，式(J)成立，那么当 $n = k+1$ 时，依假设有

$$(x_2^{x_2}x_3^{x_3}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \geqslant (x_2x_3\cdots x_{k+1})^{x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}} \tag{①}$$
$$(x_1^{x_1}x_3^{x_3}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \geqslant (x_1x_3\cdots x_{k+1})^{x_1+x_3+\cdots+x_{k+1}} \tag{②}$$
$$\vdots$$
$$(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_k^{x_k})^k \geqslant (x_1x_2\cdots x_k)^{x_1+x_2+\cdots+x_k} \tag{k+1}$$

$$(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k = (x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \qquad (k+2)$$

将以上 $k+2$ 个式子相乘，得

$$(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^{k(k+1)} \geqslant (x_1x_2\cdots x_{k+1})^{k(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})} \Rightarrow x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}} \geqslant (x_1x_2\cdots x_{k+1})^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}}$$

即当 $n=k+1$ 时，式(J) 仍然成立，等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$.

综合上述，对任意 $n\in\mathbf{N}$，式(J) 成立，等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证法 3 简记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\sum$，$\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\prod$，由证法 1 有

$$(x_i^{x_i}x_j^{x_j})^2 \geqslant (x_ix_j)^{x_i+x_j} \Rightarrow \prod (x_i^{x_i}x_j^{x_j})^2 \geqslant \prod (x_ix_j)^{x_i+x_j} \Rightarrow$$

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^{x_i}\right)^{2C_n^2} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{(n-1)\sum\limits_{i=1}^n x_i} \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^n x_i^{x_i}\right)^{n(n-1)} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{(n-1)\sum\limits_{i=1}^n x_i} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^n x_i^{x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}}$$

等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证法 4 (1) 由证法 1 知，当 $n=1,2$ 时，式(J) 成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时，式(J) 成立，那么当 $n=k+1$ 时，记

$$\begin{cases} T = x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}} \\ m = x_1x_2\cdots x_{k+1} \\ S = x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} \end{cases} \quad (\text{约定 } x_0=1) \Rightarrow \left(\frac{T}{x_i^{x_i}}\right)^k = (x_1^{x_1}\cdots x_{i-1}^{x_{i-1}}x_{i+1}^{x_{i+1}}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \geqslant$$

$$(x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{k+1})^{s-x_i} = \left(\frac{m}{x_i}\right)^{s-x_i} \Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{T}{x_i^{x_i}}\right)^k \geqslant \prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{m}{x_i}\right)^{s-x_i} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{T^{k+1}}{\prod\limits_{i=1}^{k+1} x_i^{x_i}}\right)^k \geqslant \frac{m^{\sum\limits_{i=1}^{k+1}(s-x_i)}}{\prod\limits_{i=1}^{k+1} x_i^{s-x_i}} = \frac{m^{(k+1)s-s}}{m^s\cdot T^{-1}} = \frac{m^{(k-1)s}}{T^{-1}} \Rightarrow \left(\frac{T^{k+1}}{T}\right)^k \geqslant \frac{m^{(k-1)s}}{T^{-1}} \Rightarrow$$

$$T^{k^2-1} \geqslant m^{(k-1)s} \Rightarrow T^{k+1} \geqslant m^s \Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1} x_i^{x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{k+1} x_i\right)^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1} x_i}{k+1}}$$

即当 $n=k+1$ 时式(J) 也成立，等号成立仅当

$$x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$$

总结上述，对任意 $n\in\mathbf{N}$，式(J) 成立，等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

式(J) 虽然将式(I) 从 3 元正数推广到了任意自然数 n，但它还可再从指数上推广为：

推广 5 设 $x_i>0, p_i\in(0,1)$，且 $\sum\limits_{i=1}^n p_i=1(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$，则有

$$\prod_{i=1}^n (x_i^{x_i})^{p_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^n p_ix_i} \qquad (\mathrm{K})$$

显然，当 $p_i = \frac{1}{n}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时，式(K)化为式(J).

证法1 应用加权几何平均 - 调和平均不等式有

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^{x_i})^{p_i} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i x_i} \geqslant \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\left(\frac{1}{x_i}\right)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} =$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}\text{(应用加权不等式)} \geqslant$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

即式(K)成立，等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证法2 设关于 $x > 0$ 的函数为

$$f(x) = \ln x^x = x\ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f''(x) =$$

$$\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f(x)\text{ 为凸函数} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ln x_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{p_i x_i} \geqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i x_i}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i x_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

即式(K)成立，等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

让我们回顾式(J)

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

如果我们记 $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，则式(J)化为

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{A} \tag{L}$$

在式(L)中作置换$\prod_{i=1}^{n} \to \sum_{i=1}^{n}$,那么它有配对式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{A} \tag{M}$$

吗?如果置换成功,式(M)成立,那么还需要什么条件吗?而事实上

配对 设 $x_i \geqslant 1(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,证 $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{A}$$

证明 若 $x \geqslant y \geqslant 1$,有

$$\begin{aligned}
(x^x + y^y) - (x^y + y^x) = & (x^x - x^y) - (y^x - y^y) = \\
& x^y(x^{x-y} - 1) - y^y(y^{x-y} - 1) \geqslant \\
& x^y(y^{x-y} - 1) - y^y(y^{x-y} - 1) = \\
& (x^y - y^y)(y^{x-y} - 1) \geqslant 0 \Rightarrow \\
& x^x + y^y \geqslant x^y + y^x \Rightarrow \\
& x_i^{x_i} + x_j^{x_j} \geqslant x_i^{x_j} + x_j^{x_i}(i \neq j) \Rightarrow \\
& \sum (x_i^{x_i} + x_j^{x_j}) \geqslant \sum (x_i^{x_j} + x_j^{x_i})(\text{记} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{为} \sum) \Rightarrow \\
& (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum (x_i^{x_j} + x_j^{x_i}) \Rightarrow \\
& n\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} + \sum (x_i^{x_j} + x_j^{x_i})(\text{注意} \frac{2}{n}C_n^2 = n-1) = \\
& \sum_{i=1}^{n}(x_i^{x_1} + x_i^{x_2} + \cdots + x_i^{x_n}) \geqslant \\
& n\sum_{i=1}^{n}(x_i^{x_1}x_i^{x_2}\cdots x_i^{x_n})^{\frac{1}{n}} = \\
& n\sum_{i=1}^{n} x_i^{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{A}
\end{aligned}$$

等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

如果我们设

$$\begin{cases} T_n = \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \\ G_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T_{n+1}}{T_n} = x_{n+1}^{x_{n+1}} \\ \frac{G_{n+1}}{G_n} = x_{n+1} \end{cases}$$

因为不论当 $0 < x_{n+1} \leqslant 1$ 还是 $x_{n+1} \geqslant 1$,总有

$$\frac{x_{n+1}^{x_{n+1}}}{x_{n+1}} = x_{n+1}^{x_{n+1}-1} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{T_n} \geqslant \frac{G_{n+1}}{G_n} \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{G_{n+1}} \geqslant \frac{T_n}{G_n} \Rightarrow$$

$$\frac{T_n}{G_n} \geqslant \frac{T_{n-1}}{G_{n-1}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{T_1}{G_1} = 1 \tag{N}$$

同理,如果再设

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i}, \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

我们可得到式(N) 的配对式

$$M_n - A_n \geqslant M_{n-1} - A_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant M_1 - A_1 = 0 \tag{O}$$

可见式(N) 和式(O) 是一对非常漂亮的不等式链.

从外形结构而言,式(M) 并非形单影只,它有一个搭挡:

题 6 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为正数,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n (2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 为 n 个同号非零实数,记 $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^S \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} \right) \tag{P}$$

证法 1 由已知条件知 $0 < \frac{\alpha_i}{s} < 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$,且$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s} = 1$,应用加权不等式有

$$\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{n} (x_i^s)^{\frac{\alpha_j}{s}} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{s} (x_j^s) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} \right) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{s} x_i^s \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{s} \right) x_i^s =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^s \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^s \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} \right)$$

等号成立仅当

$$x_1^s = x_2^s = \cdots = x_n^s \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

证法 2 当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 同为正数时,不妨设

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^{\alpha_1} \geqslant x_2^{\alpha_1} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\alpha_1} > 0 \\ x_1^{\alpha_2} \geqslant x_2^{\alpha_2} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\alpha_2} > 0 \\ \cdots\cdots \\ x_1^{\alpha_n} \geqslant x_2^{\alpha_n} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\alpha_n} > 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{应用排序原理})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^s = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_1} x_i^{\alpha_2} \cdots x_i^{\alpha_n} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j}$$

当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 同为负数时,同理可证式(P) 成立,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3

1977 年美国数奥(USAMO) 有一道美妙趣味题:

题 7 设 $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$,求证:

$$a^b b^c c^d d^a \geqslant b^a c^b d^c a^d \tag{Q}$$

其参考证明太复杂,不够简捷明快,我们先推广式(Q).

推广 6 设 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 或 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$,则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_{i+1}} \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i+1}^{a_i} \tag{R}$$

或

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_{i+1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i+1}^{a_i} \tag{R'}$$

其中约定 $a_{n+1} \equiv a_1$.

显然,当 $n = 4$ 时,式(R) 等价于式(Q).

证明 (1) 当 $n = 2$ 时,式(R) 化为等式

$$a_1^{a_2} a_2^{a_1} = a_2^{a_1} a_1^{a_2}$$

其中 $0 < a_1 \leqslant a_2$.

当 $n = 3$ 时,式(R) 即为

$$a_1^{a_2} a_2^{a_3} a_3^{a_1} \geqslant a_2^{a_1} a_3^{a_2} a_1^{a_3} \tag{①}$$

其中 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 x, a_3 = a_1 y \\ 0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow ① \Leftrightarrow a_1^{a_1 x} \cdot (a_1 x)^{a_1 y} \cdot (a_1 y)^{a_1} \geqslant$$

$$(a_1 x)^{a_1} \cdot (a_1 y)^{a_1 x} \cdot a_1^{a_1 y} \Leftrightarrow (y x^y)^{a_1} \geqslant (x y^x)^{a_1} \Leftrightarrow$$

$$y x^y \geqslant x y^x \Leftrightarrow x^{y-1} \geqslant y^{x-1} \tag{②}$$

观察式 ② 知,当 $y = x = 1, y \geqslant x = 1, y = x > 1$ 时式 ② 成立,且均取等号

当 $y > x > 1$ 时,式 ② 化为

$$x^{\frac{1}{x-1}} \geqslant y^{\frac{1}{y-1}} \tag{③}$$

设关于 $t > 1$ 的函数为

$$f(t) = \ln t^{\frac{1}{t-1}} = \frac{\ln t}{t-1}$$

求导得

$$f'(t) = \frac{g(t)}{t(t-1)^2} \tag{④}$$

其中

$$g(t) = t - 1 - t\ln t \Rightarrow \tag{⑤}$$

$g'(t) = -\ln t < 0 \Rightarrow g(t)$ 为减函数,则 $\Rightarrow$

$g(t) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(t) < 0 \Rightarrow$

$f(t)$ 与 $g(t)$ 在$(1, +\infty)$ 内为减函数 $\Rightarrow$

$f(x) > f(y) \Rightarrow \ln x^{\frac{1}{x-1}} > \ln y^{\frac{1}{y-1}} \Rightarrow$

$x^{\frac{1}{x-1}} > y^{\frac{1}{y-1}} \Rightarrow$ 式 ③ 成立

从而式 ① 成立，等号成立仅当

$$x = y = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

(2) 假设当 $n = k$ 时，式(R) 成立，即当 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ 时

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^{a_{i+1}} \geqslant \prod_{i=1}^{k} a_{i+1}^{a_i} \tag{6}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$.

记式(R) 左边是 P_k，右边为 Q_k，那么当 $n = k + 1$ 时，由于

$$\left.\begin{aligned} P_{k+1} &= \left(\frac{a_k^{a_{k+1}} \cdot a_{k+1}^{a_1}}{a_k^{a_1}}\right) P_k = \prod_{i=1}^{k+1} a_i^{a_{i+1}} \\ Q_{k+1} &= \left(\frac{a_1^{a_{k+1}} \cdot a_{k+1}^{a_k}}{a_1^{a_k}}\right) Q_k = \prod_{i=1}^{k+1} a_{i+1}^{a_i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_k}{Q_k} \cdot \frac{a_1^{a_k} a_k^{a_{k+1}} a_{k+1}^{a_1}}{a_k^{a_1} a_{k+1}^{a_k} a_1^{a_{k+1}}} \tag{7}$$

当 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant a_{k+1}$ 时，由归纳假设有 $P_k \geqslant Q_k$，由 $0 < a_1 \leqslant a_k \leqslant a_{k+1}$ 应用式 ① 有

$$a_1^{a_k} a_k^{a_{k+1}} a_{k+1}^{a_1} \geqslant a_k^{a_1} a_{k+1}^{a_k} a_1^{a_{k+1}} \Rightarrow \tag{8}$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \geqslant \frac{P_k}{Q_k} \geqslant 1 \Rightarrow P_{k+1} \geqslant Q_{k+1} \tag{9}$$

即当 $n = k + 1$ 时式 ② 仍然成立，等号成立仅当

$$\left.\begin{aligned} a_1 = a_2 = \cdots = a_k \\ a_1 = a_k = a_{k+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$$

综合(1) 和(2) 知，对于任意 $n \geqslant 2$ 的自然数，式(R) 恒成立，等号成立仅当 $n = 2$ 或 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n (n > 2)$.

从外形结构上看，式(R)“孤单寂寞”吗?其实，他也有配对式：

配对 设 $\mathrm{e} \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i+1}^{a_i}, n \geqslant 2 \tag{S}$$

其中约定 $a_{n+1} = a_1$.

证明 (1) 当 $n = 2$ 时，式(S) 化为等式

$$a_1^{a_2} + a_2^{a_1} = a_2^{a_1} + a_1^{a_2}$$

当 $n = 3$ 时，式(S) 化为

$$a_1^{a_2} + a_2^{a_3} + a_3^{a_1} \geqslant a_2^{a_1} + a_3^{a_2} + a_1^{a_3} \tag{10}$$

设

$$\left.\begin{aligned} a_2 = a_1 + x, a_3 = a_1 + y \\ \mathrm{e} \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant y$$

设

$$T = f(x) + f(y) + g(x, y) \tag{11}$$

其中

$$\begin{cases}f(x)=a_1^{a_1+x}-(a_1+x)^{a_1}\\f(y)=a_1^{a_1+y}-(a_1+y)^{a_1}\\g(x,y)=(a_1+x)^{a_1+y}-(a_1+y)^{a_1+x}\end{cases}$$

易验证当 $x=y=0, y>x=0, y=x>0$ 时均有 $T=0$.

当 $y>x>0\Rightarrow e\leqslant a_1<a_2<a_3$ 时,如果 $g(x,y)>0$,即

$$(a_1+x)^{a_1+y}>(a_1+y)^{a_1+x}\Leftrightarrow(a_1+x)^{\frac{1}{a_1+x}}>(a_1+y)^{\frac{1}{a_1+y}} \tag{12}$$

设关于 $t>e$ 的函数为

$$f(t)=\ln t^{\frac{1}{t}}=\frac{\ln t}{t}\Rightarrow f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}<0\Rightarrow f(t)$$

于是

$$e<a_1+x<a_1+y\Rightarrow f(a_1+x)>f(a_1+y)\Rightarrow\ln(a_1+x)^{\frac{1}{a_1+x}}>\ln(a_1+y)^{\frac{1}{a_1+y}}\Rightarrow$$
$$(a_1+x)^{\frac{1}{a_1+x}}>(a_1+y)^{\frac{1}{a_1+y}}\Rightarrow g(x,y)>0$$

且由
$$e\leqslant a_1<a_1+x<a_1+y\Rightarrow f(a_1)>f(a_1+x)>f(a_1+y)\Rightarrow$$
$$a_1^{\frac{1}{a_1}}>(a_1+x)^{\frac{1}{a_1+x}}>(a_1+y)^{\frac{1}{a_1+y}}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}a_1^{a_1+x}>(a_1+x)^{a_1}\Rightarrow f(x)>0\\a_1^{a_1+y}>(a_1+y)^{a_1}\Rightarrow f(y)>0\end{cases}\Rightarrow$$
$$T=f(x)+f(y)+g(x,y)>0\Rightarrow$$
$$a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+a_3^{a_1}>a_2^{a_1}+a_3^{a_2}+a_1^{a_3}$$

即当 $n=3$ 时,式(S)成立,其中等号成立仅当 $x=y=0\Rightarrow a_1=a_2=a_3\geqslant e$.

(2)假设当 $n=k$ 时,式(S)成立,即

$$P'_k=\sum_{i=1}^{k}a_i^{a_{i+1}}\geqslant\sum_{i=1}^{k}a_{i+1}^{a_i}=Q'_k \tag{13}$$

那么当 $n=k+1$ 时,$e\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{k+1}$,且

$$\begin{cases}P'_{k+1}=P'_k+(a_k^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_1}-a_k^{a_1})\\Q'_{k+1}=Q'_k+(a_1^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_k}-a_1^{a_k})\end{cases}\Rightarrow P'_{k+1}-Q'_{k+1}=(P'_k-Q'_k)+F\geqslant \tag{14}$$

$$F=(a_1^{a_k}+a_k^{a_{k+1}}+a_{k+1}^{a_1})-(a_k^{a_1}+a_{k+1}^{a_k}+a_1^{a_{k+1}}) \tag{15}$$

由于

$$e\leqslant a_1\leqslant a_k\leqslant a_{k+1}\Rightarrow F\geqslant0\Rightarrow P'_{k+1}-Q'_{k+1}\geqslant0\Rightarrow P'_{k+1}\geqslant Q'_{k+1}$$

即当 $n=k+1$ 时,式(S)成立,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}$.

综合(1)和(2)知,对任意 $2\leqslant n\in\mathbf{N}$,式(S)成立,且等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

从上述证明知,当 $e\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$ 时,式(S)反向,且从(R),(S)两式的证明可知,有一对不等式链诞生,即

$$\begin{cases}\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \geqslant \dfrac{P_n}{Q_n} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{P_2}{Q_2} = 0 \\ P'_{n+1} - Q'_{n+1} \geqslant P'_n - Q'_n \geqslant \cdots \geqslant P'_2 - Q'_2 = 0\end{cases}$$

4

题 8(2005 年全国高中数奥联赛第二试第二题)　实数 A,B,C 满足什么条件时，对于任意实数 x,y,z，不等式

$$A(x-y)(x-z)+B(y-x)(y-z)+C(z-x)(z-y) \geqslant 0 \tag{T}$$

恒成立？

在《数学奥林匹克与数学文化》第 1 辑第 65 页向我们指出：式(A)是 Schur 不等式.

若 $x,y,z \in \mathbf{R}^+, \lambda \in \mathbf{R}$，则

$$x^\lambda(x-y)(x-z)+y^\lambda(y-z)(y-x)+z^\lambda(z-x)(z-y) \geqslant 0 \tag{U}$$

的一个特例.

并进一步在 67 页指出：题 8 中所求的条件是(等价形式)

$$0 \leqslant \sqrt{A} \leqslant \sqrt{B}+\sqrt{C},\quad 0 \leqslant \sqrt{B} \leqslant \sqrt{C}+\sqrt{A},\quad 0 \leqslant \sqrt{C} \leqslant \sqrt{A}+\sqrt{B} \tag{①}$$

下面先建立式(T)的指数推广：

推广 7　实数 A,B,C 满足什么条件时，对于任意实数 x,y,z，不等式

$$A[(x-y)(x-z)]^{2k-1}+B[(y-x)(y-z)]^{2k-1}+C[(z-x)(z-y)]^{2k-1} \geqslant 0 \tag{V}$$

恒成立？其中 $k \in \mathbf{N}$，显然，当 $k=1$ 时，式(U)化为式(T).

解　根据题意：

(1) 当 $x=y$ 时，$P=C(z-x)^{2(2k-1)} \geqslant 0 \Rightarrow C \geqslant 0$.

(2) 当 $y=z$ 时，$P=A(x-y)^{2(2k-1)} \geqslant 0 \Rightarrow A \geqslant 0$.

(3) 当 $z=x$ 时，$P=B(y-x)^{2(2k-1)} \geqslant 0 \Rightarrow B \geqslant 0$.

故首先必须 $A \geqslant 0, B \geqslant 0, C \geqslant 0$.

(4) 当 x,y,z 互不相等时，不妨设

$$\begin{cases}x>y>z \\ x-y=t(y-z)\end{cases} \Rightarrow t>0$$

于是

$$\begin{aligned}P = {} & (x-z)^{2k-1}[A(x-y)^{2k-1}+C(y-z)^{2k-1}]-B[(y-z)(x-y)]^{2k-1} = \\ & [(x-y)+(y-z)]^{2k-1}[A(x-y)^{2k-1}+C(y-z)^{2k-1}]- \\ & B[(y-z)(x-y)]^{2k-1} \geqslant \\ & [(x-y)^{2k-1}+(y-z)^{2k-1}][A(x-y)^{2k-1}+C(y-z)^{2k-1}]- \\ & B[(y-z)(x-y)]^{2k-1} = \\ & A(x-y)^{2(2k-1)}+(C+A-B)[(x-y)(y-z)]^{2k-1}+C(y-z)^{2(2k-1)} = \\ & (y-z)^{2(2k-1)}[At^{2(2k-1)}+(C+A-B)t^{2k-1}+C] =\end{aligned}$$

$$(y-z)^{2(2k-1)}[Ap^2+(C+A-B)p+C] \quad ②$$

其中 $p=t^{2k-1}>0$,由于$(y-z)^{2(2k-1)}>0$.因此,欲使 $P\geqslant 0$ 恒成立,必须使不等式

$$Ap^2+(C+A-B)p+C\geqslant 0 \quad ③$$

恒成立,注意 $A,B,C\geqslant 0$,所以必须有判别式

$$\Delta_p=(C+A-B)^2-4AC\leqslant 0\Leftrightarrow 2(BC+CA+AB)\geqslant A^2+B^2+C^2 \quad ④$$

因此,当 A,B,C 满足条件

$$\begin{cases}A\cdot B\cdot C\geqslant 0\\2(BC+CA+AB)\geqslant A^2+B^2+C^2\end{cases} \quad ⑤$$

时,式(U)恒成立.

可见,虽然式(V)是式(T)的指数推广,但等号成立的条件是一致的,不妨令

$$\begin{aligned}(A,B,C)=(a^2,b^2,c^2)&\Rightarrow 2\sum BC-\sum A^2\geqslant 0\Leftrightarrow 2\sum b^2c^2-\sum a^4\geqslant 0\Leftrightarrow\\&4c^2a^2-(c^2+a^2-b^2)^2\geqslant 0\Leftrightarrow\\&[2ca+(c^2+a^2-b^2)][2ca-(c^2+a^2-b^2)]\geqslant 0\Leftrightarrow\\&[(c+a)^2-b^2][b^2-(c-a)^2]\geqslant 0\Leftrightarrow\\&(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\geqslant 0\Leftrightarrow\\&(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\geqslant 0 \quad ⑥\end{aligned}$$

显然,欲使式⑥恒成立,必须右边3个因式同为非负数或一正两负,当它们三个均非负时

$$\begin{cases}0\leqslant a\leqslant b+c\Leftrightarrow 0\leqslant\sqrt{A}\leqslant\sqrt{B}+\sqrt{C}\\0\leqslant b\leqslant c+a\Leftrightarrow 0\leqslant\sqrt{B}\leqslant\sqrt{C}+\sqrt{A}\\0\leqslant c\leqslant a+b\Leftrightarrow 0\leqslant\sqrt{C}\leqslant\sqrt{A}+\sqrt{B}\end{cases}$$

当它们三个因式两正一负时,由对称性不妨设

$$\begin{cases}b+c-a\geqslant 0\\\left.\begin{array}{l}c+a-b\leqslant 0\\a+b-c\leqslant 0\end{array}\right\}\Rightarrow 2a\leqslant 0\Rightarrow a\leqslant 0\end{cases}$$

类似地可导出 $b\leqslant 0,c\leqslant 0$,从而导致 A,B,C 非正,矛盾.因此只有式⑤是所求.

另外,如果我们设指数

$$0<\theta\leqslant 2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}\geqslant 1\\0<\dfrac{\theta}{2}\leqslant 1\end{cases}$$

再设 a,b,c 是一个三角形的三边长,那么

$$(b^{\frac{\theta}{2}}+c^{\frac{\theta}{2}})^{\frac{2}{\theta}}\geqslant(b^{\frac{\theta}{2}})^{\frac{2}{\theta}}+(c^{\frac{\theta}{2}})^{\frac{2}{\theta}}=b+c>a\Rightarrow b^{\frac{\theta}{2}}+c^{\frac{\theta}{2}}>a^{\frac{\theta}{2}}$$

同理可得:$c^{\frac{\theta}{2}}+a^{\frac{\theta}{2}}>b^{\frac{\theta}{2}},a^{\frac{\theta}{2}}+b^{\frac{\theta}{2}}>c^{\frac{\theta}{2}}$.这充分表明以 $a^{\frac{\theta}{2}},b^{\frac{\theta}{2}},c^{\frac{\theta}{2}}$ 为边长可构成一个三角形,满足条件式⑥,从而满足式⑤,因此,我们又得到一个新的命题:

推广 8 设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长,$0<\theta\leqslant 2,k\in\mathbf{N}$,则对任意实数 x,y,z 恒

成立不等式

$$a^{\theta}[(x-y)(x-z)]^{2k-1}+b^{\theta}[(y-z)(y-x)]^{2k-1}+c^{\theta}[(z-x)(z-y)]^{2k-1}\geqslant 0$$

由于式(U)中的 x,y,z 均为正数,于是令 $\lambda=1$,得

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geqslant 0 \tag{7}$$

变形即为

$$\sum x^3+3xyz\geqslant\sum x^2(y+z)=2\sum(xy)^{3/2}+Q' \tag{8}$$

其中 $$Q'=\sum xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqslant 0$$

作代换

$$(x,y,z)=(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{b},\sqrt[3]{c})\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}+\sqrt[3]{abc}\right)\geqslant\frac{1}{3}(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})+Q \tag{9}$$

其中 $$Q=\frac{1}{6}\sum\sqrt[3]{bc}(\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{c})^2$$

可见,式⑨是一个既有趣又美妙的结论.

式⑦再度变形为

$$\sum x^3\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{z}{x}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow\sum\frac{y^2}{yz}\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{z}{x}\right)\geqslant 0 \tag{10}$$

作代换 $(a,b,c)=\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\right)$,式⑩化为

新题 设正数 a,b,c 满足 $abc=1$,则

$$\frac{(1-a)(1-b)}{a}+\frac{(1-b)(1-c)}{b}+\frac{(1-c)(1-a)}{c}\leqslant 0 \tag{11}$$

5

我们是知道,数学美包含着和谐美、对称美、简洁美、奇异美.凡是这样的题目,就是我们值得收藏的妙题.在本专题中介绍的十余道题目中,就是在所收藏妙题中精选的题目,如下面这道就是2003年联赛之一的名题:

题9(2003年CMO) 设 a,b,c 为正数,且 $ab+cd=1$,$p_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$ 是单位圆上的四点,求证:

$$(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)^2+(ay_4+by_3+cy_2+dy_1)^2\leqslant 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right) \quad (\mathrm{W})$$

分析 细分起来,本题的已知条件有三条:第一,$a,b,c,d>0$,且 $ab+cd=1$;第二,$x_i^2+y_i^2=1(1\leqslant i\leqslant 4)$;第三,$x_i,y_i\in\mathbf{R}$,不一定是 $x_i,y_i\in\mathbf{R}^+$,而要证明的式(W)外观较庞大,结构也不对称,但三组字母在左边的顺序是:

$$\begin{cases}a\to b\to c\to d\\ x_1\to x_2\to x_3\to x_4\\ y_4\to y_3\to y_2\to y_1\\ (\text{即 } y_{4+1-1}\to y_{4+1-2}\to y_{4+1-3}\to y_{4+1-4})\end{cases}$$

因此式(W) 左边的三组字母的搭配仍然是对称的,所以欲证明式(W),也许要进行巧妙的配方或巧妙应用柯西不等式.下面是笔者收集到的两种证法.

证法 1 依题意有 $x_i^2+y_i^2=1(1\leqslant i\leqslant 4)$,设

$$\begin{cases}\lambda=ax_1+bx_2\\u=cx_3+dx_4\end{cases},\quad\begin{cases}\lambda_1=ay_4+by_3\\u_1=cy_2+dy_1\end{cases}$$

由于

$$\lambda^2\leqslant(ax_1+bx_2)^2+(ay_1-by_2)^2=$$
$$(a^2+b^2)+2(ab)(x_1x_2-y_1y_2)\Rightarrow$$
$$y_1y_2-x_1x_2\leqslant\frac{a^2+b^2-\lambda^2}{2ab}\tag{①}$$
$$u_1^2\leqslant(cy_2+dy_1)^2+(cx_2-dx_1)^2=$$
$$c_2+d_2+2cd(y_1y_2-x_1x_2)\Rightarrow$$
$$x_1x_2-y_1y_2\leqslant\frac{c^2+d^2-u_1^2}{2cd}\tag{②}$$

$$①+②\Rightarrow 0\leqslant\frac{a^2+b^2-\lambda^2}{ab}+\frac{c^2+d^2-u_1^2}{2cd}\Rightarrow\frac{\lambda^2}{ab}+\frac{u_1^2}{cd}\leqslant\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\tag{③}$$

同理可得

$$\frac{\lambda_1^2}{ab}+\frac{u^2}{cd}\leqslant\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\tag{④}$$

应用柯西不等式,得

$$(\lambda+u)^2+(\lambda_1+u_1)^2\leqslant(ab+cd)\left(\frac{\lambda^2}{ab}+\frac{u^2}{cd}\right)+(ab+cd)\left(\frac{\lambda_1^2}{ab}+\frac{u_1^2}{cd}\right)=$$
$$\left(\frac{\lambda^2}{ab}+\frac{u^2}{cd}\right)+\left(\frac{\lambda_1^2}{ab}+\frac{u_1^2}{cd}\right)=$$
$$\left(\frac{\lambda^2}{ab}+\frac{u_1^2}{cd}\right)+\left(\frac{\lambda_1^2}{ab}+\frac{u^2}{cd}\right)\leqslant$$
$$2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right)\tag{⑤}$$

即式(W) 成立,等号成立仅当

$$ay_1-by_2=cx_2-dx_1=ax_3-dx_4=ay_4-by_3=0$$
$$\frac{\lambda}{u}=\frac{\lambda_1}{u_1}=\frac{ab}{cd},\quad ab+cd=1$$

和
$$x_i^2+y_i^2=1,1\leqslant i\leqslant 4$$

证法 2 我们令

$$\begin{cases}\alpha=ax_1+bx_2+cx_3+dx_4\\\beta=ay_4+by_3+cy_2+dy_1\end{cases}\tag{⑥}$$

应用柯西不等式,得

$$\alpha^2 = (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)^2 \leqslant$$
$$[(\sqrt{ad}x_1)^2 + (\sqrt{bc}x_2)^2 + (\sqrt{bc}x_3)^2 + (\sqrt{ad}x_4)^2]\cdot$$
$$\left[\left(\sqrt{\frac{a}{d}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{d}{a}}\right)^2\right] =$$
$$(adx_1^2 + bcx_2^2 + bcx_3^2 + adx_4^2)\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{d}{a}\right) \quad ⑦$$

同理可得

$$\beta^2 \leqslant (ady_4^2 + bcy_3^2 + bcy_2^2 + ady_1^2)\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{d}{a}\right) \quad ⑧$$

利用 $x_i^2 + y_i^2 = 1(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 及 $ab + cd = 1$ 得

$$⑦ + ⑧ \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \leqslant (2ad + 2bc)\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{d}{a}\right) =$$
$$2(ad + bc)\left(\frac{ab + cd}{bd} + \frac{ab + cd}{ac}\right) =$$
$$2(ad + bc)\left(\frac{1}{bd} + \frac{1}{ca}\right) =$$
$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) \Rightarrow$$
$$\alpha^2 + \beta^2 \leqslant 2\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right)$$

(1) 以上两种证法各具特色,交相辉映,能给人以美的享受和有益的启迪.

(2) 从以上两种证法知,题目中的已知条件“$ab + cd = 1$”可以改进为“$ab + cd \leqslant 1$”,如果干脆舍去这个条件,那么式(W) 还可以完善成更优的结论:

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqslant \frac{2(ab + cd)(ac + bd)(bc + ad)}{abcd} \quad (\text{X})$$

(3) 本题是涉及四个常数 a,b,c,d 和4个数对 $(x_i,y_i)(i = 1,2,3,4)$ 的妙题,据笔者初探,我们从证法 2 受到启发,完全可以将式(X)(或式(W)) 推广到任意 $n(2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 对数对 $(x_i,y_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的情形:

推广 9 设 $\lambda_i > 0$ 为常数,$(x_i,y_i)(1 \leqslant i \leqslant n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 为单位圆上的点,求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_{n+1-i}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda_{n+1-i}\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}\right) \quad (\text{Y})$$

分析 观察式(W) 的外形结构,我们先用柯西不等式进行观察,令

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_{n+1-i}$$

并注意到 $\sum_{i=1}^n y_{n+1-i}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$,有

$$\alpha^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

$$\beta^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_{n+1-i}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_{n+1-i}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

于是

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)=n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\Rightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \tag{9}$$

这一结果来得便利，却不是我们想要的结果，事实上，由柯西不等式知

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i\lambda_{n+1-i}}\cdot\sqrt{\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}}\right)^2=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{n+1-i}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 \tag{10}$$

证明　我们首先注意到

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}+\cdots+\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_2}+\frac{\lambda_n}{\lambda_1}=\frac{\lambda_n}{\lambda_1}+\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_2}+\cdots+\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}+\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\Rightarrow$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1-i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i} \tag{11}$$

设 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i,\beta=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_{n+1-i}$，应用柯西不等式

$$\alpha^2=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i\lambda_{n+1-i}}x_i\right)\cdot\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1-i}}}\right]^2\leqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1-i}}\right)=S\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\lambda_{n+1-i}x_i^2) \tag{12}$$

$$\beta^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_{n+1-i}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{n+1-i}y_i\right)^2=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i\lambda_{n+1-i}}y_i\right)\cdot\sqrt{\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}}\right]^2\leqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}S\lambda_i\lambda_{n+1-i}y_i^2\right) \tag{13}$$

应用已知条件 $x_i^2+y_i^2=1(1\leqslant i\leqslant n)$，⑫ + ⑬ 得

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant S\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}(y_i^2+x_i^2)=S\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}\right)\Rightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}\right)$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}\lambda_nx_1=\lambda_{n-1}x_2=\cdots=\lambda_1x_n\\ \lambda_1y_1=\lambda_2y_2=\cdots=\lambda_ny_n\\ x_i^2+y_i^2=1,1\leqslant i\leqslant n\end{cases} \tag{14}$$

如果我们是天空一闪而过的流星，路过式(W)时就不会留意它，更不会去探讨它，推广它，就没有式(X)，也不会诞生优美的式(Y)，不仅如此，我们还要讨论式(Y)呢！

讨论：

(1) 如果有人指出："上面将式 ⑭ 定为式(Y) 等号成立的条件，有点轻描淡写，并不具体."那么，当数对$(x_i, y_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$等于多少时，式(Y) 等号成立?为此，我们不妨设

$$\begin{cases}\lambda_{n+1-i}x_i = p > 0 \\ \lambda_i y_i = q > 0\end{cases}, 1 \leqslant i \leqslant n \quad ⑮$$

代入关系式 $x_i^2 + y_i^2 = 1$，得

$$\left(\frac{p}{\lambda_{n+1-i}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\lambda_i}\right)^2 = 1$$

即

$$\lambda_i^2 p^2 + \lambda_{n+1-i}^2 q^2 = (\lambda_i \lambda_{n+1-i})^2 \quad ⑯$$

取 $i = 1,2$ 得关于 p, q 的方程组

$$\begin{cases}\lambda_1^2 p^2 + \lambda_n^2 q^2 = (\lambda_1 \lambda_n)^2 \\ \lambda_2^2 p^2 + \lambda_{n-1}^2 q^2 = (\lambda_2 \lambda_{n-1})^2\end{cases} \quad ⑰$$

解得

$$\begin{cases}p = (\lambda_{n-1}\lambda_n)\sqrt{\dfrac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{(\lambda_1\lambda_{n-1})^2 - (\lambda_2\lambda_n)^2}} \\ q = (\lambda_1\lambda_2)\sqrt{\dfrac{\lambda_n^2 - \lambda_{n-1}^2}{(\lambda_2\lambda_n)^2 - (\lambda_1\lambda_{n-1})^2}}\end{cases} \quad ⑱$$

代入式 ⑮ 即可求得具体数对

$$(x_i, y_i) = \left(\frac{p}{\lambda_{n+1-i}}, \frac{q}{\lambda_i}\right), i = 1,2,\cdots,n \quad ⑲$$

而且，还要必须保证式 ⑱ 两个根号的分式为正数.

(2) 让我们记式(Y) 左边为 P_n，右边为 M_n，我们在证明式(Y) 前的分析中，得到结论

$$P_n = \alpha^2 + \beta^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \quad (Z)$$

另外，我们作代换

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (a, b, c, d)$$

那么，在式(Y) 中取 $n = 4$ 即可式(X)，取 $n = 2$ 得到

$$P_2 \leqslant 2(a^2 + b^2) \quad ⑳$$

取 $n = 3$ 得到

$$P_3 \leqslant (ac + b^2 + ca)\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{b} + \frac{c}{a}\right) = \frac{(b^2 + 2ac)(a^2 + c^2 + ac)}{ac} \quad ㉑$$

同样，在式(Z) 中取 $n = 3$ 得到

$$P_3 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad ㉒$$

那么，式 ㉑ 和式 ㉒ 哪个较强呢?为此，我们记

$$f(a,b,c) = (b^2 + 2ac)(a^2 + c^2 + ac) - 3ac(a^2 + b^2 + c^2) \quad ㉓$$

显然有 $f(1,1,1)=f(a,\sqrt{ac},c)=f(a,b,a)=0$，即当 $a=b=c$ 或 $b=\sqrt{ac}$ 或 $a=c$ 时，均有 $f(a,b,c)=0$，这三种情形式 ㉑ 和式 ㉒ 等价，又由于

$$f(a,b,c)=(a^2-2ac+c^2)(b^2-ac)=(a-c)^2(b^2-ac) \tag{24}$$

因此我们有结论：

当 $b^2\geqslant ac>0$ 时，$f(a,b,c)\geqslant 0$，式 ㉒ 比式 ㉑ 强；

当 $0<b^2\leqslant ac$ 时，$f(a,b,c)\leqslant 0$，式 ㉑ 比式 ㉒ 强.

(3) 在式(Z) 中取 $n=4$ 时，得

$$P_4\leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \tag{25}$$

强烈的好奇心驱使我们欲知道式(X) 和式 ㉕ 谁强谁弱呢？如果我们设

$$g(a,b,c,d)=(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)-2abc(a^2+b^2+c^2+d^2) \tag{26}$$

设 $\lambda,u>0$，有

$$g(\lambda,\lambda,u,u)=0,\quad g(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)=0$$

$$\begin{aligned} g(\lambda,\lambda,\lambda,u)&=(\lambda^2+\lambda u)^3-2\lambda^3u(3\lambda^2+u^2)=\\ &\lambda^3[(\lambda+u)^3-2u(3\lambda^2+u^2)]=\lambda^3(\lambda-u)^3 \end{aligned} \tag{27}$$

显然，当 $0<\lambda\leqslant u$ 时，$g(a,b,c,d)<0$，此时式 ㉕ 比式(X) 弱；

当 $\lambda\geqslant u>0$ 时，$g(a,b,c,d)>0$，式 ㉕ 比式(X) 强.

由此可见，式 ㉕ 与式(X) 难分强弱，自然，式(Y) 与式(Z) 就强弱难分了.

(4) 如果我们令

$$(x_i,y_i)=(\cos\theta_i,\sin\theta_i),1\leqslant i\leqslant n$$

则式(W)，(X)，(Y)，(Z) 均可转化为三角不等式，而且可进一步求得式(Z) 等号成立的条件是

$$(x_i,y_i)=(t\lambda_i,\gamma\lambda_{n+1-i}),1\leqslant i\leqslant n$$

其中

$$\begin{cases} r=\sqrt{\dfrac{\lambda_1^2-\lambda_n^2}{(\lambda_1\lambda_{n-1})^2-(\lambda_2\lambda_n)^2}} \\ t=\sqrt{\dfrac{\lambda_{n-1}^2-\lambda_n^2}{(\lambda_1\lambda_{n-1})^2-(\lambda_2\lambda_n)^2}} \end{cases} \tag{28}$$

(5) 令人惊喜的是，式(Y) 还有双重指数推广：

推广 10 设 $\lambda_i>0$ 为常数，$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 为单位圆内或边界周围上的点，指数 $k\in(0,2)$，$m\in(0,1)$，则有

$$\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^k\Big)^{\frac{2m}{k}}+\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_iy_{n+1-i}^k\Big)^{\frac{2m}{k}}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_i\lambda_{n+1-i}\Big)^m(p+q)^{1-m} \tag{29}$$

其中

$$\begin{cases} p=\Big(\sum\limits_{i=1}^n t_i\Big)^{k(1-m)} \\ t_i=\lambda_i(\lambda_{n+1-i})^{\frac{k}{k-2}} \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} q = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^{\frac{m(2-k)}{k(1-m)}} \\ \gamma_i = \lambda_i^{\frac{k}{k-2}} \cdot \lambda_{n+1-i} \end{cases}$$

特别地，当取 $k = m \in (0,1)$ 时，式 ㉙ 简化为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1-i} y_i^k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_{n+1-i}\right)^k (p+q)^{1-k} \tag{31}$$

这里

$$p = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{\frac{2-k}{1-k}}, \quad q = \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\right)^{\frac{2-k}{1-k}}$$

由此可见，式(Y)，㉙，㉛ 足够优雅精致了，但证明时却要两次应用赫尔特不等式.

证明　我们记式 ㉙ 左边为 $P_n(k,m)$.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k, \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{n+1-i}^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1-i} y_i^k$$

注意到

$$k \in (0,2) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{2}, \dfrac{2-k}{2} \in (0,1) \\ \dfrac{k}{2} + \dfrac{2-k}{2} = 1 \end{cases} \tag{32}$$

及 t_i, γ_i 的表达式，应用赫尔特不等式有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_{n+1-i} x_i^2\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{\frac{2-k}{2}} \Rightarrow \tag{33}$$

$$\alpha^2 \leqslant A^k T^{2-k} \Rightarrow \alpha^{\frac{2m}{k}} \leqslant A^m T^{\frac{m}{k}(2-k)} \tag{34}$$

其中

$$\begin{cases} A = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \lambda_{n+1-i} x_i^2) \\ T = \sum_{i=1}^{n} t_i \end{cases} \tag{35}$$

又

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{n+1-i}^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1-i} y_i^k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_{n+1-i} y_i^2\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\right)^{\frac{2-k}{2}} \Rightarrow \tag{36}$$

$$\beta^2 \leqslant B^k R^{2-k} \Rightarrow \beta^{\frac{2m}{k}} \leqslant B^m R^{\frac{m}{k}(2-k)} \tag{37}$$

其中

$$\begin{cases} B = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \lambda_{n+1-i} y_i^2) \\ R = \sum_{i=1}^{n} t_i \end{cases} \tag{38}$$

注意到

$$A + B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_{n+1-i}(x_i^2 + y_i^2) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_{n+1-i} \tag{39}$$

及 $m \in (0,1)$ 和 $m + (1 - m) = 1$,再次在用赫尔特不等式,有

$$P_n(k,m) = \alpha^{\frac{2m}{k}} + \beta^{\frac{2m}{k}} \leqslant A^m T^{\frac{m}{k}(2-k)} + B^m R^{\frac{m}{k}(2-k)} \leqslant$$

$$(A + B)^m [T^{\frac{m(2-k)}{k(1-m)}} + R^{\frac{m(2-k)}{k(1-m)}}]^{1-m} \leqslant \tag{40}$$

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_{n+1-i})^m (p + q)^{1-m} \tag{41}$$

6

第 29 届 IMO 第 5 题(希腊命题) 是一道非常美妙有趣的几何不等式题目:

题 10　如图 1,在 Rt$\triangle ABC$ 中,AD 是斜边 BC 上的高,联结 $\triangle ABD$ 的内心与 $\triangle ACD$ 的内心的直线分别与边 AB 及边 AC 相交于 K 及 L 两点,$\triangle ABC$ 与 $\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 与 T,求证:

$$S \geqslant 2T \tag{A_1}$$

当你翻开书《历届 IMO 试题集》(刘培杰主编) 第 449 页时,就会欣赏到本题的 5 种非常漂亮的证法,且如果我们设 BC, CA, AB, AD 依次为 a, b, c, h,则有

$$AK = AL = h = \frac{bc}{a}$$

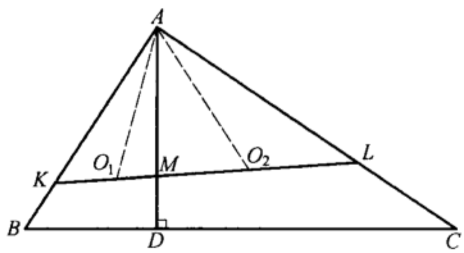


图 1

(1) 如果将题中的两内心(设为 O_1, O_2) 改为两重心(设为 G_1, G_2) 时,则易推得

$$S = \frac{9}{4}T \tag{B_1}$$

(2) 若将题中两内心改为两外心时,显然有

$$S = 4T \tag{C_1}$$

(3) 若再将题中 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的内心改为垂心时,又可得

$$S = T \tag{D_1}$$

(4) 从式(A_1) 和式(B_1) 又可得到一个有趣的结论:

直角三角形斜边上的高将它分成两个小直角三角形 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$,联结 $\triangle_1$ 与 $\triangle_2$ 的重心与 $\triangle$ 两直角边相交成的三角形面积记为 $S(G)$,联结 $\triangle_1$ 与 $\triangle_2$ 的内心与 $\triangle$ 两直角边相交成的三角形的面积记为 $S(I)$,则有不等关系

$$\frac{S(G)}{S(I)} \geqslant \frac{9}{8} \tag{E_1}$$

(5) 如果我们设 $\lambda, u, v > 0$,那么有

$$\lambda BK + uBC + vCL \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(2u + 2\sqrt{2\lambda v} - \lambda - v)KL \tag{F_1}$$

特别地,当取 $\lambda = u = v = 1$ 时,式(F_1)化为

$$BK + BC + CL \geqslant 2KL \qquad (G_1)$$

式(G_1)即为单墫老师过去得到的结论.

证明 应用已证得的结论有

$$AK = AL = h = \frac{bc}{a} \Rightarrow \begin{cases} BK = c - \dfrac{bc}{a} \\ CL = b - \dfrac{bc}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\lambda BK + uBC + vCL = \\
&\lambda\left(c - \frac{bc}{a}\right) + ua + v\left(b - \frac{bc}{a}\right) = \\
&ua + vb + \lambda c - (\lambda + v)\frac{bc}{a} = \\
&\frac{1}{a}[ua^2 + a(vb + \lambda c) - (\lambda + v)bc] = \\
&\frac{1}{a}[u(\sqrt{b^2 + c^2})^2 + \sqrt{b^2 + c^2}(vb + \lambda c) - (\lambda + v)bc] \geqslant \\
&\frac{1}{a}[2ubc + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lambda v}bc - (\lambda + v)bc] = \\
&[2u + 2\sqrt{2\lambda v} - (\lambda + v)]\frac{bc}{a} = \\
&(2u + 2\sqrt{2\lambda v} - \lambda - v)h = \\
&(2u + 2\sqrt{2\lambda v} - \lambda - v) \cdot \frac{KL}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

即式(F_1)成立,等号成立仅当 $\lambda = v$ 及 $b = c$.

(6) 进一步地,我们还有结论

$$\begin{aligned}
&(\lambda + u)BK + (u + v)BC + (v + \lambda)CL = \\
&(\lambda + u)(c - h) + (u + v)a + (v + \lambda)(b - h) = \\
&m - (2\lambda + u + v)h = m - \frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda + u + v)KL \qquad ①
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
m = &(u + v)a + (v + \lambda)b + (\lambda + u)c\text{(应用杨克昌不等式)} \geqslant \\
&2[(uv + v\lambda + \lambda u)(bc + ca + ab)]^{\frac{1}{2}} \qquad ②
\end{aligned}$$

由于

$$bc = ah = \sqrt{b^2 + c^2} \cdot h \geqslant \sqrt{2bc} \cdot h \Rightarrow bc \geqslant 2h^2 = KL^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&bc + ca + ab = bc + \sqrt{b^2 + c^2}(b + c) \geqslant \\
&bc + \sqrt{2bc} \cdot 2\sqrt{bc} = (1 + 2\sqrt{2})bc \Rightarrow \\
&bc + ca + ab \geqslant (1 + 2\sqrt{2})KL^2 \qquad ③
\end{aligned}$$

式①,②,③结合即得

$$(\lambda+u)BK+(u+v)BC+(v+\lambda)CL\geqslant\delta\cdot KL \tag{H_1}$$

其中

$$\delta=2[(1+2\sqrt{2})(uv+v\lambda+\lambda u)]^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda+u+v) \tag{4}$$

等号成立仅当

$$\lambda:u:v=a:b:c=\sqrt{2}:1:1 \tag{5}$$

(7) 上面的式(F_1)和式(H_1)均是式(G_1)的加权推广.如果我们设指数 $\theta\geqslant1$,那么式(G_1)又可从指数方面推广为

$$BK^\theta+BC^\theta+CL^\theta\geqslant\frac{2^\theta+2(\sqrt{2}-1)^\theta}{(\sqrt{2})^\theta}KL^\theta \tag{I_1}$$

显然,当 $\theta=1$ 时,式(I_1)化为式(G_1).

证明
$$\begin{aligned}BK^\theta+BC^\theta+CL^\theta&=(b-h)^\theta+a^\theta+(c-h)^\theta\geqslant\\&a^\theta+2\left[\frac{(b-h)+(c-h)}{2}\right]^\theta=\\&(b^2+c^2)^{\theta/2}+2\left(\frac{b+c}{2}-h\right)^\theta\geqslant\\&(2bc)^{\theta/2}+2(\sqrt{bc}-h)^\theta\geqslant\\&(4h^2)^{\theta/2}+2(\sqrt{2}h-h)^\theta=\\&[2^\theta+2(\sqrt{2}-1)^\theta]h^\theta=\frac{2^\theta+2(\sqrt{2}-1)^\theta}{(\sqrt{2})^\theta}KL^\theta\end{aligned}$$

即式(I_1)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

(8) 为了探讨美妙的式(A_1),我们在前面经历了些"风风雨雨",但是"风雨"过后,必是"彩虹":

结论 设 $\triangle ABC$,$\triangle AKL$ 的周长、面积、内切圆半径、外切圆半径分别为 L_S,S,γ_S,R_S 与 L_T,T,γ_T,R_T,则有"一条龙"

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{L_S}{L_T}\right)^2>\left(\frac{R_S}{R_T}\right)^2\geqslant\left(\frac{L_S}{L_T}\right)^2\geqslant\frac{S}{T}\geqslant\left(\frac{\gamma_S}{\gamma_T}\right)^2\geqslant2 \tag{J_1}$$

证明 第一步:

$$\begin{aligned}L_S&=BC+AB+CA=2R_S\sin A+2R_S\sin B+2R_S\sin C=\\&2R_S+2R_S\sin B+2R_S\cos B=\\&2R_S(1+\sin B+\cos B)\end{aligned} \tag{6}$$

记

$$\left.\begin{aligned}&x=\sin B+\cos B=\sqrt{2}\cos(B-\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}\\&x^2=1+2\sin B\cos B>1\Rightarrow x>1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$1<x\leqslant\sqrt{2}\Rightarrow4R_S<L_S\leqslant2R_S(1+\sqrt{2}) \tag{7}$$

又

$$L_T = 2R_T\sin 90° + 2\times 2R_T\sin 45°(\text{因 } AK = AL) = 2(1+\sqrt{2})R_T \tag{8}$$

式⑦和式⑧结合得

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{L_S}{L_T}\right)^2 > \left(\frac{R_S}{R_T}\right)^2 \geqslant \left(\frac{L_S}{L_T}\right)^2 \tag{9}$$

第二步:注意到 $AK = AD = AL = h = \frac{bc}{a}$ 及 $a = \sqrt{b^2+c^2} \geqslant \sqrt{2bc}$,有

$$S = \frac{1}{2}bc,\quad T = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned} L_T &= h+h+KL = (2+\sqrt{2})\frac{bc}{a} \\ L_S &= a+b+c \geqslant \sqrt{2bc}+2\sqrt{bc} \end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\frac{L_S}{L_T}\right)^2 \geqslant \frac{a^2}{bc} = \frac{S}{T} = \frac{\gamma_S L_S}{\gamma_T L_T}\Rightarrow$$

$$\frac{L_S}{L_T} \geqslant \frac{\gamma_S}{\gamma_T}\Rightarrow\frac{S}{T} \geqslant \left(\frac{\gamma_S}{\gamma_T}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{L_S}{L_T}\right)^2 \geqslant \frac{S}{T} \geqslant \left(\frac{\gamma_S}{\gamma_T}\right)^2 \tag{10}$$

第三步:由于

$$\left(\frac{\gamma_S}{\gamma_T}\right)^2 = \frac{b+c-a}{h+h-\sqrt{2}h} = \frac{a(\sin B+\cos B-1)}{(2-\sqrt{2})h} =$$

$$\frac{h(\tan B+\cot B)(\sin B+\cos B-1)}{(2-\sqrt{2})\ h}\Rightarrow$$

$$\frac{\gamma_S}{\gamma_T} = (2+\sqrt{2})\left(\frac{\sin B+\cos B-1}{\sin 2B}\right) \tag{11}$$

现在我们证明:

$$(2+\sqrt{2})(\sin B+\cos B-1) \geqslant \sqrt{2}\sin 2B\Leftrightarrow \tag{12}$$

$$\sin B+\cos B-(\sqrt{2}-1)\sin 2B-1 \geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{2}-1)\sin 2B+1-(\sin B+\cos B) \leqslant 0 \tag{13}$$

记 $t = \sin B+\cos B \leqslant \sqrt{2}$ 且 $t > 1$,及

$$t^2 = (\sin B+\cos B)^2 = 1+\sin 2B > 1$$

$$\begin{aligned} \text{式⑬}&\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)(t^2-1)+1-t \leqslant 0\Leftrightarrow \\ &(\sqrt{2}-1)t^2-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)t+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \leqslant 0\Leftrightarrow \\ &(\sqrt{2}-1)[t^2-(\sqrt{2}+1)t+\sqrt{2}] \leqslant 0\Leftrightarrow \\ &(t-1)(t-\sqrt{2}) \leqslant 0\Leftrightarrow 1 < t \leqslant \sqrt{2} \end{aligned} \tag{14}$$

因此式⑭成立,从而逆推之式⑫成立,结合式⑪得

$$\frac{\gamma_S}{\gamma_T} \geqslant \sqrt{2} \tag{15}$$

综合上面三步中的式⑨,式⑩,式⑮,即得式(J_1),等号成立仅当△ABC为等腰三角形.

(9) 由于

$$\frac{\gamma_S}{\gamma_T} \geqslant \sqrt{2}\Leftrightarrow b+c-a \geqslant 2(\sqrt{2}-1)h \tag{16}$$

且

$$(b+c)^2-(a+h)^2=(b^2+c^2+2bc)-(a^2+2ah+h^2)=$$
$$(a^2+4S)-(a^2+4S+h^2)=-h^2<0\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}b+c-a<h\\ b+c-a\geqslant 2(\sqrt{2}-1)h\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2}>\frac{\gamma_S}{\gamma_T}\geqslant\sqrt{2} \quad (K_1)$$

可见,式(K_1)又是一个漂亮的双向不等式,同时,我们还将一个传统的几何不等式

$$a+h>b+c \quad ⑰$$

完善成了一个优美的双向不等式

$$a+h>b+c\geqslant a+2(\sqrt{2}-1)h \quad (L_1)$$

(10)最后,我们提出问题:

将本题中的高线 AD 改为中线或角平分线,比值 S/T 又怎样呢?如果将 $\triangle BAC$ 改为其他三角形情况又怎样呢?

7

我国首届女子数学奥林匹克第7题是:

题11 锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线垂足为 D,E,F,求证:$\triangle DEF$ 的周长不超过 $\triangle ABC$ 周长的一半.

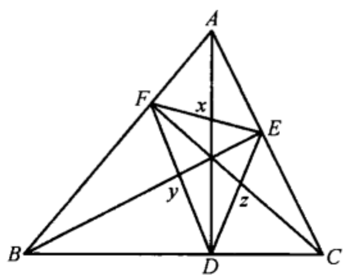


图2

证明 设 $EF=x,DE=y,FD=z,BC=a,CA=b,AB=c$,由于 D,E,A,B 四点共圆,且 AB 为直径,由正弦定理得

$$DE=AB\sin\angle DAE=c\cdot\sin(90^\circ-C)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}DE=c\cdot\cos C\\ \text{同理}\quad DF=b\cdot\cos B\end{array}\right\}\Rightarrow DE+DF=c\cdot\cos C+b\cdot\cos B=$$
$$R(2\sin C\cos C+2\sin B\cos B)=$$
$$R(\sin 2B+\sin 2C)=$$
$$2R\sin(B+C)\cos(B-C)=$$
$$a\cos(B-C)\leqslant a\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}y+z\leqslant a\\ \text{同理}\begin{cases}z+x\leqslant b\\ x+y\leqslant c\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow x+y+z\leqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$$

即

$$x+y+z\leqslant\frac{1}{2}(a+b+c)\qquad(M_1)$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(1) 利用上面的结论,我们易得到式(M_1)的配对式

$$xyz\leqslant\frac{1}{8}abc\qquad(M_2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\qquad(M_3)$$

$$yz+zx+xy\leqslant\frac{1}{4}(bc+ca+ab)\qquad(M_4)$$

(2) 如果我们设 $\lambda,u,v>0$,则

$$\sum\lambda(y+z)\leqslant\sum\lambda a\Rightarrow\sum(u+v)x\leqslant\sum\lambda a\qquad(M_5)$$

式(M_5)可以视为式(M_1)的加权推广.

$$\begin{aligned}\sum\lambda bc&\geqslant\sum\lambda(x+y)(x+z)=\sum\lambda(x^2+t)(\text{其中 } t=yz+zx+xy)=\\&\sum\lambda x^2+t\sum\lambda=\\&\frac{1}{2}\sum(uy^2+vz^2)+\sum(\lambda+u+v)yz\geqslant\\&\sum(\sqrt{uv}yz)+\sum(\lambda+u+v)yz=\\&\sum(\lambda+u+v+\sqrt{uv})yz\Rightarrow\\&\sum(s+\sqrt{uv})yz\leqslant\sum\lambda bc(\text{其中 } s=\lambda+u+v)\end{aligned}\qquad(M_6)$$

当取 $\lambda=u=v$ 时,式(M_6)化为式(M_4),因此式(M_6)为式(M_4)的一个加权推广.

另一方面,如果我们应用杨克昌不等式,有

$$\begin{aligned}\sum(u+v)bc&\geqslant\sum(u+v)(x+y)(x+z)=\sum(u+v)(t+x^2)=\\&t\sum(u+v)+\sum(u+v)x^2=2t\sum\lambda+\sum(u+v)x^2\geqslant\\&2t\sum\lambda+2\sqrt{\left(\sum uv\right)\left(\sum y^2z^2\right)}\geqslant\\&2t\sum\lambda+2\left(\sum yz\right)\sqrt{\frac{1}{3}\sum uv}=\\&t\left[2\sum\lambda+2\sqrt{\frac{1}{3}\sum uv}\right]\geqslant\\&t\left(2\sum\lambda+\frac{2}{3}\sum\sqrt{uv}\right)=\\&\frac{1}{3}t\left[5\sum\lambda+\left(\sum\lambda+2\sum\sqrt{uv}\right)\right]=\\&\frac{1}{3}t\left[\frac{5}{3}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2+\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\right]=\\&\frac{8}{9}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\sum yz\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\sum(u+v)bc \geqslant \frac{8}{9}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\sum yz \tag{M_7}$$

式(M_7)为式(M_4)的又一个加权推广.

相应地,我们还有

$$a^\lambda b^u c^v \geqslant (y+z)^\lambda(z+x)^u(x+y)^v \geqslant 2^s[(yz)^\lambda(zx)^u(xy)^v]^{1/2} \Rightarrow$$
$$(a^\lambda b^u c^v)^2 \geqslant 4^s \cdot x^{u+v} \cdot y^{v+\lambda} \cdot z^{\lambda+u} \tag{M_8}$$

式(M_8)为式(M_2)的指数推广.

另一方面,我们有

$$a \geqslant y+z \geqslant 2\sqrt{yz} \geqslant \frac{4}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}} \Rightarrow \lambda\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant \frac{4\lambda}{a} \Rightarrow$$
$$\sum\lambda\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 4\sum\frac{\lambda}{a} \Rightarrow$$
$$\sum\frac{u+v}{x} \geqslant 4\sum\frac{\lambda}{a} \tag{M_9}$$

式(M_9)为式(M_3)的加权推广.

(3) 现在我们从权系数、指数两方面去推广式(M_1).

推广 11 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,三边长为 a,b,c,三边上的高线垂足为 D,E,F 且 EF,FD,DE 依次为 x,y,z;指数 $0<k\leqslant 1$,系数 $\lambda,u,v>0$,则

$$\lambda x^k + uy^k + vz^k \leqslant Q(\lambda a^k + ub^k + vc^k) \tag{N_1}$$

其中

$$\lambda + u + v = 1 \quad ①$$
$$Q = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{uv}{\lambda}+\frac{v\lambda}{u}+\frac{\lambda u}{v}\right)\right]^k \quad ②$$

证明 不妨设

$$0<A\leqslant B\leqslant C<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}1>\cos A\geqslant\cos B\geqslant\cos C>0\\ a\leqslant b\leqslant c\end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases}1>\cos^k A\geqslant\cos^k B\geqslant\cos^k C>0\\ a^k\leqslant b^k\leqslant c^k\end{cases}$$

应用切比雪夫不等式的加权推广有

$$T = \lambda x^k + uy^k + vz^k = \lambda(a\cos A)^k + u(b\cos B)^k + v(c\cos C)^k =$$
$$M(\lambda a^k + ub^k + vc^k) \quad ③$$

其中

$$M = \lambda\cos^k A + u\cos^k B + v\cos^k C \quad ④$$

应用加权幂平均不等式,有

$$\left.\begin{array}{l}0<k\leqslant 1, 0<\lambda,u,v<1\\ \lambda+u+v=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$M \leqslant (\lambda\cos A + u\cos B + v\cos C)^k(\text{应用三角母不等式}) \leqslant$$
$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{uv}{\lambda}+\frac{v\lambda}{u}+\frac{\lambda u}{v}\right)\right]^k \Rightarrow M \leqslant Q \Rightarrow \quad ⑤$$

$$T \geqslant Q(\lambda a^k + ub^k + vc^k)$$

即式(N_1)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}\lambda\sin A = u\sin B = v\sin C \\ a = b = c, \lambda + u + v = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \lambda = u = v = \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

(3) 如果我们设 $0 \leqslant k \leqslant 1$,并在式($N_1$)中取 $\lambda = u = v = \frac{1}{3}$,得到

$$2^k(x^k + y^k + z^k) \leqslant a^k + b^k + c^k \Rightarrow 2\left(\frac{x^k + y^k + z^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\frac{a^k + b^k + c^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} \quad ⑥$$

又由于当 $k = 0$ 时,有极限

$$\lim_{k \to 0}\left(\frac{x^k + y^k + z^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[3]{xyz} \quad ⑦$$

$$\lim_{k \to 0}\left(\frac{a^k + b^k + c^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[3]{abc} \quad ⑧$$

及

$$xyz \leqslant \frac{1}{8}abc \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt[3]{abc} \quad ⑨$$

因此,当 $k = 0$ 时,式 ⑥ 也成立.

另一方面,如果我们仍设 $0 \leqslant k \leqslant 1$,有

$$a \geqslant y + z \geqslant 2\left(\frac{y^k + z^k}{2}\right)^{1/k} \Rightarrow 2a^k \geqslant 2^k(y^k + z^k) \Rightarrow$$

$$2a^k\left(\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k}\right) \geqslant 2^k(y^k + z^k)\left(\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k}\right) \geqslant 2^k \times 2^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2^{k+1} \cdot \lambda}{a^k} \leqslant \lambda\left(\frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}\right) \Rightarrow$$

$$2^{k+1}\sum\frac{\lambda}{a^k} \leqslant \sum\lambda\left(\frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}\right) \Rightarrow$$

$$\sum\frac{u + v}{x^k} \geqslant 2^{k+1}\sum\frac{\lambda}{a^k} \quad (O_1)$$

式(O_1)即为式(M_9)的指数推广.

(4) 让我们在式(O_1)中取 $\lambda = u = v$ 得

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant 2^k\left(\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{-k} + y^{-k} + z^{-k}}{3}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\frac{a^{-k} + b^{-k} + c^{-k}}{3}\right)^{\frac{1}{k}} \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{x^{-k} + y^{-k} + z^{-k}}{3}\right)^{-\frac{1}{k}} \geqslant \left(\frac{a^{-k} + b^{-k} + c^{-k}}{3}\right)^{-\frac{1}{k}} \quad ⑩$$

注意到 $0 \leqslant k \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 0$ 和 ⑥,⑨,⑩ 三式结合,可得到统一的指数推广:

推广 12 设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,三边上的高线垂足为 D,E,F,设 DE,

EF,FD 依次为 x,y,z，指数 $-1\leqslant\theta\leqslant 1$（或 $\theta\in[-1,1]$），则有

$$2\left(\frac{x^{\theta}+y^{\theta}+z^{\theta}}{3}\right)^{\frac{1}{\theta}}\leqslant\left(\frac{a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta}}{3}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{P_1}$$

(5) 如果我们称前面的锐角 $\triangle ABC$ 的三高线 AD,BE,CF 的垂足 D,E,F，构成的三角形为垂足 $\triangle DEF$，那么我们从另一个新的思路可以将式(P) 推广为：

推广 13 设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，内接垂足三角形为 $\triangle D_1E_1F_1$；$\triangle D_1E_1F_1$ 的内接垂足三角形为 $\triangle D_2E_2F_2$；…… 如此下去，$\triangle D_{n-1}E_{n-1}F_{n-1}$ 的内接垂足三角形为 $\triangle D_nE_nF_n$，设 $\triangle D_iE_iF_i$ 的三边长为 $a_i,b_i,c_i(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$，并定义 $(a_0,b_0,c_0)=(a,b,c)$，指数 $0\leqslant k\leqslant 1$，$-1\leqslant\theta\leqslant 1$，系数 $\lambda,u,v\in(0,1)$，且 $\lambda+u+v=1$，则

$$2^n\left(\frac{a_n^{\theta}+b_n^{\theta}+c_n^{\theta}}{3}\right)^{\frac{1}{\theta}}\leqslant\left(\frac{a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta}}{3}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{Q_1}$$

$$\lambda a_n^k+ub_n^k+vc_n^k\leqslant Q_n(\lambda a_n^k+ub^k+vc^k) \tag{R_1}$$

其中

$$Q_n=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{uv}{\lambda}+\frac{v\lambda}{u}+\frac{\lambda u}{v}\right)\right]^{nk} \tag{11}$$

显然，当取 $n=1$ 时，设 $(a_1,b_1,c_1)=(x,y,z)$，式(Q_1) 化为式(P_1)，式(R_1) 化为式(N_1).

证明 我们记 $Q_n=Q^n$，即 $Q_1=Q$，和 $T_m=\lambda a_m^k+ub_m^k+vc_m^k(1\leqslant m\leqslant n\in\mathbf{N})$，其中 $T_0=\lambda a_0^k+ub_0^k+vc_0^k=\lambda a^k+ub^k+vc^k$，则由推广 11 知，有如下递推关系

$$T_m\leqslant QT_{m-1}\Rightarrow T_n\leqslant QT_{n-1}\leqslant Q^2T_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant Q^nT_0=Q_1^nT_0=Q_nT_0\Rightarrow$$
$$T_n\leqslant Q_nT_0\Rightarrow\lambda a_n^k+ub_n^k+vc_n^k\leqslant Q_n(\lambda a^k+ub^k+vc^k)$$

易推知等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $\lambda=u=v$.

式(Q_1) 同理可证.

(6) 我们在前面限制在一个三角形的范畴内探讨和推广不等式(M_1). 下面，我们将推广 11 中的式(N_1)，将其推广到 $n(n\in\mathbf{N})$ 个三角形的情形.

推广 14 设所有的 $\{\triangle A_iB_iC_i\}(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$ 均为内角大小同序的锐角三角形，其三边上的高线为 A_iD_i,B_iE_i,C_iF_i，其垂足三角形三边 E_iF_i,F_iD_i,D_iE_i 依次记为 x_i,y_i,z_i；三边 B_iC_i,C_iA_i,A_iB_i 依次证为 a_i,b_i,c_i，系数 $\lambda,u,v\in(0,1)$，$\lambda+u+v=1$，指数 $0<k\leqslant 1$，$\alpha_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，则有

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\right)^k+u\left(\prod_{i=1}^{n}y_i^{\alpha_i}\right)^k+v\left(\prod_{i=1}^{n}z_i^{\alpha_i}\right)^k\leqslant$$
$$Q^k\left[\lambda\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\alpha_i}\right)^k+u\left(\prod_{i=1}^{n}b_i^{\alpha_i}\right)^k+v\left(\prod_{i=1}^{n}c_i^{\alpha_i}\right)^k\right] \tag{S_1}$$

其中

$$Q=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{uv}{\lambda}+\frac{v\lambda}{u}+\frac{\lambda u}{v}\right)\right] \quad ⑫$$

特别地，当 $n=1$ 时，式(S_1)化为式(N_1)，当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \backsim \triangle A_nB_nC_n$ 时，式(S_1)化为

$$\lambda(x_1^s)^k+u(y_1^s)^k+v(z_1^s)^k \leqslant$$

$$Q[\lambda(a_1^s)^k+u(b_1^s)^k+v(c_1^s)^k]\text{(其中 } s=\sum_{i=1}^n \alpha_i=1) \Rightarrow$$

$$\lambda x_1^k+uy_1^k+vz_1^k \leqslant Q(\lambda a_1^k+ub_1^k+vc_1^k) \quad ⑬$$

显然，式 ⑬ 等价于式(N_1).

略证　记

$$T_n=\lambda\prod_{i=1}^n(x_i^{\alpha_i})^k+u\prod_{i=1}^n(y_i^{\alpha_i})^k+v\prod_{i=1}^n(z_i^{\alpha_i})^k$$

根据题意和对称性，不妨设

$$0<A_i \leqslant B_i \leqslant C_i<\frac{\pi}{2}(1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_i \leqslant b_i \leqslant c_i \\ \cos A_i \geqslant \cos B_i \geqslant \cos C_i>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$T_n=\lambda\prod_{i=1}^n(a_i\cos A_i)^{K\alpha_i}+u\prod_{i=1}^n(b_i\cos B_i)^{K\alpha_i}+v\prod_{i=1}^n(c_i\cos C_i)^{K\alpha_i} \leqslant$$

$$M_nS_n\text{(应用切比雪夫不等式)} \quad ⑭$$

其中

$$S_n=\lambda\left(\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}\right)^k+u\left(\prod_{i=1}^n b_i^{\alpha_i}\right)^k+v\left(\prod_{i=1}^n c_i^{\alpha_i}\right)^k \quad ⑮$$

$$M_n=\lambda\left[\prod_{i=1}^n(\cos A_i)^{\alpha_i}\right]^k+u\left[\prod_{i=1}^n(\cos B_i)^{\alpha_i}\right]^k+v\left[\prod_{i=1}^n(\cos C_i)^{\alpha_i}\right]^k\text{(应用幂平均不等式)} \leqslant$$

$$\left[\lambda\prod_{i=1}^n(\cos A_i)^{\alpha_i}+u\prod_{i=1}^n(\cos B_i)^{\alpha_i}+v\prod_{i=1}^n(\cos C_i)^{\alpha_i}\right]^k\text{(应用赫尔特不等式)} \leqslant$$

$$\left[\prod_{i=1}^n(\lambda\cos A_i+u\cos B_i+v\cos C_i)^{\alpha_i}\right]^k\text{(应用三角母不等式)} \leqslant$$

$$\left(\prod_{i=1}^n Q^{\alpha_i}\right)^k=\left(Q^{\sum_{i=1}^n\alpha_i}\right)^k=Q^k \Rightarrow M_n \leqslant Q^k \quad ⑯$$

由 ⑭，⑮，⑯ 三式结合即得式(S_1)，等号成立仅当 $\lambda=u=v=\frac{1}{3}$，且 $\triangle A_iB_iC_i$ 均为正三角形.

8

我们在上一节中介绍的式(M_1)即为

$$DE + EF + FD \leqslant \frac{1}{2}(a + b + c) \tag{M'$_1$}$$

其中 D,E,F 是锐角 $\triangle ABC$ 三边上高线的垂足.

(1) 式($\mathrm{M'}_1$) 是一个漂亮的线性几何不等式,看见它那漂亮的外观,顿使我们热血沸腾,想起了优美的:

Zirakzadeh 不等式　设 P,Q,R 分别位于 $\triangle ABC$ 的三条边 BC,CA,AB 上,且将 $\triangle ABC$ 的周长三等分,则

$$QR + RP + PQ \geqslant \frac{1}{2}(a + b + c) \tag{T$_1$}$$

显然式(T_1)也是一个漂亮的线性几何不等式,它的外观与式($\mathrm{M'}_1$)非常相似,只是方向相反,它们简直是"天生一对"的配对式,如果将它俩"珠联璧合",就可完善成一个漂亮的双向不等式

$$QR + RP + PQ \geqslant \frac{1}{2}(a + b + c) \geqslant DE + EF + FD$$

关于 Zirakzadeh 不等式,最先由杨学枝老师提供了一种优美的证法,随即在我国引起了人们的广泛关注和讨论(如陈计先生等).

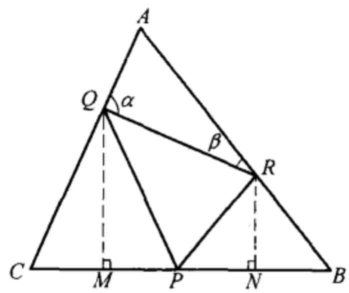


图 3

证明(杨学枝)　如图3,从 Q,R 分别向 BC 引垂线,M,N 为垂足,则有

$$QR \geqslant MN = a - (BR\cos B + CQ\cos C)$$

同理

$$\begin{cases} RP \geqslant b - (CP\cos C + AR\cos A) \\ PQ \geqslant c - (AQ\cos A + BP\cos B) \end{cases}$$

$$AQ + AR = BR + BP = CP + CQ = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &QR + RP + PQ \geqslant \frac{1}{3}\left(3 - \sum \cos A\right)\sum a \\ &\sum \cos A = \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2} \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$QR + RP + PQ \geqslant \frac{1}{2}\left(3 - \frac{3}{2}\right)\sum a = \frac{1}{2}\sum a$$

即式(T_1)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 P,Q,R 是三边中点.

(2) 如果我们设 $\lambda,u,v > 0$,应用三角母不等式,有

$$2\sum \lambda\cos(\pi - 2A) \leqslant \frac{uv}{\lambda} \Rightarrow -2\sum \lambda\cos 2A \leqslant \sum \frac{uv}{\lambda} \Rightarrow$$

$$-2\sum \lambda(1 - 2\sin^2 A) \leqslant \sum \frac{uv}{\lambda} \Rightarrow 4\sum \lambda\sin^2 A \leqslant$$

$$\sum \frac{uv}{\lambda} + 2\sum \lambda = \frac{1}{\lambda uv}\left(\sum u^2v^2 + 2\lambda uv\sum \lambda\right) =$$

$$\frac{\left(\sum uv\right)^2}{\lambda uv} \Rightarrow \sum \lambda \sin^2 A \leqslant \frac{(uv + v\lambda + \lambda u)^2}{4\lambda uv} \quad ①$$

我们再依次设 $\triangle AQR$，$\triangle BRP$，$\triangle CPQ$ 的面积为 S_1, S_2, S_3，则

$$S_1 = \frac{1}{2}AQ \cdot AP\sin A \leqslant \frac{1}{8}(AQ + AP)^2\sin A = \frac{1}{72}\left(\sum a\right)^2\sin A \Rightarrow$$

$$\sum \lambda S_1^2 \leqslant \left(\frac{1}{72}\right)^2\left(\sum a\right)^4\sum \lambda \sin^2 A \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{72}\right)^2\left(\sum a\right)^4 \cdot \frac{\left(\sum uv\right)^2}{4\lambda uv} =$$

$$\frac{1}{12^2}\left(\sum a\right)^4 \cdot \frac{\left(\sum uv\right)^2}{\lambda uv}$$

即

$$\lambda S_1^2 + uS_2^2 + vS_3^2 \leqslant \frac{1}{144}(a + b + c)^2 \cdot \frac{(uv + v\lambda + \lambda u)^2}{\lambda uv} \quad (\mathrm{U_1})$$

式($\mathrm{U_1}$)是一个有趣的几何不等式，再结合式($\mathrm{T_1}$)，则有

$$\sum \lambda S_1^2 \leqslant \frac{\left(\sum QR\right)^2}{24^2} \cdot \frac{\left(\sum uv\right)^2}{\lambda uv} \quad ②$$

若再取 $\lambda = u = v$，得其推论

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leqslant \frac{1}{64}(QR + RP + PQ)^2 \quad ③$$

和

$$\left(\sum QR\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(\sum a\right)^2 \geqslant 64\sum S_1^2 \geqslant \frac{64}{3}\left(\sum S_1\right)^2 \quad ④$$

(3) 在 20 世纪 90 年代，陈计先就将式($\mathrm{T_1}$)加强为了

$$QR \cdot RP + RP \cdot PQ + PQ \cdot QR \geqslant \frac{1}{12}(a + b + c)^2 \quad ⑤$$

$$(QR + RP + PQ)^3 \geqslant \frac{9}{8}(a^3 + b^3 + c^3) \quad ⑥$$

$$QR \cdot RP + RP \cdot PQ + PQ \cdot QR \geqslant \frac{1}{9}(a + b + c)^2 - \frac{A}{\sqrt{3}} \quad ⑦$$

其中 A 表示 $\triangle ABC$ 的面积.

(4) 我们仍然记 QR, RP, PQ 依次为 x, y, z，后来陈计先生结合式($\mathrm{T_1}$)

$$x + y + z \geqslant \frac{1}{2}(a + b + c)$$

建立了配对式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2 + c^2) \quad ⑧$$

再从式 ⑥ 得到推论

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant \frac{1}{2^3}(a^3+b^3+c^3) \quad ⑨$$

于是我们建立了.

推广15(指数推广) 设点 P,Q,R 位于 $\triangle ABC$ 的边上并将周界三等分,如果这三点中有两点位于同一边上,则

$$x^k+y^k+z^k \geqslant 2^{-k}(a^k+b^k+c^k) \quad (V_1)$$

其中 $k\in\mathbf{R}$, x,y,z 依次表示 QR,RP,PQ, a,b,c 依次表示 BC,CA,AB.

当 $k=1,2,3$ 时,式(V_1)显然成立.

当 $k=0$ 时,式(V_1)两边求极限.

$$\lim\left(\frac{\sum x^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} > \frac{1}{2}\lim\left(\frac{\sum a^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}} \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{xyz} > \frac{1}{2}\sqrt[3]{abc} \Rightarrow xyz > \frac{1}{8}abc \quad ⑩$$

式 ⑩ 可以视为式(T_1)的配对式.

证明 (陈计)不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$, P,Q 两点位于 BC 边上,如图4所示,所以

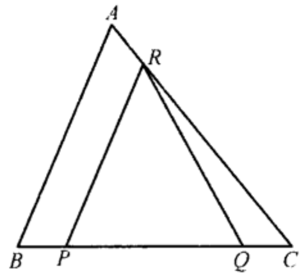


图4

$$x=PQ=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

(i) $\max(x,y,z)\geqslant PQ=\frac{1}{3}(a+b+c)>\frac{2}{3}a>\max\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)\Rightarrow\max(x,y,z)>\max\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$

(ii) 在 $\triangle PQR$ 中

$$QR+RP>PQ\Rightarrow y+z>x=\frac{1}{3}(a+b+c)\Rightarrow\max(y,z)>\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}(a+b+c)\Rightarrow$$

$$\max(y+z,z+x,x+y)>x+\max(y,z)>$$

$$\frac{1}{3}(a+b+c)+\frac{1}{6}(a+b+c)=$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)>\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=$$

$$\max\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\frac{b}{2}+\frac{c}{2},\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right)$$

(iii) $y+z>x=\frac{1}{3}(a+b+c)\Rightarrow x+y+z>\frac{2}{3}(a+b+c)>\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

由(i) ~ (iii)和优超定理,当 $k\geqslant 1$ 时,式(V_1)成立,当 $k=0$ 时,式(V_1)也成立.

推广15 只证明了当 P,Q,R 中有两点在 $\triangle ABC$ 的一边上时的情况时,但当 $\triangle PQR$ 的顶点分别在 $\triangle ABC$ 的三边上时,式(V_1)还成立吗?可见,欲将式(T_1)彻底推广为式(V_1)还是有困难的,但从上面已证的结论和当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(V_1)成立.

(5) 现在,我们从系数方面推广式(T_1):

推广16(加权推广) 设 P,Q,R 分别位于 $\triangle ABC$ 的三边上,将三角形周界分成 p:

$q:\gamma$(其中 $p+q+\gamma=1$),则

$$QR+PR+PQ\geqslant K(BC+CA+AB) \tag{W_1}$$

其中

$$K=1-\frac{1}{2}\left(\frac{qr}{p}+\frac{rp}{q}+\frac{pq}{r}\right) \tag{11}$$

显然,当 $p=q=r=\frac{1}{3}$ 时,式(W_1)化为式(T_1).

证明 记 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$,依题意有

$$QA+AR=2pS,\quad RB+BP=2qS,\quad PC+CQ=2rS$$

由式(T_1)的证明有

$$\begin{cases}x=QR\geqslant a-(BR\cos B+CQ\cos C)\\ y=PR\geqslant b-(AR\cos A+PC\cos C)\Rightarrow\\ z=PQ\geqslant c-(QA\cos A+BP\cos B)\end{cases}$$

$$x+y+z\geqslant 2S-[(QA+AR)\cos A+(RB+BP)\cos B+(PC+CQ)\cos C]=$$

$$2S[1-(p\cos A+q\cos B+\gamma\cos C)]\geqslant$$

$$2S\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{qr}{p}+\frac{rp}{q}+\frac{pq}{r}\right)\right](\text{应用三角母不等式})\Rightarrow$$

$$x+y+z\geqslant K(a+b+c)$$

即式(W_1)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}PQ\parallel AB,QR\parallel BC,RP\parallel CA\\ p\sin A=q\sin B=r\sin C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\triangle ABC\text{ 为正三角形}\\ p=q=r=\frac{1}{3}\end{cases}$$

观察式(W_1)知,虽然式(W_1)是式(T_1)的一个系数推广,但系数 p,q,r 带有几何色彩,且

$$t=\frac{qr}{p}+\frac{rp}{q}+\frac{pq}{r}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{qr}{p}+\frac{rp}{q}\right)+\left(\frac{rp}{q}+\frac{pq}{r}\right)+\left(\frac{pq}{r}+\frac{qr}{p}\right)\right]\geqslant$$

$$\frac{1}{2}(2r+2p+2q)=1\Rightarrow k=1-\frac{1}{2}t\leqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$x+y+z\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)\geqslant k(a+b+c)$$

可见,此时式(W_1)比式(T_1)弱.

(6)式(T_1)虽然并非最强,但证法也不多见,许多数奥书籍上将式(T_1)削弱成

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{12}(a+b+c)^2 \tag{X'_1}$$

作为例题或习题安排,现在我们建立式(X'_1)的加权推广.

推广 17 设 $\triangle ABC$ 的内接三角形 $\triangle PQR$($QR=x,RP=y,PQ=z$),将其周长三等分,λ,u,v 为正数,则

$$\lambda x^2+uy^2+vz^2\geqslant t(a+b+c)^2 \tag{X_1}$$

其中

$$t=\frac{1}{18}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{uv}{\lambda}+\frac{v\lambda}{u}+\frac{\lambda u}{v}\right)\right] \tag{12}$$

$$\lambda+u+v=1 \tag{13}$$

特别地,当 $\lambda=u=v=\frac{1}{3}$ 时,式(X_1)化为式(X'_1).

从外观上看,式(W_1)与式(X_1)非常相似,简直是"天生一对".

证明 记 $s=a+b+c$,在$\triangle PQR$中应用余弦定理,得

$$\begin{aligned}x^2=RQ^2&=AQ^2+AR^2-2AQ\cdot AR\cos A=\\&(AQ+AR)^2-2AQ\cdot AP(1+\cos A)\geqslant\\&(AQ+AR)^2-\frac{1}{2}(AQ+AR)^2(1+\cos A)=\\&\frac{1}{2}(AQ+AR)^2\cdot(1-\cos A)=\\&\frac{1}{2}\left(\frac{s}{3}\right)^2\cdot(1-\cos A)\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda x^2\geqslant\frac{1}{18}s^2(\lambda-\lambda\cos A)\\&\text{同理}\begin{cases}uy^2\geqslant\frac{1}{18}s^2(u-u\cos B)\\vz^2\geqslant\frac{1}{18}s^2(v-v\cos C)\end{cases}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&\lambda x^2+uy^2+vz^2\geqslant\frac{s^2}{18}\left(\sum\lambda-\sum\lambda\cos A\right)=\\&\frac{s^2}{18}\left(1-\sum\lambda\cos A\right)\geqslant\frac{s^2}{18}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{uv}{\lambda}+\frac{v\lambda}{u}+\frac{\lambda u}{v}\right)\right]\Rightarrow\\&\lambda x^2+uy^2+vz^2\geqslant t(a+b+c)^2\end{aligned}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}AQ=AR,BR=BP,CP=CQ\\\lambda\sin A=u\sin B=v\sin C\end{cases}$$

即$\triangle ABC$为正三角形,且 P,Q,R 分别为三边中点,$\lambda=u=v=\frac{1}{3}$.

(7) 进一步地,推广 17 还可推广成:

推广 18 设 P,Q,R 分别在$\triangle ABC$的三条边上,将周界分成 $p:q:r(p+q+r=1)$,权系数 $\lambda,u,v>0$,则

$$\lambda x^2+uy^2+vz^2\geqslant K(a+b+c)^2 \tag{Y_1}$$

其中

$$K=\frac{1}{2}\left[\sum\lambda p^2-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{uvq^2r^2}{\lambda p^2}\right)\right] \tag{14}$$

特别地,当 $p=q=r=\frac{1}{3}$ 时,式(Y_1)化为式(X_1).

证明 设 $s=\sum a=a+b+c$,则有 $AQ+AR=ps,BR+BP=qs,CP+CQ=\gamma s$,应用

$$x^2 \geqslant \frac{1}{2}(AQ + AR)^2(1 - \cos A) = \frac{1}{2}(ps)^2(1 - \cos A) \Rightarrow$$

$$\text{同理}\left.\begin{cases} \lambda x^2 \geqslant \frac{1}{2}s^2(\lambda p^2 - \lambda p^2\cos A) \\ uy^2 \geqslant \frac{1}{2}s^2(uq^2 - uq^2\cos B) \\ vz^2 \geqslant \frac{1}{2}s^2(vr^2 - vr^2\cos C) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\sum \lambda x^2 \geqslant \frac{1}{2}s^2\left[\sum \lambda p^2 - \left(\sum \lambda p^2\cos A\right)\right] \geqslant$$

$$\frac{1}{2}s^2\left[\sum \lambda p^2 - \frac{1}{2}\sum\left(\frac{uvq^2r^2}{\lambda p^2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\sum \lambda x^2 \geqslant ks^2 = k\left(\sum a\right)^2$$

等号成立仅当

$$\begin{cases} AQ = AR, BR = BP, CP = CQ \\ \lambda p^2\sin A = uq^2\sin B = vr^2\sin C \\ p + q + \gamma = 1, p = q = \gamma \end{cases}$$

即 $\triangle ABC$ 为正三角形，P,Q,R 为三边中点，且 $p = q = \gamma = \frac{1}{3}$，$\lambda = u = v$.

式(X_1)还有一个推广便是：

推广 19 设 P,Q,R 分别在 $\triangle ABC$ 的三条边上，将其周界三等分，权系数 $\lambda,u,v > 0$，$\alpha,\beta,\gamma \in (0,\frac{\pi}{2})$，且 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$，则有

$$\left(\frac{uv}{\sin \alpha}\right)x^2 + \left(\frac{v\lambda}{\sin \beta}\right)y^2 + \left(\frac{u\lambda}{\sin \gamma}\right)z^2 \geqslant M(a + b + c)^2 \tag{Z_1}$$

其中

$$M = \frac{1}{36}\left[\sum \frac{2uv}{\sin \alpha} - \sum\left(\frac{u^2 + v^2}{\tan \alpha}\right)\right] \tag{15}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，P,Q,R 分别为三边上的中点，且 $\lambda = u = v$ 及 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

进一步，还可将推广 18 和推广 19 再度推广到凸多边形的情形.

(8) 那么式(T_1)能否推广到任意凸多边形呢?答案是肯定的，不过，不是十足的直接推广，绕了个“小弯”：

推广 20 设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 的边 A_iA_{i+1} 上的点 $B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 将周界 n 等分，定义 $A_{n+i} \equiv A_i$，$B_{n+i} \equiv B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} B_iB_{i+2} \geqslant 2\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} \tag{16}$$

特别地，当 $n = 3$ 时，式 ⑯ 化为

$$B_1B_3 + B_2B_4 + B_3B_5 \geqslant 2\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4)$$

即

$$B_1B_3+B_2B_1+B_3B_2 \geqslant \frac{1}{2}(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1) \tag{17}$$

这等价于式(T_1).

当 $n=4$ 时,式⑯化为

$$B_1B_3+B_2B_4+B_3B_1+B_4B_2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{4} A_iA_{i+1}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$$

即

$$B_1B_3+B_2B_4 \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_iA_{i+1} \tag{18}$$

当 $n=6$ 时

$$\sum_{i=1}^{6} B_iB_{i+2} \geqslant \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{6} A_iA_{i+1} \tag{19}$$

现在我们证明式⑯.

证明 如图5,过 B_i, B_{i+2} 分别作 A_{i+1}, A_{i+2} 的垂线,垂足为 H_i, H_{i+1},设 $S=\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}$.

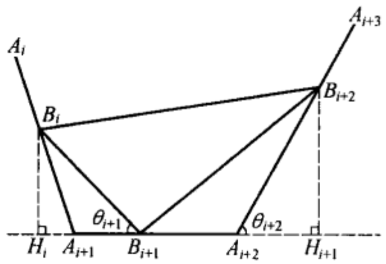


图 5

$$\begin{cases}\angle B_iA_{i+1}H_i=\theta_{i+1}=\pi-\angle A_{i+1}\\ \angle B_{i+2}A_{i+2}H_{i+1}=Q_{i+2}=\pi-\angle A_{i+2}\end{cases}\Rightarrow$$

$B_iB_{i+2} \geqslant H_iH_{i+1}=$

$H_iA_{i+1}+A_{i+1}A_{i+2}+A_{i+2}H_{i+1}=$

$A_{i+1}A_{i+2}+B_iA_{i+1}\cos\theta_{i+1}+B_{i+2}A_{i+2}\cos\theta_{i+2}=$

$A_{i+1}A_{i+2}-B_iA_{i+1}\cos A_{i+1}-A_{i+2}B_{i+2}\cos A_{i+2}\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} B_iB_{i+2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} A_{i+1}A_{i+2}-$

$\sum_{i=1}^{n} B_iA_{i+1}\cos A_{i+1}-\sum_{i=1}^{n} A_{i+2}B_{i+2}\cos A_{i+2}=$

$S-\sum_{i=1}^{n} B_iA_{i+1}\cos A_{i+1}-\sum_{i=1}^{n} A_{i+1}B_{i+1}\cos A_{i+1}=$

$S-\sum_{i=1}^{n}(B_iA_{i+1}+A_{i+1}B_{i+1})\cos A_{i+1}=$

$S-\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{n}\cos A_{i+1}=S-S\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos A_i}{n}\right) \geqslant$

$S-S\cos\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n}\right)=S-S\cos\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)=$

$S+S\cos\frac{2\pi}{n}=2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 S\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} B_iB_{i+2} \geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}$$

即式 ⑯ 成立，等号成立仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形，且 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为各边中点.

(9) 推广 20 中的式 ⑯ 还有一个配对形式是：

推广 21 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是等角多边形当 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边上的点，并将其周界分成 $p_1 : p_2 : \cdots : p_n$，且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. 定义 $B_{n+i} \equiv B_i, A_{n+i} \equiv A_i$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} B_iB_{i+1} \geqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} \tag{⑳}$$

特别地，当 $n = 3$ 时，式 ⑳ 与式(T_1) 等价：

当 $n = 4$ 时，式 ⑳ 化为

$$\sum_{i=1}^{4} B_iB_{i+1} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{i=1}^{4} A_iA_{i+1} \tag{㉑}$$

当 $n = 6$ 时，式 ⑳ 化为

$$\sum_{i=1}^{6} B_iB_{i+1} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i=1}^{6} A_iA_{i+1} \tag{㉒}$$

证明 如图6，设 $A_{i+1}B_i = x, A_{i+1}B_{i+1} = y(1 \leqslant i \leqslant n)$，记

$$L = \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}$$

注意到 $\angle A_i = \frac{n-2}{n}\pi(1 \leqslant i \leqslant n)$，在 $\triangle B_iA_{i+1}B_{i+1}$ 中应用余弦定理有

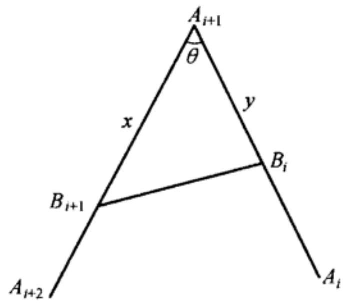


图 6

$$\begin{aligned}
B_iB_{i+1}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\left(\frac{n-2}{n}\pi\right) = \\
&(x+y)^2 - 2xy\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) \geqslant \\
&(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x+y)^2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) = \\
&\frac{1}{2}(x+y)^2(1 + \cos\frac{2\pi}{n}) = \left(p_{i+1}L\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 \Rightarrow \\
&B_iB_{i+1} \geqslant (L\cos\frac{\pi}{n})p_{i+1} \Rightarrow \\
&\sum_{i=1}^{n} B_iB_{i+1} \geqslant \left(L\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} p_{i+1} = L\cos\frac{\pi}{n} = \left(\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}\right)\cos\frac{\pi}{n}
\end{aligned}$$

即式 ⑳ 成立，等号成立仅当 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为多边中点.

最后，我们提出：

猜想：设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 四个面的面积为 S_1,S_2,S_3,S_4，内接四面 $B_1B_2B_3B_4$ 的四个面的面积为 F_1,F_2,F_3,F_4，每个面 $F_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 所在平面截得的小四面体的体积，是原四面体的体积的 1/8，是否有不等式

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geqslant \frac{1}{16}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \tag{㉓}$$

有趣的是,推广 21 还有一个漂亮的推论:

推论 设 P,Q,R 分别在正 $\triangle ABC$ 的三边上,并将其周界三等分,λ,u,v 为正数,$\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$,且 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$,则有

$$(u+v)QR\cdot\tan\alpha+(v+\lambda)RP\cdot\tan\beta+(\lambda+u)PQ\cdot\tan\gamma\geqslant \frac{1}{3}\sqrt{uv+v\lambda+\lambda u}(BC+CA+AB) \quad ㉔$$

提示:记 $L=BC+CA+AB$,从推广 21 有

$$QR\geqslant\frac{1}{3}L\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow(u+v)QR\cdot\tan\alpha\geqslant\frac{1}{6}L(u+v)\tan\alpha\Rightarrow$$

$$\sum(u+v)QR\cdot\tan\alpha\geqslant\frac{1}{6}L\sum(u+v)\tan\alpha(\text{应用杨克昌不等式})\geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left[\left(\sum(uv)\right)\left(\sum\tan\beta\tan\gamma\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot L=$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{uv+v\lambda+\lambda u}\cdot L$$

即得式㉔.

一道西部数学奥林匹克竞赛题的证明与拓广

蒋明斌

1 引 言

2004 年西部数学奥林匹克最后一题为:求证:对任意正实数 a,b,c 都有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ①$$

令 $x=a^2,y=b^2,z=c^2$,则不等式 ① 等价于

$$1<\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ②$$

注 式 ② 右侧的不等式最早是文[1] 的一个猜想,文[2]、[3]、[4]、[5] 先后用不同方法证明它是成立的;式 ② 左侧的不等式是文[6] 给出的一个不等式.

本文将给出 ① 右边不等式的两个证明,从系数、字母个数、指数等方面给出 ① 的推广,推广结论联系着十多道各类数学奥林匹克试题.

2 证 明

② 的左边不等式易证,右边不等式的证明较难,据说当时无一参赛选手证出,命题人给出的参考解答采用的是减元策略,即将三元问题化为二元问题,进而化为一元问题加以解决.

首先,令 $x=\frac{b^2}{a^2},y=\frac{c^2}{b^2},z=\frac{a^2}{c^2},x,y,z>0,xyz=1$,将 ① 化为与其等价的

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2},x,y,z>0,xyz=1 \quad ③$$

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,令 $A=xy$,则 $z=\frac{1}{A},A\leqslant1,z\geqslant1$,由 $yz\geqslant y$,有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}>\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+yz}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}>1$$

为证式 ③ 右边的不等式,先求 $F=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}(x,y>0,xy=A,0<A\leqslant 1)$ 的最大值.

令 $u=\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$,则

$$u=\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}=\sqrt{1+x+y+xy}\geqslant$$
$$\sqrt{1+2\sqrt{xy}+xy}=1+\sqrt{xy}=1+\sqrt{A}$$
$$1+x+y=u^2-A$$
$$F^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)^2=\frac{2+x+y+2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}}{(1+x)(1+y)}=$$
$$\frac{1+u^2-A+2u}{u^2}=(1-A)\frac{1}{u^2}+2\frac{1}{u}+1$$

令 $t=\dfrac{1}{u}$,则 $0<t\leqslant\dfrac{1}{1+\sqrt{A}}$,$F^2=f(t)=(1-A)t^2+2t+1$,而 $f(t)=(1-A)\left(t+\dfrac{1}{1-A}\right)^2-\dfrac{A}{1-A}$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{1+\sqrt{A}}\right]$ 上是增函数,所以

$$f(t)\leqslant f\left(\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right)=\frac{4}{1+\sqrt{A}}$$

故

$$F=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}$$

令 $v=\sqrt{A}$,注意到 $z=\dfrac{1}{A}$,应用刚才所得到的结论有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{A}}}=\frac{2}{1+v}+\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

令 $\dfrac{1}{\sqrt{1+v}}=s\Rightarrow v=\dfrac{1-s^2}{s^2}$,又由柯西不等式有 $\sqrt{2}\sqrt{1+v^2}\geqslant 1+v$,所以

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\frac{\sqrt{2}v}{1+v}=2s+\sqrt{2}s^2\cdot\frac{1-s^2}{s^2}=$$
$$-\sqrt{2}\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

即式 ③ 右边的不等式成立,故式 ① 右边的不等式成立.

注 上述证法着眼于减元,即将三元问题化为二元问题,再化为一元问题,这就预示着,在证明此问题的 n 元推广的相应结论时,可化为证 $n-1$ 元时的相应结论,因而可用数学归纳法加以证明,具体的推广将在后面论及.

下面从整体入手用柯西不等式给出一个简证:

由柯西不等式,有

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)=$$

$$\left(\sqrt{a^2+c^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}+\sqrt{b^2+a^2}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{b}{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}}+\sqrt{c^2+b^2}\cdot\frac{c}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}\right)^2\leqslant$$

$$2(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}+\frac{c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\right)$$

因此,要证式 ① 右边不等式只须证

$$4(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}+\frac{c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\right)\leqslant\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$4(a^2+b^2+c^2)[a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)]\leqslant$$

$$9(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\Leftrightarrow$$

$$8(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\leqslant$$

$$9(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\Leftrightarrow$$

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4\geqslant 6a^2b^2c^2$$

由均值不等式知,后一等式显然成立,因而原不等式成立.

3 推 广

3.1 加权推广

前面已指出,处理此类问题的基本策略是减元,为解决三元加权推广,先解决二元问题.

1.二元情形

命题 1 设 $x,y>0,\lambda=\sqrt{xy}$,则当 $0<\lambda\leqslant 2$ 时

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}} \quad ①$$

当 $2<\lambda<3$ 时

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\leqslant\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}} \quad ②$$

当 $\lambda\geqslant 3$ 时

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\leqslant\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}} \quad ③$$

证明 因为

$$A^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)^2=\frac{2+x+y+2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}}{(1+x)(1+y)}$$

令 $$u=\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}=\sqrt{1+x+y+xy}=\sqrt{1+x+y+\lambda^2}$$

显然 $u \geqslant \sqrt{1+2\sqrt{xy}+\lambda^2} = 1+\lambda, 1+x+y = u^2-\lambda^2$

所以 $A^2 = \dfrac{1+u^2-\lambda^2+2u}{u^2} = (1-\lambda^2)\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{2}{u}+1$

又令 $t=\dfrac{1}{u}, 0<t\leqslant\dfrac{1}{\lambda+1}$,则

$$A^2 = f(t) = (1-\lambda^2)t^2+2t+1, 0<t\leqslant\frac{1}{\lambda+1}$$

(1) 当 $\lambda>1$ 时,$f(t)=(1-\lambda^2)(t-\dfrac{1}{\lambda^2-1})^2+\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2-1}$,注意到$\dfrac{1}{\lambda^2-1}-\dfrac{1}{\lambda+1}=\dfrac{2-\lambda}{\lambda^2-1}$,则

(ⅰ) 若 $1<\lambda\leqslant 2$,则$\dfrac{1}{\lambda^2-1}\geqslant\dfrac{1}{\lambda+1}$,所以 $f(t)$ 在$(0,\dfrac{1}{\lambda+1}]$上是增函数,则 $f(0)<f(t)\leqslant f\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)$,即 $1<f(t)\leqslant\dfrac{4}{\lambda+1}\Leftrightarrow 1<A\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{\lambda+1}}$.

(ⅱ) 若 $\lambda>2$,则$\dfrac{1}{\lambda^2-1}<\dfrac{1}{\lambda+1}$,所以,当 $x=\dfrac{1}{\lambda^2-1}$,$f(t)$ 取最大值 $f\left(\dfrac{1}{\lambda^2-1}\right)=\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2-1}$,而此时 $f(t)$ 是否取最小值,需比较 $f\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)=\dfrac{4}{\lambda+1}$ 与 $f(0)=1$ 的大小,由 $\dfrac{4}{\lambda+1}-1=\dfrac{3-\lambda}{\lambda+1}$ 知

a.若 $\lambda\geqslant 3$,则$\dfrac{4}{\lambda+1}\leqslant 1$,即 $f\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)<f(0)$,所以当 $t=\dfrac{1}{\lambda+1}$ 时 $f(t)$ 取最小值 $\dfrac{4}{\lambda+1}$,故此时 A 的值域为$\left[\dfrac{2}{\sqrt{\lambda+1}},\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right]$;

b.若 $2<\lambda<3$,则$\dfrac{4}{\lambda+1}>1$,即 $f\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)>f(0)$,$f(t)>f(0)=1$ 且 $f(t)\to f(0)=1$,故此时 A 的值域为$\left(1,\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right]$.

(2) 当 $\lambda=1$ 时,$f(t)=2t+1, t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$,所以 $1<f(t)\leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$,即此时 A 的值域为$(1,\sqrt{2}]$.

(3) 当 $0<\lambda<1$ 时

$$f(t)=(1-\lambda^2)\left(t-\frac{1}{\lambda^2-1}\right)^2+\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}, t\in\left(0,\frac{1}{\lambda+1}\right]$$

因$\dfrac{1}{\lambda^2-1}<0$,所以 $f(t)$ 在$\left(0,\dfrac{1}{\lambda+1}\right]$上是增函数,则 $f(0)<f(t)\leqslant f\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)$,即 $1<f(t)\leqslant\dfrac{4}{\lambda+1}\Leftrightarrow 1<A\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{\lambda+1}}$,故此时 A 的值域为$\left(1,\dfrac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\right]$.

综上所述,当 $0<\lambda\leqslant 2$ 时,A 的值域为$\left(1,\dfrac{2}{\sqrt{\lambda+1}}\right]$;当 $2<\lambda<3$ 时,A 的值域为

$\left(1,\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right]$；当 $\lambda\geqslant 3$ 时，A 的值域为 $\left[\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}},\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right]$，即①，②，③成立. 命题1证毕.

2. 三元加权推广

命题2 设 $x,y,z>0,\lambda=\sqrt[3]{xyz}$，则

(1) 当 $\lambda\geqslant 8$ 时，有

$$\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}<2 \quad ④$$

(2) 当 $8>\lambda>\frac{5}{4}$ 时，有

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}<2 \quad ⑤$$

(3) 当 $\frac{5}{4}\geqslant\lambda>0$ 时，有

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \quad ⑥$$

注 当 $\lambda=1$ 时，令 $x=\frac{b^2}{a^2},y=\frac{c^2}{b^2},z=\frac{a^2}{c^2}$，由不等式⑥即得不等式①.

很显然，命题2等价于如下的：

命题3 设 $x,y,z>0,\lambda=\sqrt[3]{xyz}$，则

(1) 当 $\lambda\geqslant 8$ 时，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \quad ⑦$$

当 $8>\lambda>0$ 时，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}>1 \quad ⑧$$

且此时下界不可再改进.

(2) 当 $0<\lambda\leqslant\frac{5}{4}$ 时，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \quad ⑨$$

当 $\frac{5}{4}<\lambda$ 时，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}<2 \quad ⑩$$

且此时上界不可再改进.

注 当 $\lambda\geqslant 8$ 时，作变换：$x\to\lambda\cdot\frac{bc}{a^2},y\to\lambda\cdot\frac{ca}{b^2},z\to\lambda\cdot\frac{ab}{c^2}$，则不等式⑦等价于

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}},a,b,c>0 \quad ⑪$$

特别地,当 $\lambda = 8$ 时,由 ⑪ 即得第 42 届国际数学奥林匹克第二题(简称为 IMO42 - 2):

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1 \tag{12}$$

所以不等式 ⑪ 是 IMO42 - 2 的推广,国内最早出现在文[7].《美国数学月刊》问题栏曾作为数学问题第 10944 题[8].不等式 ⑫ 引起广大同行的广泛关注,近年来发表涉及不等式 ⑫ 的研究文章数十篇,其中包括本文作者的一些工作[9~11].

式 ⑦ 显然等价于

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}} \tag{13}$$

其中 $a,b,c>0,abc=\lambda^3\geqslant 2^9=8^3$.这是 2004 年中国台湾数学奥林匹克第 4 题.

此外,在不等式 ⑩ 中,取 $\lambda = 8$,并作变换:$x\to\frac{bc}{a^2},y\to\frac{ca}{b^2},z\to\frac{ab}{c^2}$,可得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}<2,a,b,c>0$$

这是《中等数学》2004 年第 6 期“数学奥林匹克问题” 第 144 题.

证明 (1) 当 $\lambda\geqslant 8$ 时,由注记知,要证不等式 ⑦,只须证明其等价不等式 ⑪,笔者在文[12] 中用柯西不等式给出了一个证明,这里我们用减元策略给出另一证明.

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,若 $0<\sqrt{xy}<3$,由命题 1 有 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}>1$,注意到 $\lambda\geqslant 8\Leftrightarrow 1\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$,所以

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}>\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}>1\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

若 $\sqrt{xy}\geqslant 3$,由 $x\leqslant y\leqslant z$ 及 $\lambda=\sqrt[3]{xyz}$ 有 $z\geqslant\lambda\Rightarrow\sqrt{z\lambda}\geqslant\lambda\geqslant 8>3,\sqrt{\sqrt{xy}\sqrt{z\lambda}}=\lambda\geqslant 8>3$,所以对 (x,y),(z,λ) 及 $(\sqrt{xy},\sqrt{z\lambda})$ 应用命题 1 的不等式 ③ 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right)-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\geqslant$$

$$\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}+\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{z\lambda}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\geqslant\frac{2\times 2}{\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{xyz\lambda}}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}=\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

故不等式 ⑦ 成立.

对 $\lambda = 8$ 应用不等式 ⑦,有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\geqslant 1,x,y,z>0,\sqrt[3]{xyz}=8 \tag{14}$$

当 $0<\lambda<8$ 时,令 $x=\lambda x_1,y=\lambda y_1,z=\lambda z_1,x_1y_1z_1=1$,那么

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda y_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda z_1}}>$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z_1}}\geqslant 1$$

(最后一步应用了不等式 ⑭),故不等式 ⑧ 成立.

此时,令 $x=y=\frac{1}{t}$,$z=t^2$,当 $t\to 0$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}=\frac{2t}{\sqrt{1+t}}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\to 1$$

说明式 ⑧ 左边的下界不可再改进.

(2) 当 $0<\lambda\leqslant\frac{5}{4}$ 时,注意到 $x\leqslant y\leqslant z$ 及 $xyz=\lambda^3$,有

$$z\geqslant\lambda\Rightarrow 0<xy\leqslant\lambda^2\Leftrightarrow 0<\sqrt{xy}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5}{4}<2$$

应用命题 1 的不等式 ① 并注意到 $z=\frac{\lambda^3}{xy}$,有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^3}{xy}}}$$

要证 ⑨,只须证

$$\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}+\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy+\lambda^3}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{15}$$

令 $\sqrt{1+\sqrt{xy}}=u$,则 $1<u\leqslant\sqrt{1+\lambda}$,$xy=(u^2-1)^2$,不等式 ⑮ 等价于

$$\frac{2}{u}+\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-1)^2+\lambda^3}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{16}$$

由柯西不等式,有

$$[(u^2-1)^2+\lambda^3](1+\lambda)\geqslant(u^2-1+\lambda^2)^2$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{(u^2-1)^2+\lambda^3}}\leqslant\frac{\sqrt{1+\lambda}}{u^2-1+\lambda^2}$$

因此,要证不等式 ⑯ 只须证

$$\begin{aligned}\frac{2}{u}+\frac{\sqrt{1+\lambda}(u^2-1)}{u^2-1+\lambda^2}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}\Leftrightarrow&\\ &2\sqrt{1+\lambda}(u^2-1+\lambda^2)+(1+\lambda)u(u^2-1)\leqslant\\ &3u(u^2-1+\lambda^2)\Leftrightarrow\\ &(\lambda-2)u^3+2\sqrt{\lambda+1}u^2-(3\lambda^2+\lambda-2)u+\\ &2(\lambda^2-1)\sqrt{\lambda+1}\leqslant 0\Leftrightarrow\\ &(\lambda-2)(u-\sqrt{\lambda+1})^2\left[u+\frac{2(\lambda-1)\sqrt{\lambda+1}}{\lambda-2}\right]\leqslant 0\end{aligned} \tag{17}$$

由 $0<\lambda\leqslant\frac{5}{4}$,有

$$\left(\frac{2(\lambda-1)\sqrt{\lambda+1}}{\lambda-2}\right)^2-1=\frac{4\lambda^2(\lambda-\frac{5}{4})}{(\lambda-2)^2}\leqslant 0\Leftrightarrow\left|\frac{2(\lambda-1)\sqrt{\lambda+1}}{\lambda-2}\right|\leqslant 1$$

而 $u>1$,所以 $u+\frac{2(\lambda-1)}{\lambda-2}\sqrt{\lambda+1}>0$,又 $(u-\sqrt{\lambda+1})^2\geqslant 0,\lambda-2<0$,故不等式 ⑰ 成立,从而不等式 ⑨ 成立.

对 $\lambda=\frac{5}{4}$ 应用不等式 ⑨,有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant 2,x,y,z>0,\sqrt[3]{xyz}=\frac{5}{4} \tag{18}$$

当 $\lambda>\frac{5}{4}$ 时,令 $x=\lambda x_1,y=\lambda y_1,z=\lambda z_1,x_1y_1z_1=1$,那么

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda y_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda z_1}}<$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{4}x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{4}y_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{4}z_1}}\leqslant 2$$

即不等式 ⑩ 成立.

此时,令 $x=y=\frac{1}{t},z=t^2$,当 $t\to+\infty$ 时,$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\to 2$,说明式 ⑩ 左边的上界不可再改进,故命题 3 得证.

3.2 元数推广

在这一节,将命题 3 推广到 n 个字母的情形

命题 4 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3),x_1x_2\cdots x_n=\lambda^n$,则

(1) 当 $\lambda\geqslant n^2-1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{19}$$

当 $0<\lambda<n^2-1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}>1 \tag{20}$$

且此时下界不可再改进.

(2) 当 $0<\lambda\leqslant\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{21}$$

当 $\lambda>\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}<n-1 \tag{22}$$

且此时上界不可再改进.

证明　不等式 ⑲、㉑ 均可以用数学归纳法证明,证明过程很相似.这里我们用权方和不等式证 ⑲,用数学归纳法证明 ㉑.

(1) 当 $\lambda \geqslant n^2 - 1$ 时,令 $x_i = \lambda \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_i^n}$, $a_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n, n \geqslant 3)$,则 ⑲ 等价于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a_i^n + \lambda a_1 a_2 \cdots a_n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{1+\lambda}} \tag{㉓}$$

应用权方和不等式:设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,n)$, $m > 0$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^m} \tag{㉔}$$

有 $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a_i^n + \lambda a_1 a_2 \cdots a_n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(a_i^{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(a_i^n + \lambda a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n + n\lambda a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{2}}}$$

要证 ㉓ 只须证

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n + n\lambda a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{1+\lambda}} \Leftrightarrow (1+\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{n}{3}}\right)^3 \geqslant n^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n\lambda a_1 a_2 \cdots a_n\right) \tag{㉕}$$

将 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{n}{3}}\right)^3$ 展开,并用平均值不等式可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{n}{3}}\right)^3 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^n + (n^3 - n) a_1 a_2 \cdots a_n$$

因此要证 ㉕ 只须证

$$(1+\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^n + (n^3 - n) a_1 a_2 \cdots a_n\right] \geqslant n^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n\lambda a_1 a_2 \cdots a_n\right) \Leftrightarrow$$

$$(1 + \lambda - n^2)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n - n a_1 a_2 \cdots a_n\right) \geqslant 0 \tag{㉖}$$

由 $\lambda \geqslant n^2 - 1$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n \geqslant n a_1 a_2 \cdots a_n$ 知不等式 ㉖ 成立,故式 ⑲ 成立.

对 $\lambda = n^2 - 1$ 应用不等式 ⑲ 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+x_n}} \geqslant 1 \tag{㉗}$$

(其中 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = n^2 - 1$) 当 $0 < \lambda < n^2 - 1$ 时,令 $x_i = \lambda b_i$, $b_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,

$b_1b_2\cdots b_n=1$,则

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda b_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda b_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda b_n}}>$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)b_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)b_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)b_n}}\geqslant 1$$

(后一步应用了不等式 ㉗).

即不等式 ⑳ 成立.

此时,令 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=t$,$a_n=\frac{1}{t^{n-1}}$,当 $t\to+\infty$ 时,式 ⑳ 左边 $=\frac{n-1}{\sqrt{1+t}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^{n-1}}}}\to 1$,说明式 ⑳ 左边的上界不可再改进.

(2) 当 $0<\lambda\leqslant\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$ 时,当 $k=3$ 时,由命题 3 的 ⑨ 知不等式 ㉑ 成立.

假设 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,不等式 ㉑ 成立,那么当 $n=k+1$ 时,$x_1x_2\cdots x_{n+1}=\lambda^{n+1}$,设 $x=\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}$,则 $x_{k+1}=\frac{\lambda^{n+1}}{x^k}$,不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{k+1}$,则

$$x=\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}\leqslant\sqrt[k]{x_{k+1}^k}=x_{k+1}=\frac{\lambda^{n+1}}{x^k}\Rightarrow x^{k+1}\leqslant\lambda^{n+1}\Rightarrow x\leqslant\lambda$$

由 $k>3$ 有

$$x\leqslant\lambda\leqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^2-1<\left(\frac{k}{k-1}\right)^2-1$$

对 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 应用归纳假设,有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_k}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_{k+1}}}\leqslant$$
$$\frac{k}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_{k+1}}}=\frac{k}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{x^k}{x^k+\lambda^{k+1}}}$$

需证明,当 $0<x\leqslant\lambda\leqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^2-1$ 时,有

$$\frac{k}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{x^k}{x^k+\lambda^{k+1}}}\leqslant\frac{k+1}{\sqrt{1+x}} \tag{㉘}$$

令
$$f(x)=\frac{k}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{x^k}{x^k+\lambda^{k+1}}},x\in(0,\lambda]$$

$$f'(x)=-\frac{k}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{k}{2}x^{\frac{k-2}{2}}(x^k+\lambda^{k+1})^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{k}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^k+\lambda^{k+1})^{-\frac{3}{2}}kx^{k-1}=$$
$$\frac{k}{2}\left[\frac{\lambda^{k+1}x^{\frac{k-2}{2}}}{(x^k+\lambda^{k+1})^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

注意到函数 $x^{\frac{3}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,所以当 $a,b>0$ 时 $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$ 与 $a-b$ 的符

号相同，由此可知 $f'(x)$ 与 $\dfrac{\lambda^{\frac{2k+2}{3}}x^{\frac{k-2}{3}}}{x^k+\lambda^{k+1}}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{\lambda^{\frac{2k+2}{3}}x^{\frac{k-2}{3}}(1+x)-x^k-\lambda^{k+1}}{(x^k+\lambda^{k+1})(1+x)}(x\in(0,\lambda])$ 的符号相同，令 $g(x)=\lambda^{\frac{2k+2}{3}}x^{\frac{k-2}{3}}(1+x)-x^k-\lambda^{k+1}(x\in(0,r])$，则 $f'(x)$ 与 $g(x)$ 的符号相同.

$$g'(x)=\frac{k+1}{3}\lambda^{\frac{2k+2}{3}}x^{\frac{k-2}{3}}+\frac{k-2}{3}\lambda^{\frac{2k+2}{3}}x^{\frac{k-5}{3}}-kx^{k-1}=$$

$$\frac{1}{3}x^{\frac{k-5}{3}}[(k+1)\lambda^{\frac{2k+2}{3}}x+(k-2)\lambda^{\frac{2k+2}{3}}-3kx^{\frac{2k+2}{3}}]$$

显然 $g'(x)$ 与 $h(x)=(k+1)\lambda^{\frac{2k+2}{3}}x+(k-2)\lambda^{\frac{2k+2}{3}}-3kx^{\frac{2k+2}{3}}(x\in(0,\lambda])$ 的符号相同，$h'(x)=(k+1)\lambda^{\frac{2k+2}{3}}-k(2k+2)x^{\frac{2k-1}{3}}$，令 $h'(x)=0$ 得 $x_0=\lambda\cdot\left(\dfrac{\lambda}{2k}\right)^{\frac{3}{2k-1}}$，由 $0<\lambda<2<2k\Rightarrow 0<\dfrac{\lambda}{2k}<1$ 及 $\dfrac{3}{2k-3}>0$，有 $0<x_0<\lambda$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(x_0,\lambda)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上严格递增，在 (x_0,λ) 上严格递减.

又

$$\lim_{x\to 0^+}h(x)=(k-2)\lambda^{\frac{2k+2}{3}}\geqslant 0,h(\lambda)=(k+1)\lambda^{\frac{2k+2}{3}}(\lambda-2)<0$$

所以 $h(x)$ 在 $(0,\lambda)$ 有唯一实根 x_1，即 $h(x_1)=0\Rightarrow g'(x_1)=0$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h(x)>0\Rightarrow g'(x)>0$；当 $x\in(x_1,\lambda)$ 时，$h(x)<0\Rightarrow g'(x)<0$. 所以 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上严格递增，在 (x_1,λ) 上严格递减.

注意到 $g(\lambda)=0$，下面分 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\geqslant 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)<0$ 两种情形：

a. 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\geqslant 0$，则当 $x\in(0,x_1)$ 时，由 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上严格递增，有 $g(x)>\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\geqslant 0$，当 $x\in(x_1,\lambda)$ 时，由 $g(x)$ 在 (x_1,λ) 上严格递减有 $g(x)>g(\lambda)=0$，因此，当 $x\in(0,\lambda)$ 时，总有 $g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\lambda]$ 是增函数，于是 $f(x)\leqslant f(\lambda)=\dfrac{k+1}{\sqrt{1+\lambda}}$.

b. 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,\lambda)$ 有唯一实根 x_2，即 $g(x_2)=0\Rightarrow f'(x_2)=0$，当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$；当 $x\in(x_2,\lambda)$ 时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上严格递减，在 (x_2,λ) 上严格递减.

所以，当 $x\in(0,x_2)$ 有 $f(x)<\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=k$；当 $x\in(x_2,\lambda]$ 有

$$f(x)\leqslant f(\lambda)=\frac{k+1}{\sqrt{1+\lambda}}$$

注意到

$$0<\lambda\leqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^2-1\Rightarrow k\leqslant\frac{k+1}{\sqrt{1+\lambda}}$$

所以对 $x\in(0,\lambda)$ 总有 $f(x)\leqslant\dfrac{k+1}{\sqrt{1+\lambda}}$.

从而不等式 ㉘ 成立，即当 $n=k+1$ 时，不等式 ㉑ 成立.

故对一切自然数 $n\geqslant 3$ 不等式㉑成立.

当 $\lambda=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$ 时,应用㉑有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}\leqslant n-1\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1\right) \quad ㉙$$

当 $\lambda>\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$ 时,令 $x_i=\lambda b_i,b_i>0(i=1,2,\cdots,n),b_1b_2\cdots b_n=1$,则

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda b_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda b_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda b_n}}<$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1\right]b_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1\right]b_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1\right]b_n}}\leqslant$$

$$n-1$$

后一步应用了不等式㉙.

故不等式㉒成立.

此时,令 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=t,a_n=\frac{1}{t^{n-1}}$,当 $t\to 0$ 时,式㉒左边 $=\frac{n-1}{\sqrt{1+t}}+\frac{\sqrt{t^{n-1}}}{\sqrt{t^{n-1}+1}}\to n-1$,说明式㉒左边的上界不可再改进.命题4证毕.

注 (1)应用式㉒很容易解决2003年中国数学奥林匹克中的一个题目:

给定正整数 $n(n\geqslant 3)$,求最小的正数 λ 使得对于任何 $\theta_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)(i=1,2,\cdots,n)$,只要 $\tan\theta_1\tan\theta_2\cdots\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}}$,就有 $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n\leqslant\lambda$.

事实上,令 $t_i=\tan\theta_i$,问题等价于求最小的正数 λ 使得对于满足 $t_1t_2\cdots t_n=2^n$ 的正实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,都有 $\frac{1}{\sqrt{1+t_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+t_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+t_n}}\leqslant\lambda$.由式㉒知 $\lambda=n-1$.

(2)在命题4中取 $\lambda=n^2-1,x_i=(n^2-1)\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i^n},a_i>0(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$,可得2004年中国奥林匹克协作体夏令营测试题($A$ 水平)第4题:设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$,求证:

$$1\leqslant\frac{\sqrt{a_1^{n-1}}}{\sqrt{a_1^{n-1}+(n^2-1)a_2a_3\cdots a_n}}+\frac{\sqrt{a_2^{n-1}}}{\sqrt{a_2^{n-1}+(n^2-1)a_1a_3\cdots a_n}}+\cdots+$$

$$\frac{\sqrt{a_n^{n-1}}}{\sqrt{a_1^{n-1}+(n^2-1)a_1a_2\cdots a_{n-1}}}<n-1$$

(3)在命题4中取 $n=4$,由㉑很容易解决如下的2005年中国国家队培训题:求所有的正实数 a,使得对满足 $t_1t_2t_3t_4=a^4$ 的任意正实数 t_1,t_2,t_3,t_4 都有

$$\frac{1}{\sqrt{1+t_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+t_2}}+\frac{1}{\sqrt{1+t_3}}+\frac{1}{\sqrt{1+t_4}}\leqslant\frac{4}{\sqrt{1+a}}$$

由㉑得 $0 < a \leqslant \frac{7}{9}$.

3.3 指数推广

更一般的问题是探讨 $\frac{1}{(1+x_1)^\alpha} + \frac{1}{(1+x_2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(1+x_n)^\alpha}$ 的上下界,上一节的命题4解决了 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的情形,本节将解决 $\alpha = 2$、$\alpha = 1$ 两种情形,并对一般情形给出猜测.

1. 指数 $\alpha = 2$

命题5 对 $x, y > 0, \lambda = \sqrt{xy}$,则

(1) 当 $0 < \lambda \leqslant \sqrt{2} - 1$ 时,有

$$\frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2} \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \leqslant \frac{2}{(1+\lambda)^2} \tag{30}$$

(2) 当 $\sqrt{2} - 1 < \lambda < \frac{1}{2}$ 时,有

$$\frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2} \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} < 1 \tag{31}$$

(3) 当 $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ 时,有

$$\frac{2}{(1+\lambda)^2} \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} < 1 \tag{32}$$

证明 $f = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{2+2(a+b)+a^2+b^2}{(1+a)^2(1+b)^2} =$

$$\frac{1+2(a+b)+(a+b)^2+1-2ab}{(1+a+b+ab)^2} = \frac{(1+a+b)^2+1-2ab}{(1+a+b+ab)^2}$$

令 $t = 1 + a + b + ab$,则

$t \geqslant 1 + 2\sqrt{ab} + ab = (1+\sqrt{ab})^2 = (1+\lambda)^2, 1 + a + b = t - ab = t - \lambda^2$

$$f = \frac{(t-\lambda^2)^2+1-2\lambda^2}{t^2} = \frac{t^2-2\lambda^2 t+\lambda^4+1-2\lambda^2}{t^2} = (\lambda^2-1)^2\frac{1}{t^2} - 2\lambda^2\frac{1}{t} + 1$$

又令 $\frac{1}{t} = x$,则

$$0 < x \leqslant \frac{1}{(\lambda+1)^2}, f = f(x) = (\lambda^2-1)^2x^2 - 2\lambda^2x + 1$$

(1) 当 $\lambda = 1$ 时,$f = f(x) = 1 - 2x, x \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$,其值域为 $[\frac{1}{2}, 1)$.

(2) 当 $\lambda \neq 1$ 时

$$f = f(x) = (\lambda^2-1)^2\left[x - \frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}\right]^2 + \frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}, x \in \left(0, \frac{1}{(\lambda+1)^2}\right]$$

由

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2} = \frac{1}{(\lambda+1)^2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

(i) 当 $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}$ 时,$\frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2} \leqslant \frac{1}{(\lambda+1)^2}$,所以当 $x = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$,$f(x)$ 取最小值

$\frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$.

为求最大值或上界，需比较 $f(0)=1$ 与 $f(\frac{1}{(\lambda+1)^2})=\frac{2}{(\lambda+1)^2}$ 的大小.

a. 当$\sqrt{2}-1\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由

$$\frac{2}{(\lambda+1)^2}>1\Leftrightarrow f(1)<f(\frac{1}{(\lambda+1)^2})$$

有

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right)=\frac{2}{(\lambda+1)^2}$$

故此时 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2},\frac{2}{(\lambda+1)^2}\right]$.

b. 当 $0<\lambda<\sqrt{2}-1$ 时，由

$$f(0)=1>\frac{2}{(1+\lambda)^2}=f\left(\frac{2}{(1+\lambda)^2}\right),f(x)<\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$$

故此时 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2},1\right)$.

(ii) 当 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时，由 $\frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}>\frac{1}{(\lambda+1)^2}$，知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right]$ 是减函数，所以

$$f(0)>f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right)\Leftrightarrow 1>f(x)\geqslant\frac{2}{(\lambda+1)^2}$$

当 $a=b$ 时，$f(x)=\frac{2}{(1+\lambda)^2}$.

故此时 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{2}{(\lambda+1)^2},1\right)$.

综上所述，$0<\lambda\leqslant\sqrt{2}-1$ 时，$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}$ 的值域为 $\left[\frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2},\frac{2}{(1+\lambda)^2}\right]$；

当$\sqrt{2}-1<\lambda<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}$ 的值域为 $\left[\frac{1-2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2},1\right)$；

当 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}$ 的值域为 $\left[\frac{2}{(1+\lambda)^2},1\right)$

命题 5 证毕.

命题 6 设 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3,\lambda=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，则

(1) 当 $\lambda\geqslant\sqrt{n}-1$ 时，有

$$\frac{1}{(1+x_1)^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^2}\geqslant\frac{n}{(1+\lambda)^2} \quad ㉝$$

当 $0<\lambda<\sqrt{n}-1$ 时，有

$$\frac{1}{(1+x_1)^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^2}>1 \quad ㉞$$

且此时的上界不可以再改进.

(2) 当 $0<\lambda\leqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1$ 时，有

$$\frac{1}{(1+x_1)^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^2}\leqslant\frac{n}{(1+\lambda)^2} \quad ㉟$$

当 $\lambda>\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1$,有

$$\frac{1}{(1+x_1)^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^2}<n-1 \quad ㊱$$

且此时的上界不可以再改进.

注 由于㉝与㉟的证明完全类似,㉞又可由㉝证得,这里我们只证㉟、㊱.

证明 (1) 当 $0<\lambda\leqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1$ 时,用数学归纳法证明㉟.

当 $n=2$ 时,$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$,由命题5的式㉚有

$$\frac{1}{(1+x_1)^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}\leqslant\frac{2}{(1+\lambda)^2}$$

即 $n=2$ 时不等式㉟成立.

假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 不等式㉟成立,那么当 $n=k+1$ 时,$x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}=\lambda^{k+1}$,不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k$,$x=\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}$,那么 $x_{k+1}=\frac{\lambda^{k+1}}{x^k}$,又

$$x=\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}\leqslant\sqrt[k]{x_{k+1}x_{k+1}\cdots x_{k+1}}=x_{k+1}=\frac{\lambda^{k+1}}{x^k}\Rightarrow x^{k+1}\leqslant\lambda^{k+1}\Rightarrow x\leqslant\lambda$$

而
$$0<r\leqslant\sqrt{\frac{k+1}{k}}-1<\sqrt{\frac{k}{k-1}}-1$$

所以 $0<x<\sqrt{\frac{k}{k-1}}-1$ 且 $x=\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}$,对 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 应用归纳假设有

$$\frac{1}{(1+x_1)^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+x_k)^2}+\frac{1}{(1+x_{k+1})^2}\leqslant$$
$$\frac{k}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x_{k+1})^2}=\frac{k}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+\frac{\lambda^{k+1}}{x^k})^2}=\frac{k}{(1+x)^2}+\frac{x^{2k}}{(x^k+\lambda^{k+1})^2}$$

下面证明:当 $0<x\leqslant\lambda<\sqrt{\frac{k+1}{k}}-1$ 时,有

$$\frac{k}{(1+x)^2}+\frac{x^{2k}}{(x^k+\lambda^{k+1})^2}\leqslant\frac{k+1}{(1+\lambda)^2} \quad ㊲$$

令
$$f(x)=\frac{k}{(1+x)^2}+\frac{x^{2k}}{(x^k+\lambda^{k+1})^2},x\in(0,\lambda],\lambda\leqslant\sqrt{\frac{k+1}{k}}-1$$

$$f'(x)=-\frac{2k}{(1+x)^3}+\frac{2kx^{2k-1}}{(x^k+\lambda^{k+1})^2}-\frac{2kx^{3k-1}}{(x^k+\lambda^{k+1})^3}=-\frac{2k}{(1+x)^3}+\frac{2k\lambda^{k+1}x^{2k-1}}{(x^k+\lambda^{k+1})^3}=$$
$$2k\frac{(x^{k+1}-\lambda^{k+1})[\lambda^{k+1}(x^{k+1}+3x^k+\lambda^{k+1})-x^{2k-1}]}{(1+x)^3(x^k+\lambda^{k+1})^3}=$$
$$\frac{2kx^{k+1}(x^{k+1}-\lambda^{k+1})}{(1+x)^3(x^k+\lambda^{k+1})^3}\left(\lambda^{k+1}+\frac{3\lambda^{k+1}}{x}+\frac{\lambda^{2k+2}}{x^{k+1}}-x^{k-2}\right)$$

由 $0 < x \leqslant \lambda, k+1 > 0$,有 $x^{k+1} - \lambda^{k+1} \leqslant 0$,令 $g(x) = \lambda^{k+1} + \dfrac{3\lambda^{k+1}}{x} + \dfrac{\lambda^{2k+2}}{x^{k+1}} - x^{k-2}$,$x \in (0,\lambda]$,显然 $g(x)$ 在$(0,\lambda]$是减函数,注意到$0 < \lambda \leqslant \sqrt{\dfrac{k+1}{k}} - 1 < \sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1 < \dfrac{1}{2}$,有

$$g(\lambda) = 2\lambda^{k+1} + 3\lambda^k - \lambda^{k-2} = 2\lambda^{k-2}(\lambda+1)^2(\lambda - \frac{1}{2}) < 0$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \to +\infty$,所以 $g(x)$ 在$(0,\lambda]$有唯一实根 x_0,当 $x = x_0$ 时,$g(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$;当 $0 < x < x_0$ 时,$g(x) > g(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$;当 $x_0 < x < \lambda$ 时,$g(x) < g(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

因此,$f(x)$ 在$(0,x_0]$上是减函数

$$f(x) < \lim_{x \to 0^+} g(x) = k \leqslant \frac{k+1}{(1+\lambda)^2}(\text{因为} 0 < \lambda \leqslant \sqrt{\frac{k+1}{k}} - 1)$$

$f(x)$ 在$[x_0,\lambda]$上是增函数

$$f(x) \leqslant f(\lambda) = \frac{k}{(1+\lambda)^2} + \frac{\lambda^{2k}}{(\lambda^k + \lambda^{k+1})^2} = \frac{k+1}{(1+\lambda)^2}$$

所以在$(0,\lambda]$总有 $f(x) \leqslant \dfrac{k+1}{(1+\lambda)^2}$,即㊲成立,这就证明了当 $n = k+1$ 不等式㉟成立.

故对一切自然数 $n(n \geqslant 2)$ 不等式㉟成立.

(2) 对 $r = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} - 1$ 应用㉟有

$$\frac{1}{(1+x_1)^2} + \frac{1}{(1+x_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+x_n)^2} \leqslant n - 1(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1) \quad ㊳$$

所以当 $\lambda > \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} - 1$ 时,令 $x_i = \lambda b_i, b_i > 0(i = 1,2,\cdots,n), b_1b_2\cdots b_n = 1$,则

$$\frac{1}{(1+x_1)^2} + \frac{1}{(1+x_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+x_n)^2} =$$

$$\frac{1}{(1+\lambda b_1)^2} + \frac{1}{(1+\lambda b_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\lambda b_n)^2} <$$

$$\frac{1}{\left[1+\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1\right)b_1\right]^2} + \frac{1}{\left[1+\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1\right)b_2\right]^2} + \cdots +$$

$$\frac{1}{\left[1+\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1\right)b_n\right]^2} \leqslant n - 1$$

最后一步应用了不等式㊳.

故不等式㊱成立.

此时,令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = t, a_n = \dfrac{1}{t^{n-1}}$,当 $t \to 0$ 时,式㊱左边 $= \dfrac{n-1}{(1+t)^2} +$

$\dfrac{1}{(1+\frac{1}{t^{n-1}})^2} \to n-1$,说明式㊱左边的上界不可再改进.

注　在命题6中取 $n=4,\lambda=1$,显然满足 $\lambda \geqslant \sqrt{n}-1$,由㉝即得2005年中国数学奥林匹克国家集训队测验(一)第6题:设 $a,b,c,d>0$,且 $abcd \geqslant 1$,求证

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geqslant 1$$

2. 指数 $\alpha=1$

命题7　设 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3,\lambda=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$,则

(1) 当 $\lambda \geqslant n-1$ 时,有

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\lambda} \tag{39}$$

当 $0<\lambda<n-1$ 时,有

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n} > 1 \tag{40}$$

(2) 当 $0<\lambda \leqslant \frac{n}{n-1}-1$ 时,有

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\lambda} \tag{41}$$

当 $\lambda > \frac{n}{n-1}-1$ 时,有

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n} < n-1 \tag{42}$$

证明　(1) 令 $x_i=\lambda\dfrac{y_1y_2\cdots y_n}{y_i^n},y_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则㊴等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^n}{y_i^n+\lambda y_1y_2\cdots y_n} \geqslant \frac{n}{1+\lambda},\lambda \geqslant n-1 \tag{43}$$

由柯西不等式,有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^n}{y_i^n+\lambda y_1y_2\cdots y_n} \geqslant \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{n/2})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^n+\lambda n y_1y_2\cdots y_n}$$

因此,要证㊸只须证

$$\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{n/2})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^n+\lambda n y_1y_2\cdots y_n} \geqslant \frac{n}{1+\lambda} \Leftrightarrow (1+\lambda)(\sum_{i=1}^{n}y_i^{n/2})^2 \geqslant n\sum_{i=1}^{n}y_i^n+n^2\lambda y_1y_2\cdots y_n \tag{44}$$

将 $(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{n/2})^2$ 展开,并用平均值不等式可得

$$(\sum_{i=1}^{n}y_i^{n/2})^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}y_i^n+(n^2-n)y_1y_2\cdots y_n$$

因而要证 ㊹ 只须证

$$(1+\lambda)(\sum_{i=1}^{n}y_i^n+(n^2-n)y_1y_2\cdots y_n)\geqslant n\sum_{i=1}^{n}y_i^n+n^2\lambda y_1y_2\cdots y_n\Leftrightarrow$$

$$(1+\lambda-n)(\sum_{i=1}^{n}y_i^n-ny_1y_2\cdots y_n)\geqslant 0$$

这由 $\lambda\geqslant n-1$ 及 $\sum_{i=1}^{n}y_i^n\geqslant ny_1y_2\cdots y_n$ 知后一不等式成立,故不等式 ㊴ 成立.对 $\lambda=n-1$ 应用 ㊴ 有

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant 1(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=n-1)$$

所以当 $0<\lambda<n-1$ 时,令 $x_i=\lambda b_i,b_i>0(i=1,2,\cdots,n),b_1b_2\cdots b_n=1$,则

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=\frac{1}{1+\lambda b_1}+\frac{1}{1+\lambda b_2}+\cdots+\frac{1}{1+\lambda b_n}>$$

$$\frac{1}{1+(n-1)b_1}+\frac{1}{1+(n-1)b_2}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)b_n}\geqslant 1$$

即 ㊵ 成立.

(2) 当 $0<\lambda\leqslant\frac{n}{n-1}-1$ 时,因为 $\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\lambda}$,由 $\lambda\leqslant\frac{n}{n-1}-1=\frac{1}{n-1}$ 知 $\frac{1}{\lambda}\geqslant n-1$,对 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}$ 及 $\frac{1}{\lambda}$ 应用 ㊴,有

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x_2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{x_n}}\geqslant\frac{n}{1+\frac{1}{\lambda}}\Leftrightarrow\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n}\geqslant\frac{n\lambda}{1+\lambda}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n}\geqslant\frac{n\lambda}{1+\lambda}\Leftrightarrow$$

$$(1-\frac{1}{1+x_1})+(1-\frac{1}{1+x_2})+\cdots+(1-\frac{1}{1+x_n})\geqslant\frac{n\lambda}{1+\lambda}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\leqslant\frac{n}{1+\lambda}$$

即 ㊶ 成立.

应用 ㊶ 很容易证明 ㊷,这里从略.

注 (1) 在命题7中取 $\lambda=1,x_i\to\frac{x_{i+1}}{x_i}(i=1,2,\cdots,n),x_{n+1}=x_1$,即得A.Zulauf 1958 年建立的如下不等式[13]:设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$,则

$$1<\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_n+x_1}<n-1$$

(2) 在命题7中,取 $\lambda=\frac{1}{n-1},x_i\to\frac{1}{n-1}x_i(i=1,2,\cdots,n)$,由 ㊶ 即得 1999 年罗马尼亚数学奥林匹克国家队选拔赛第一天第四题:设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,则

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1$$

(3) 在命题7中,取 $n=3,\lambda=2,x_1=\frac{2bc}{a^2},x_2=\frac{2ca}{b^2},x_3=\frac{2ab}{c^2}(a,b,c>0)$,由㊴有

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geqslant 1 \tag{45}$$

取 $n=3,\lambda=\frac{1}{2},x_1=\frac{1}{2}\frac{a^2}{bc},x_2=\frac{1}{2}\frac{b^2}{ca},x_3=\frac{1}{2}\frac{c^2}{ab}(a,b,c>0)$,由㊶有

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\leqslant 1 \tag{46}$$

综合㊺,㊻即得1997年罗马尼亚数学奥林匹克题:设 $a,b,c>0$,求证

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geqslant 1\geqslant\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

其中㊺的等价形式"设 $x,y,z>0$ 且 $xyz=1$,求证 $\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}\geqslant 1$"为2004年德国数学奥林匹克国家队选拔赛中的一个题目.

3.指数 α 为一般情形

对于一般情形,我们有如下猜测:设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n),n\geqslant 3,\lambda=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$,$\alpha$ 是正常数,则

(1) 当 $\lambda\geqslant n^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 时,有

$$\frac{1}{(1+x_1)^\alpha}+\frac{1}{(1+x_2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^\alpha}\geqslant\frac{n}{(1+\lambda)^\alpha} \tag{47}$$

当 $0<\lambda<n^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 时,有

$$\frac{1}{(1+x_1)^\alpha}+\frac{1}{(1+x_2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^\alpha}>1 \tag{48}$$

(2) 当 $0<\lambda\leqslant\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 时,有

$$\frac{1}{(1+x_1)^\alpha}+\frac{1}{(1+x_2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^\alpha}\leqslant\frac{n}{(1+\lambda)^\alpha} \tag{49}$$

当 $\lambda>\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 时,有

$$\frac{1}{(1+x_1)^\alpha}+\frac{1}{(1+x_2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(1+x_n)^\alpha}\leqslant n-1 \tag{50}$$

注 (1)作者已证明 $\alpha\leqslant n-1$ 式㊼,㊽成立(证明将在另文给出),当 $0<\alpha\leqslant 2$ 时,对一切 $n\geqslant 3$ 均有 $n\geqslant\alpha+1$,此时对一切自然数 $n(n\geqslant 3)$ 不等式㊼,㊽成立;当 $\alpha>2$ 时,$n\geqslant\alpha+1>3$,此时不等式㊼,㊽仅对满足 $n\geqslant\alpha+1$ 的自然数 n 成立,对满足 $3\leqslant n<\alpha+1$ 的自然数 n 是否成立尚未解决.㊾,㊿也未能解决.

另外,$n=2$ 的结论与㊼~㊿有所不同,目前也没完全解决.

(2) 在㊼中取 $n=\alpha=3,\lambda=1,x_1=\frac{y}{x},x_2=\frac{z}{y},x_3=\frac{x}{z}(x,y,z>0)$,即得2005年越南数学奥林匹克国家队选拔赛中的一个题目:设 $x,y,z>0$,求证:

$$(\frac{x}{x+y})^3+(\frac{y}{y+z})^3+(\frac{z}{z+x})^3\geqslant\frac{3}{8}$$

参考文献

[1] 刘保乾.浅淡发现三角形不等式的7种模型[J].中学教研(数学)(浙江师大),2000(11).

[2] 吴善和.一个不等式猜想的证明与推广[J].中学教研(数学)(浙江师大),2001(4).

[3] 舒金根.一个不等式的简证、推广及其它[J].中学数学月刊(苏州大学),2001(5).

[4] 李建潮.一个猜想不等式的证明[J].中学数学教学(安徽师大),2001(6).

[5] 李建潮.也谈一个猜想不等式的证明[J].中学数学月刊(苏州大学),2001(12).

[6] 安振平.一个不等式的下界估计[J].中学数学月刊(苏州大学),2001(12).

[7] 龚浩生,宋庆. IMO42 - 2 的推广[J].中学数学(湖北大学),2002(1).

[8] M. MAZUR.问题 10944[J].American Mathematical Monthly,109(2002):475.

[9] 蒋明斌.对一个不等式的再探讨[J].中学教研(数学)(浙江师大),2003(9).

[10] 蒋明斌.IMO42 中一个不等式的新推广[J].中学数学研究(南昌师大),2004(12).

[11] 蒋明斌.第42届IMO第2题的隔离的推广[J].中学数学(湖北大学),2006(7).

[12] 蒋明斌.一道西部数学奥林匹克赛题溯源与推广[J].《数学教育》(香港数学教育学会),2007(24):63-68.

[13] Zulauf. A.Note on the expression⋯. .Math. Gaz. 1958(42).

关于一组数奥妙题的赏析

邓寿才

1

2007年第4届中国东南地区数学奥林匹克第8题由李胜宏供题(见《走向IMO·数学奥林匹克试题集锦(2007)》第68页),题目如下:

题1 设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$,求证:对于整数 $k\geqslant 2$,有

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}\tag{A}$$

(1) 我们先欣赏李老师提供的参考证法,然后再对本题作赏析.

证法1(李宏胜) 因为

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{1}{4}(a+b)+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k-2\text{个}\frac{1}{2}}\geqslant k\cdot\sqrt[k]{\frac{a^k}{2^k}}=\frac{k}{2}a$$

所以

$$\frac{a^k}{a+b}\geqslant\frac{k}{2}a-\frac{1}{4}(a+b)-\frac{k-2}{2}$$

同理可得

$$\frac{b^k}{b+c}\geqslant\frac{k}{2}b-\frac{1}{4}(b+c)-\frac{k-2}{2}$$

$$\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{k}{2}c-\frac{1}{4}(c+a)-\frac{k-2}{2}$$

三式相加可得

$$\begin{aligned}\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}&\geqslant\frac{k}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)=\\&\left(\frac{k-1}{2}\right)(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)\geqslant\\&\frac{3}{2}(k-1)\sqrt[3]{abc}-\frac{3}{2}(k-2)=\\&\frac{3}{2}(k-1)-\frac{3}{2}(k-2)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(2) 现在,我们从另一个角度给出题目的新证明.

证法 2 我们记式(A)左边为 P,则注意到 $k\geqslant 2\Rightarrow\begin{cases}k/2\geqslant 1\\ k-1\geqslant 1\end{cases}$,有

$$2(\sum a)P=\sum(a+b)\sum\frac{a^k}{a+b}(\text{应用柯西不等式})\geqslant(\sum a^{\frac{k}{2}})^2=$$

$$9\left(\frac{\sum a^{k/2}}{3}\right)^2(\text{应用幂平均不等式})\geqslant 9\left(\frac{\sum a}{3}\right)^k\Rightarrow$$

$$P\geqslant\frac{3}{2}\left(\frac{\sum a}{3}\right)^{k-1}\geqslant\frac{3}{2}(abc)^{\frac{k-1}{3}}=\frac{3}{2}\Rightarrow P\geqslant\frac{3}{2}$$

即式(A)成立,等号成立仅当 $a=b=c=1$.

以上两种证法相比较,证法 1 初等通俗,证法 2 自然巧妙,各有千秋.

观察式(A)左边 P 的结构,使我们联想到施行传统的技巧:

设

$$a\geqslant b\geqslant c\Rightarrow\begin{cases}a^k\geqslant b^k\geqslant c^k\\ \dfrac{1}{b+c}\geqslant\dfrac{1}{c+a}\geqslant\dfrac{1}{a+b}\end{cases}\Rightarrow P=\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}(\text{乱序和})\geqslant$$

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{a+c}+\frac{c^k}{b+c}(\text{反序和})\Rightarrow$$

$$2P\geqslant\frac{2a^k}{a+b}+\frac{b^k+c^k}{c+a}+\frac{b^k+c^k}{b+c}$$

可见,尽管我们应用了排序原理,但到此却难以前行了,因此,用此技巧难以奏效,原因在于式(A)的左边三个分式并非关于 a,b,c 轮换对称尽管如此,式(A)还是有如下两个配对式

$$\frac{b^k}{a+b}+\frac{c^k}{b+c}+\frac{a^k}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}\tag{B}$$

$$\frac{a^k}{b+c}+\frac{b^k}{c+a}+\frac{c^k}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\tag{C}$$

(3) 许多好的不等式,都可以从指数、参数两个方面进行推广,式(A)也是如此.

推广 1 设正数 a,b,c 满足 $abc\geqslant 1$,指数 α,β 满足 $\alpha\geqslant 1+\beta>1$,$p,q$ 为任意正参数,则有

$$\frac{a^\alpha}{(pa+qb)^\beta}+\frac{b^\alpha}{(pb+qc)^\beta}+\frac{c^\alpha}{(cp+qa)^\beta}\geqslant\frac{3}{(p+q)^\beta}\tag{D}$$

显见,当 $p=q,\alpha=k\geqslant 2,\beta=1$ 时,式(D)化为式(A).因此,推广式(D)比式(A)更美.

略证 设式(D)左边为 P_α,$\theta=\dfrac{\alpha}{1+\beta}\geqslant 1$,注意到

$$S=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\geqslant 3$$

应用权方和不等式有

$$P_\alpha=\sum\frac{(a^\theta)^{1+\beta}}{(pa+qb)^\beta}\geqslant\frac{(\sum a^\theta)^{1+\beta}}{[\sum(pa+qb)]^\beta}=\frac{(\sum a^\theta)^{1+\beta}}{[(p+q)S]^\beta}\geqslant\frac{[3(\frac{\sum a}{3})^\theta]^{1+\beta}}{[(p+q)S]^\beta}=$$

$$\frac{3}{(p+q)^{\beta}}\cdot\left(\frac{S}{3}\right)^{\alpha-\beta}\geqslant\frac{3}{(p+q)^{\beta}}\Rightarrow P_{\alpha}\geqslant\frac{3}{(p+q)^{\beta}}$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$.

(4) 一种好的证法技巧,能够启发我们将该题推广到某种境界,如式(A)李老师提供的证法1,暗示我们可以从参数、系数两个方面将式(A)推广为:

推广2 设正数 a,b,c 满足 $abc\geqslant 1$,指数 $k\geqslant 2$;正参数 p,q 与正系数 λ,μ,v 满足条件

$$\begin{cases}A=k\lambda(p+q)-\lambda p-vq>0\\ B=k\mu(p+q)-\mu p-\lambda q>0\\ C=kv(p+q)-vp-\mu q>0\end{cases}\qquad ①$$

则有

$$P_{\lambda}\equiv\frac{\lambda a^{k}}{pa+qb}+\frac{\mu b^{k}}{pb+qc}+\frac{vc^{k}}{pc+qa}\geqslant\frac{3\cdot\sqrt[3]{ABC}}{(p+q)^{2}}-e\qquad (E)$$

其中

$$e=\frac{k-2}{p+q}(\lambda+\mu+v)\qquad ②$$

如果我们取 $p=q=1,\lambda=\mu=v=1$,那么 $e=\frac{3}{2}(k-2),A=B=C=2(k-1)$,式(E)右边化为

$$\frac{3\times 2(k-1)}{4}-\frac{3}{2}(k-2)=\frac{3}{2}$$

这样式(E)化为式(A).因此,式(E)确为式(A)的参数-系数推广.

证明 注意到 $k\geqslant 2$ 及 $1+1+(k-2)=k$,应用加权不等式,有

$$\begin{aligned}&\frac{a^{k}}{pa+qb}+\frac{pa+qb}{(p+q)^{2}}+(k-2)\left(\frac{1}{p+q}\right)\geqslant\\&k\left[\frac{a^{k}}{pa+qb}\cdot\frac{pa+qb}{(p+q)^{2}}\cdot\left(\frac{1}{p+q}\right)^{k-2}\right]^{\frac{1}{k}}=\frac{ka}{p+q}\Rightarrow\\&\frac{a^{k}}{pa+qb}\geqslant\frac{ka}{p+q}-\frac{pa+qb}{(p+q)^{2}}-\frac{k-2}{p+q}\Rightarrow\\&\frac{\lambda a^{k}}{pa+qb}\geqslant\frac{k\lambda a}{p+q}-\frac{\lambda(pa+qb)}{(p+q)^{2}}-\frac{(k-2)\lambda}{p+q}\end{aligned}\qquad ③$$

同理可得

$$\frac{\mu b^{k}}{pb+qc}\geqslant\frac{k\mu b}{p+q}-\frac{\mu(pb+qc)}{(p+q)^{2}}-\frac{(k-2)\mu}{p+q}\qquad ④$$

$$\frac{vc^{k}}{pc+qa}\geqslant\frac{kvc}{p+q}-\frac{v(pc+qa)}{(p+q)^{2}}-\frac{(k-2)v}{p+q}\qquad ⑤$$

③+④+⑤得

$$\sum\frac{\lambda a^{k}}{pa+qb}=\frac{Aa+Bb+Cc}{(p+q)^{2}}-e\geqslant\frac{3\cdot\sqrt[3]{ABC\cdot(abc)}}{(p+q)^{2}}-e\geqslant\frac{3\cdot\sqrt[3]{ABC}}{(p+q)^{2}}-e\Rightarrow$$

$$\sum \frac{\lambda a^k}{pa+qb} \geqslant \frac{3 \cdot \sqrt[3]{ABC}}{(p+q)^2} - e$$

即式(E)得证,等号成立仅当 $a=b=c=1$ 和 $\lambda=\mu=v$.

(5) 推广1还可以再以元数方面推广为:

推广3 设 $\alpha \geqslant 1+\beta > 1, 3 \leqslant n \in \mathbf{N}, 2 \leqslant m \in \mathbf{N}, a_i > 0, \lambda_j > 0$,定义 $a_{n+i} \equiv a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i \geqslant 1, S = \sum_{i=1}^{n} a_i, \lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m), x_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_{i+1} + \cdots + \lambda_m a_{i+m-1}$,那么有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{x_i^{\beta}} \geqslant \frac{n}{\lambda^{\beta}} \tag{F}$$

提示 设

$$\theta = \alpha/(1+\beta) \geqslant 1$$

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{x_i^{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i^{\theta})^{1+\beta}}{x_i^{\beta}}(\text{应用权方和不等式}) \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta})^{1+\beta}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{\beta}} =$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta})^{1+\beta}}{(\lambda S)^{\beta}}(\text{应用幂平均不等式}) \geqslant \left[n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta} / (\lambda S)^{\beta} =$$

$$\left[n\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1+\beta}}\right]^{1+\beta} \cdot (\lambda S)^{-\beta} \Rightarrow P_n \geqslant \frac{n}{\lambda_{\beta}} \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\alpha-\beta} \geqslant \frac{n}{\lambda^{\beta}} \cdot (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{\alpha-\beta}{n}} \Rightarrow P_n \geqslant \frac{n}{\lambda^{\beta}}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

2

2007年中国国家集训队测试第10题是:

题2 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$,求证:

$$(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1)\left(\frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1}\right) \geqslant \frac{n}{n+1} \tag{G}$$

本题的已知条件很普通常见,而要求证明的结论式(A)的左边却庞大复杂.从《走向IMO》第85页上的参考解法可知,本题既高难又美妙,颇具吸引力.没有攻不破的堡垒,据笔者初探,我们可以从指数、参数两个方面将式(G)推广为:

推广4 设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,约定 $a_{n+1} \equiv a_1$,且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$,指数 $\alpha \geqslant \beta > 0$,参数 $\lambda, \mu > 0$,则

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1})^{\beta} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{a_{i+1}^{\alpha}(\lambda a_{i+1} + \mu)^{\beta}} \geqslant \frac{n}{(\lambda + n\mu)^{\beta}} \tag{H}$$

特别地,当取 $\alpha = \beta = 1, \lambda = \mu = 1$ 时,式(H)退化为式(G).

证明　设 $S=\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}, t=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}}$,则应用平均值不等式有

$$t\geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{1/n}=n$$

应用柯西不等式有

$$St=(\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1})\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_ia_{i+1}}\right)\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2=1\Rightarrow S^{\beta}\geqslant\frac{1}{t^{\beta}} \quad ①$$

再设

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{a_{i+1}^{\alpha}(\lambda a_{i+1}+\mu)^{\beta}}$$

且

$$P=S^{\beta}T \quad ②$$

(1) 当 $\alpha\geqslant 1+\beta>1$ 时,记 $\varphi=\frac{\alpha}{1+\beta}\geqslant 1$.应用权方和不等式有

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\alpha}}{(\lambda a_{i+1}+\mu)^{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left[\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\varphi}\right]^{1+\beta}}{(\lambda a_{i+1}+\mu)^{\beta}}\geqslant\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\varphi}\right]^{1+\beta}}{\left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i+1}+\mu)\right]^{\beta}}=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\varphi}\right]^{1+\beta}}{(\lambda+n\mu)^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{\left[n\left(\frac{t}{n}\right)^{\varphi}\right]^{1+\beta}}{(\lambda+\mu n)^{\beta}}=\frac{n^{1+\beta}\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha}}{(\lambda+n\mu)^{\beta}}\Rightarrow T\geqslant nt^{\alpha}\cdot n^{-(\alpha-\beta)}\cdot(\lambda-n\mu)^{-\beta}\Rightarrow \quad ③$$

$$P=S^{\beta}T\geqslant\frac{t^{\alpha}}{t^{\beta}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-\beta}\cdot\frac{n}{(\lambda+n\mu)^{\beta}}=\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha-\beta}\cdot\frac{n}{(\lambda+n\mu)^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{n}{(\lambda+\mu n)^{\beta}}\Rightarrow P\geqslant\frac{n}{(\lambda+n\mu)^{\beta}} \quad ④$$

此时式(H)成立.

(2) 当 $0<\beta\leqslant 1\leqslant\alpha<1+\beta$ 时,记 $\theta=\frac{\alpha+\beta}{1+\beta}\geqslant 1$,有

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\alpha+\beta}}{\left(\lambda a_i+\frac{\mu a_i}{a_{i+1}}\right)^{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left[\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{\left(\lambda a_i+\frac{\mu a_i}{a_{i+1}}\right)^{\beta}}\geqslant\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda a_i+\frac{\mu a_i}{a_{i+1}}\right)^{\beta}}=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{(\lambda+\mu t)^{\beta}}=$$

$$\frac{\left[n\left(\frac{t}{n}\right)^{\theta}\right]^{1+\beta}}{(\lambda+\mu t)^{\beta}}=\frac{n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{t^{\alpha+\beta}}{(\lambda+\mu t)^{\beta}}\Rightarrow T\Rightarrow\frac{n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{t^{\alpha+\beta}}{(\lambda+\mu t)^{\beta}}\Rightarrow \quad ⑤$$

$$P=S^{\beta}T\geqslant T/t^{\beta}\geqslant\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha}\cdot\frac{n}{(\lambda+\mu t)^{\beta}} \quad ⑥$$

由于

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}t\geqslant n\\ \alpha\geqslant\beta>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{t}{n}\right)^{\beta}\\ \text{且}\frac{t}{n}\geqslant\frac{\lambda+\mu t}{\lambda+n\mu}\Leftrightarrow t\geqslant n\end{array}\right\}\Rightarrow P\geqslant\left(\frac{\lambda+\mu t}{\lambda+\mu n}\right)^{\beta}\cdot\frac{n}{(\lambda+\mu t)^{\beta}}\Rightarrow P\geqslant\frac{n}{(\lambda+\mu n)^{\beta}} \quad ⑦$$

此时式(H)也成立.

综合式(1)和式(2)知,式(H)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$.

3

2007年中国国家集训队测试第4题是:

题3 设正实数 μ, v, w 满足

$$\mu + v + w + \sqrt{\mu v w} = 4 \tag{①}$$

求证:

$$\sqrt{\frac{vw}{\mu}} + \sqrt{\frac{\mu w}{v}} + \sqrt{\frac{\mu v}{w}} \geqslant \mu + v + w \tag{I}$$

(1) 分析:本题的已知条件比较特别,而要求证的结论式(I)却相当优雅迷人.从式(I)的左端(以下记为 P),自然联想到应用3元对称不等式,有

$$P = \sum\sqrt{\frac{vw}{\mu}} \geqslant \left[3\sum\left(\sqrt{\frac{\mu w}{v}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu v}{w}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3(\mu + v + w)} = \sqrt{3S} \Rightarrow$$

$$P \geqslant \sqrt{3S} \tag{②}$$

(其中 $S = \mu + v + w$) 比较式②和式(I)知,我们只须证

$$\sqrt{3S} \geqslant S \Leftrightarrow 0 < S \leqslant 3 \tag{③}$$

欲证式③,应从已知条件式①入手,记 $t = \sqrt[6]{\mu v w}$, $S = 3S_1^2$,有

$$4 = \mu + v + w + \sqrt{\mu v w} \leqslant \mu + v + w + \left(\frac{\mu + v + w}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 3S_1^2 + S_1^3 \Rightarrow$$

$$(S_1 - 1)(S_1 + 2)^2 \geqslant 0 \Rightarrow S_1 \geqslant 1 \Rightarrow S \geqslant 3 \tag{④}$$

从式④知式③不成立,因此此路不通,我们得另寻出路.具体证明请欣赏《走向IMO》第76页.

(2) 虽然本题美妙而特别,证法也不常见,但它却暗示我们许多有趣的信息,以此顺藤摸瓜,就可吃到许多美味的"水果".如,从已知有

$$4 = \mu + v + w + \sqrt{\mu v w} \geqslant 3\sqrt[3]{\mu v w} + \sqrt{\mu v w} = 3t^2 + t^3 \Rightarrow$$

$$(t - 1)(t + 2)^2 \leqslant 0 \Rightarrow 0 < t \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[6]{\mu v w} \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[3]{\mu v w} \leqslant 1 \tag{⑤}$$

从④,⑤两式,我们得到结论

$$\frac{\mu + v + w}{3} \geqslant 1 \geqslant \sqrt[3]{\mu v w} \tag{J}$$

这是一个漂亮的双向插值不等式,壮美得如"凤凰展翅",这是我们意外的收获.

(3) 我们在前面得到结论

$$\sum\left(\sqrt{\frac{vw}{\mu}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu w}{v}}\right) = \mu + v + w = S \geqslant 3$$

再增设系数 $p, q, r > 0$,并应用杨克昌不等式,有

$$P_\lambda = p\left(\sqrt{\frac{vw}{\mu}}\right) + q\left(\frac{\mu w}{v}\right) + r\left(\sqrt{\frac{\mu v}{w}}\right) \geqslant \sqrt{8\delta} \geqslant \sqrt{3\delta} \tag{K}$$

其中 $\delta = 2(qr + rp + pq) - p^2 - q^2 - r^2 > 0$,式(K)等号成立的条件是 $\mu = w = v = 1$,且 $p = q = r$.

(4) 由式(J)有 $\mu vw \leqslant 1$,虽然这一结论娇小玲珑,给它穿上艳丽外衣,就会"丰满迷人"

$$\mu^\alpha v^\beta w^\gamma \leqslant \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^x y^y z^z} \tag{L}$$

其中 $x = 3\alpha - 1, y = 3\beta - 1, z = 3\gamma - 1$,且 $\alpha,\beta,\gamma \in (\frac{1}{3},\frac{5}{3}), \alpha + \beta + \gamma = 3$.

显然,当取 $\alpha = \beta = \gamma = 1$ 时,式(L)化为 $\mu vw \leqslant 1$ 回到原状.

证明 设

$$\left.\begin{array}{l}(2p,2q,2r) = (5 - 3\alpha, 5 - 3\beta, 5 - 3\gamma)\\ \alpha\beta\gamma \in (\frac{1}{3},\frac{5}{3}), \alpha + \beta + \gamma = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}p + q + r = 3\\ p,q,r \in (0,2)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(2 - p) + (2 - q) + (2 - r) + 1 = 4\\ 2 - p, 2 - q, 2 - r \in (0,2)\end{cases} \Rightarrow 4 = \mu + v + w + \sqrt{\mu vw} =$$

$$\sum\left[(2 - p)\left(\frac{\mu}{2 - p}\right)\right] + \sqrt{\mu vw}(\text{应用加权不等式}) \geqslant$$

$$4\left[\prod\left(\frac{\mu}{2 - p}\right)^{2-p}\sqrt{\mu vw}\right]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 \geqslant (\mu vw)\cdot\prod\left(\frac{\mu}{2 - p}\right)^{2(2-p)} \Rightarrow$$

$$\prod(2 - p)^{2(2-p)} \geqslant \prod\mu^{(4-2p)} + 1 = \mu^{3\alpha}v^{3\beta}w^{3\gamma} \Rightarrow$$

$$\mu^\alpha v^\beta w^\gamma \leqslant \left[\prod(2 - p)^{2(2-p)}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\prod\left(\frac{3\alpha - 1}{2}\right)^{3\alpha - 1}\right]^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)^x\left(\frac{y}{2}\right)^y\left(\frac{z}{2}\right)^z\right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{x^x y^y z^z}{2^{x+y+z}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{x^x y^y z^z}{2^{3(\alpha+\beta+\gamma)-3}}\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{x^x y^y z^z}}{2^{(\alpha+\beta+\gamma-1)}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^x y^y z^z}$$

即式(L)成立,等号成立仅当 $\mu = v = w = 1, \alpha = \beta = \gamma = 1$.

(5) 依照上述技巧,我们可得到如下两个推广结论:

结论 1 设 $x_i > 0, p,q,k > 0, kq < \alpha_i < 2p + kq(1 \leqslant i \leqslant n, 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且满足

$$p\sum_{i=1}^n x_i + q(\prod_{i=1}^n x_i)^k = np + q$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = n(p + kq)$$

则有

$$\sum_{i=1}^n x_i \geqslant n$$

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leqslant \prod_{i=1}^n\left(\frac{\alpha_i - kq}{p}\right)^{\alpha_i - kq} \tag{M}$$

结论 2 设 $x_i > 0, p,q > 0, \alpha_i \in (0,2)(1 \leqslant i \leqslant n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = n$,

$\prod_{i=1}^{n}(p+qx_i)=(p+q)^n$,求证:

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\leqslant\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2n}\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2-\alpha_i}{p}\right)^{2-\alpha_i}\left(\frac{\alpha_i}{q}\right)^{\alpha_i}\right] \tag{N}$$

4

第15届全苏中学生数学奥林匹克题中,有一道题是:

题4 设 $a,b,c\geqslant 0$,证明:

$$a+b+c\geqslant\frac{a(bc+c+1)}{ca+a+1}+\frac{b(ca+a+1)}{ab+b+1}+\frac{c(ab+b+1)}{bc+c+1} \tag{O}$$

抬头仰望,式(O)的右端是结构复杂的分式和,如高大耸立的铜墙铁壁,如按常规方法欲两边去分母施证,那难度将令人望而却步.可见,欲证明本题,只能"智取华山",切记不可硬攻,这样,即使"固若金汤"的据点,也可攻破.

证明 我们设

$$\begin{cases}x=bc+c+1\geqslant 1\\ y=ca+a+1\geqslant 1\\ z=ab+b+1\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=cz+1-abc\\ y=ax+1-abc\\ z=by+1-zbc\end{cases}$$

这样,式(O)等价于(注意 $cz=x+abc-1$ 等)

$$a+b+c\geqslant\frac{ax}{y}+\frac{by}{z}+\frac{cz}{x}=\sum\frac{cz}{x}\Leftrightarrow\sum a\geqslant\sum\left(\frac{abc}{x}-\frac{1}{x}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\sum a\geqslant\sum\left(\frac{abc}{x}-\frac{1}{x}\right)+3\Leftrightarrow$$

$$\sum\left(a-\frac{abc}{x}+\frac{1}{x}\right)\geqslant 3\Leftrightarrow\sum\left(\frac{ax+1-abc}{x}\right)\geqslant 3\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{y}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geqslant 3$$

因此式(O)成立.等号成立仅当

$$x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$$

可见,经过如此巧妙代换,我们就成功地"智取华山".因此,本题新奇别致,证明重在智取.

进一步地,从式(O)我们得到一个漂亮的双向不等式

$$a+b+c\geqslant\frac{ax}{y}+\frac{by}{z}+\frac{cz}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{abc} \tag{P}$$

它与我们所熟知的不等式

$$a+b+c\geqslant\sqrt{3(bc+ca+ab)}\geqslant 3\sqrt[3]{abc} \tag{Q}$$

交相辉映.

式(O)是关于3个非负元数 a,b,c 的奇异不等式,仿效上述代换技巧,我们可以成功地将式(O)从3个元推广到多个元数:

推广 5 设 $a_i \geqslant 0(1 \leqslant i \leqslant n, 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$. 记

$$x_1 = (a_2a_3\cdots a_n) + (a_3\cdots a_n) + \cdots + a_{n-1}a_n + a_n + 1$$
$$x_2 = (a_3a_4\cdots a_na_1) + (a_4\cdots a_na_1) + \cdots + a_na_1 + a_1 + 1$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = (a_na_1\cdots a_{n-2}) + (a_1\cdots a_{n-2}) + a_{n-3}a_{n-2} + a_{n-2} + 1$$
$$x_n = (a_1a_2\cdots a_{n-1}) + (a_2\cdots a_{n-1}) + \cdots + a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1} + 1$$

证明

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant \frac{a_1x_1}{x_2} + \frac{a_2x_2}{x_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}x_{n-1}}{x_n} + \frac{a_nx_n}{x_1} \tag{R}$$

我们约定 $a_{n+1} \equiv a_1, x_{n+1} \equiv x_1$,并记 $m = a_1a_2\cdots a_n$,则有

$$a_ix_i = m + x_{i+1} - 1(1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_ix_i}{x_{i+1}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m + x_{i+1} - 1}{x_{i+1}}\right) = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{m-1}{x_{i+1}} \Leftrightarrow n \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m-1}{x_{i+1}} =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}x_{i+1} + 1 - m}{x_{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} \geqslant n$$

上式显然成立,从而式(R)成立,等号成立仅当

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

可见,巧妙的代换,导致了简洁的证明.

5

2003 年湖南省高中数学竞赛第 14 题是:

题 5 设 x, y, z 均取正实数,且 $x + y + z = 1$,求三元函数

$$f(x,y,z) = \frac{3x^2 - x}{1 + x^2} + \frac{3y^2 - y}{1 + y^2} + \frac{3z^2 - z}{1 + z^2}$$

的最小值,并给出证明.

(1) 分析:本题的已知条件很常见,而要求最小值的函数 $f(x,y,z)$ 的表达式却较复杂,注意到

$$\frac{3x^2 - x}{1 + x^2} = 3 - \frac{3 + x}{x^2 + 1}$$

等,因此,如果我们设

$$P = \frac{x+3}{x^2+1} + \frac{y+3}{y^2+1} + \frac{z+3}{z^2+1} \tag{①}$$

那么有

$$f(x,y,z) = 9 - p \tag{②}$$

根据对称性,设

$$x \geqslant y \geqslant z > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geqslant y+3 \geqslant z+3 \\ \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{y^2+1} \leqslant \dfrac{1}{z^2+1} \end{cases} \text{(应用切比雪夫不等式)} \Rightarrow$$

$$P \leqslant \frac{1}{3}\sum(x+3)\sum\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{3}\left(\sum x + q\right)\sum\frac{1}{x^2+1} = \frac{10}{3}\sum\frac{1}{x^2+1} \qquad ③$$

从式 ② 知，欲求函数 $f(x,y,z)$ 的最小值，应求 P 的最大值，从式 ③ 又知，须求

$$T = \sum\frac{1}{x^2+1} = \sum\frac{9}{9x^2+9} \qquad ④$$

的最大值，估计 $f(x,y,z)$ 的取最小值的条件是 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$，因此，再尝试

$$9x^2+9 = 9x^2+1+1+\cdots+1(9\text{个}1) \geqslant 10\times\sqrt[10]{9x^2\times1\times\cdots\times1} = 10\sqrt[5]{3x}$$

于是，我们有

$$T = \sum\frac{9}{9x^2+9} \leqslant \frac{9}{10\sqrt[5]{3}}\sum\frac{1}{\sqrt[5]{x}} \qquad ⑤$$

但

$$\sum\frac{1}{\sqrt[5]{x}} \geqslant 3\left(\frac{1}{xyz}\right)^{\frac{1}{15}} = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^{\frac{1}{5}} \geqslant 3\left(\frac{3}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{5}} = 3\times3^{\frac{1}{5}} = 3^{6/5} \qquad ⑥$$

从式 ⑥ 表明，T 没有最大值，从而 P 没有最大值. 因此，采用上述方法，即使我们使出了浑身解数也无可奈何，不能求出 $f(x,y,z)$ 的最小值.

此路不通，须另寻出路.

解法 1 由已知条件有

$$x,y,z\in(0,1) \Rightarrow (3x-1)^2(3-x) \geqslant 0 \Rightarrow 10x(3x-1) \geqslant 3(1+x^2)(3x-1) \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2-x}{1+x^2} \geqslant \frac{3}{10}(3x-1) \qquad ⑦$$

同理可得

$$\frac{3y^2-y}{1+y^2} \geqslant \frac{3}{10}(3y-1) \qquad ⑧$$

$$\frac{3z^2-z}{1+z^2} \geqslant \frac{3}{10}(3z-1) \qquad ⑨$$

⑦ + ⑧ + ⑨ 得

$$f(x,y,z) \geqslant \frac{3}{10}[(3x-1)+(3y-1)+(3z-1)] =$$

$$\frac{3}{10}[3(x+y+z-1)] = 0 \Rightarrow f(x,y,z)_{\min} = 0$$

即函数 $f(x,y,z)$ 的最小值为 0，当 $x=y=z$ 时达到.

此解法非常简洁美妙，下面我们再欣赏参考解答.

解法 2 考虑函数 $g(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$ 可知 $g(t)$ 为奇函数，由于当 $t>0$ 时，$\dfrac{1}{t}+t$ 在

$(0,1)$ 内递减,易知 $g(t)=1/(t+\frac{1}{t})$ 在$(0,1)$ 内递增,而对于 $t_1,t_2\in(0,1)$ 且 $t_1<t_2$ 时,有

$$(t_1-t_2)[g(t_1)-g(t_2)]\geqslant 0$$

所以对任意 $x\in(0,1)$,有

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{10}\right)\geqslant 0$$

即

$$\frac{3x^2-x}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{10}(3x-1)$$

同时

$$\frac{3y^2-y}{1+y^2}\geqslant\frac{3}{10}(3y-1)$$

$$\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}(3z-1)$$

以上三式相加,有

$$f(x,y,z)=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}[3(x+y+z)-3]=0$$

当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时,$f(x,y,z)=0$.

解法 2 是一个有效的好方法,关键在确定函数 $f(t)=1/(t+\frac{1}{t})$,重点在应用

$$(t_1-t_2)[f(t_1)-f(t_2)]\geqslant 0 \quad ⑩$$

当 $f(t)$ 为减函数时,上式反向.

应用式 ⑩,易将本题推广为:

推广 6 设 $x_i>0(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 且满足$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,求 n 元函数 $F_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{nx_i^2-x_i}{1+x_i^2}\right)$ 的最小值.

略解 仍设关于 $t\in(0,1)$ 的函数为

$$f(t)=1/(t+\frac{1}{t})$$

那么 $f(t)$ 在$(0,1)$ 内为递增函数,于是有

$$(x_i-\frac{1}{n})[f(x_i)-f(\frac{1}{n})]\geqslant 0\Rightarrow \quad ⑪$$

$$(x_i-\frac{1}{n})\left(\frac{x_i}{1+x_i^2}-\frac{n}{1+n^2}\right)\geqslant 0\Rightarrow\frac{nx_i^2-x_i}{1+x_i^2}\geqslant\frac{n}{1+n^2}(nx_i-1)\Rightarrow$$

$$F_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{nx_i^2-x_i}{1+x_i^2}\right)\geqslant\frac{n}{1+n^2}\sum_{i=1}^{n}(nx_i-1)=\frac{n}{1+n^2}(n\sum_{i=1}^{n}x_i-n)=0\Rightarrow$$

$$F_n(x)_{\min}=0$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ 时达到.

就难度而言,上面的推广命题达到了 IMO 的程度.

6

与题5题意相关的题目有许多,如:

题6 设正数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$,求 $f(x,y,z)=\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$ 的最小值.

分析 我们观察表达式 $f(x,y,z)$ 的结构,发现它不仅形态优美,而且具有对称性,不妨设

$$1>x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\frac{1}{1-x^2}\geqslant\frac{1}{1-y^2}\geqslant\frac{1}{1-z^2}>0(\text{应用切比雪夫不等式})\Rightarrow$$

$$f(x,y,z)=\sum\frac{x}{1-x^2}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum x\right)\sum\frac{1}{1-x^2}(\text{应用柯西不等式})\geqslant$$

$$\frac{3\sum x}{\sum(1-x^2)}=\frac{3\sum x}{3-\sum x^2}=\frac{3}{2}\sum x$$

但

$$\sum x\leqslant\sqrt{3\sum x^2}=\sqrt{3}$$

因此用此传统的方法不能求出 $f(x,y,z)$ 的最小值.

难道我们对本题就无可奈何了吗?让我们另辟新路吧!

解法1 我们估计当 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时,表达式 $f(x,y,z)$ 取得最小值,因此有

$$x:(1+x):(1-x)=1:(\sqrt{3}+1):(\sqrt{3}-1)$$

于是产生新的思路:注意到

$$4x(1-x^2)=4x(1+x)(1-x)=(2x)\cdot(\sqrt{3}-1)(1+x)\cdot(\sqrt{3}+1)(1-x)\leqslant$$

$$\left[\frac{2x+(\sqrt{3}-1)(1+x)+(\sqrt{3}+1)(1-x)}{3}\right]^3(\text{应用平均值不等式})\Rightarrow$$

$$4x(1-x^2)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad ①$$

等号成立仅当

$$2x=(\sqrt{3}-1)(1+x)=(\sqrt{3}+1)(1-x)\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

同理可得

$$4y(1-y^2)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad ②$$

同号成立仅当 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$4z(1-z^2)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad ③$$

等号成立仅当 $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

① + ② + ③ 立即得

$$f(x,y,z)=\sum\frac{x}{1-x^2}=\sum\frac{4x^2}{4x(1-x^2)}\geqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\sum 4x^2=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

即 $f(x,y,z)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$,当 $x=y=z=1/\sqrt{3}$ 时取到.

解法 2 应用平均值不等式,有

$$2x^2(1-x^2)^2=(2x^2)(1-x^2)(1-x^2)\leqslant\left[\frac{2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)}{3}\right]^3=$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\Rightarrow\sqrt{2}x(1-x^2)\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

等号成立仅当

$$2x^2=1-x^2\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

同理可得

$$\sqrt{2}y(1-y^2)\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},\sqrt{2}z(1-z^2)\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

等号成立仅当 $y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$,于是我们有

$$f(x,y,z)=\sum\frac{x}{1-x^2}=\sum\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{2}x(1-x^2)}\geqslant(\sum\sqrt{2}x^2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=$$

$$\sqrt{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

即 $f(x,y,z)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$,仅当 $x=y=z=1/\sqrt{3}$ 时取到.

解法 3 应用平均值不等式,有

$$\frac{2x^2}{3\sqrt{3}}+x^5=\frac{x^2}{3\sqrt{3}}+\frac{x^2}{3\sqrt{3}}+x^5\geqslant 3\left(\frac{x^2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{x^2}{3\sqrt{3}}\cdot x^5\right)^{\frac{1}{3}}=x^3\Rightarrow\frac{2x^2}{3\sqrt{3}}+x^5\geqslant x^3$$

等号成立仅当

$$\frac{x^2}{3\sqrt{3}}=x^5\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

同理可得

$$\frac{2y^2}{3\sqrt{3}}+y^5\geqslant y^3,\frac{2z^2}{3\sqrt{3}}+z^5\geqslant z^3$$

等号成立仅当 $y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$,以上三式相加得

$$\sum\left(\frac{2x^2}{3\sqrt{3}}+x^5\right)\geqslant\sum x^3\Rightarrow\frac{2}{3\sqrt{3}}\sum x^2+\sum x^5\geqslant\sum x^3\Rightarrow\frac{2}{3\sqrt{3}}\geqslant\sum(x^3-x^5)\Rightarrow$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}f(x,y,z)\geqslant\sum(x^3-x^5)f(x,y,z)=$$

$$\sum x^3(1-x^2)\cdot\sum\frac{x}{1-x^2}\text{(应用柯西不等式)}\geqslant(\sum x^2)=1\Rightarrow$$

$$f(x,y,z)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

因此,所求 $f(x,y,z)$ 的最小值为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$,仅当 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取到.

解法 4 由已知条件有 $x,y,z\in(0,1)$

$$(x-\frac{\sqrt{3}}{3})^2(3\sqrt{3}x+6)\geqslant 0\Rightarrow 3\sqrt{3}x^3+2\geqslant 3\sqrt{3}x\Rightarrow 3\sqrt{3}x^5+2x^2\geqslant 3\sqrt{3}x^3\Rightarrow$$

$$x^3-x^5\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}x^2\Rightarrow\sum x^3(1-x^2)\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}\sum x^2=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

以下同解法 2.

以上 4 种解法最通俗初等,数学基础较好的高中学生完全可理解和接受.由于现行高中数学教材已有微积分初步,因此,我们不妨活学活用它来解答本题.

解法 5 我们设

$$(a,b,c)=(x^2,y^2,z^2)\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=1\\a,b,c\in(0,1)\end{cases}\Rightarrow f(x,y,z)=f(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})=$$

$$\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c}$$

再设关于 $t\in(0,1)$ 的函数为 $g(t)=\frac{\sqrt{t}}{1-t}$,则显然 $g(t)$ 在$(0,1)$ 内是增函数,且其导函数

$$g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}(1-t)}+\frac{\sqrt{t}}{(1-t)^2}=\frac{1+t}{2\sqrt{t}(1-t)^2}>0$$

因此 $g(t)$ 在$(0,1)$ 内为凸函数,于是有

$$g(a)+g(b)+g(b)\geqslant 3g\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3g(\frac{1}{3})=\frac{3}{2}\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c}\geqslant$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}\Rightarrow f(x,y,z)=\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

即 $f(x,y,z)$ 的最小值为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$,当 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取到.

解法 6 设关于 $t\in(0,1)$ 的函数为

$$g(t)=\sqrt{t}(1-t)=\sqrt{t}-\sqrt{t^3}$$

则有导函数

$$g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{3\sqrt{t}}{2},g''(t)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}+\frac{3}{\sqrt{t}}\right)<0$$

因此 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 内为减函数,从而 $f(t)=1/g(t)$ 在 $(0,1)$ 内关于 t 的增函数.

又设 $(x^2,y^2,z^2)=(a,b,c)$,则 $a+b+c=1$,且 $a,b,c\in(0,1)$,于是有

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\left[f(t)-\frac{1}{3}\right]\geqslant 0\Rightarrow tf(t)\geqslant tf\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f(t)-\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}af(a)\geqslant af\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f(a)-\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)\\ bf(b)\geqslant bf\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f(b)-\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)\\ cf(c)\geqslant cf\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f(c)-\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\sum af(a)\geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)\sum a+\frac{1}{3}\sum f(a)-f\left(\frac{1}{3}\right)=$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\sum f(a)-f\left(\frac{1}{3}\right)=$$

$$\frac{1}{3}\sum f(a)\geqslant\sqrt[3]{f(a)f(b)f(c)}\Rightarrow$$

$$\sum af(a)\geqslant\frac{1}{\sqrt[3]{g(a)g(b)g(c)}}\qquad ①$$

但

$$g(a)g(b)g(c)=\sqrt{abc}(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3=$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3\Rightarrow\sum af(a)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}\Rightarrow\qquad ②$$

$$f(x,y,z)=\sum x^2f(x^2)=\sum\frac{x^2}{x(1-x^2)}=$$

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z^2}{1-z^2}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

即 $f(x,y,z)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$,仅当 $x=y=z=1/\sqrt{3}$ 时达到.

我们刚才一气呵成地给出了本题的6种解法,但我们意犹未尽,再对本题作几点赏析:

(1) 从本题的已知条件 $x,y,z>0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$,使我们想到熟知的三角恒等式

$$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1\qquad ③$$

(其中约定 $\triangle ABC$ 为锐角三角形) 记 $t=\sin A\sin B\sin C$,并令

$$(x^2,y^2,z^2)=(\cot B\cot C,\cot C\cot A,\cot A\cot B)\Rightarrow 1-x^2=y^2+z^2=$$

$$(\cot B+\cot C)\cot A=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A\cos A}{t}\Rightarrow$$

$$\sum\frac{x}{1-x^2}=\sum\left(\frac{t\sqrt{\cot B\cot C}}{\sin A\cos A}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\sum\left(\frac{\sin A\sin B\sin C\cdot\sqrt{\dfrac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}}}{\sin A\cos A}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\sum\left(\frac{\sqrt{\sin B\sin C\cos B\cos C}}{\cos A}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\sum\left(\frac{\sqrt{\sin 2B\sin 2C}}{\cos A}\right)\geqslant 3\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\sin 2B\sin 2C}}{\cos A}+\frac{\sqrt{\sin 2C\sin 2A}}{\cos B}+\frac{\sqrt{\sin 2A\sin 2B}}{\cos C}\geqslant 3\sqrt{3} \qquad ④$$

这样一来,我们以本题为出发点,创造出了一个新的三角不等式④($\triangle ABC$ 为锐角三角形).如果没有本题作基础,欲直接证明式④,那是颇有难度的.

(2) 如果将题6中的已知条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 改为 $yz+zx+xy=1$,那我们又可建立漂亮的:

结论3 设正数 x,y,z 满足 $yz+zx+xy=1$,正数 λ,μ,v 满足 $\lambda+\mu+v=1$,且 $\delta=1-2(\lambda^2+\mu^2+v^2)>0$,则有

$$\frac{\lambda x}{1-x^2}+\frac{\mu y}{1-y^2}+\frac{vz}{1-z^2}\geqslant\frac{\sqrt{\delta}}{2}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^2 \qquad (a)$$

特别地,当 $\lambda=\mu=v=\frac{1}{3}$ 时,式(a)化为 $f(x,y,z)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

略证 由已知有 $x,y,z\in(0,1)$,于是

$$\sum(1-x^2)=3-\sum x^2\leqslant 3-\sum yz=2$$

设 $1>x\geqslant y\geqslant z>0\Rightarrow\frac{1}{1-x^2}\geqslant\frac{1}{1-y^2}\geqslant\frac{1}{1-z^2}>0\Rightarrow P_\lambda=\sum\frac{\lambda x}{1-x^2}\geqslant$

$$\left(\sum\lambda x\right)\sum\left(\frac{\lambda}{1-x^2}\right)(\text{应用切比雪夫不等式的加权推广})\geqslant$$

$$\left[\left(2\sum\mu v-\sum\lambda^2\right)\sum yz\right]^{\frac{1}{2}}\sum\left(\frac{\lambda}{1-x^2}\right)(\text{应用杨克昌不等式})=$$

$$\sqrt{\delta}\sum\left(\frac{\lambda}{1-x^2}\right)\Rightarrow 2P_\lambda\geqslant 2\sqrt{\delta}\sum\left(\frac{\lambda}{1-x^2}\right)\geqslant$$

$$\sqrt{\delta}\sum(1-x^2)\sum\left(\frac{\lambda}{1-x^2}\right)\geqslant\sqrt{\delta}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2(\text{应用柯西不等式})\Rightarrow$$

$$P_\lambda\geqslant\frac{\sqrt{\delta}}{2}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^2$$

等号成立仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$,且 $\lambda=\mu=v=\frac{1}{3}$.

(3) 进一步地,结论还可以再以指数方面推广为:

结论4 设正元数 x,y,z 满足 $yz+zx+xy=1$;正系数 λ,μ,v 满足 $\lambda+\mu+v=1$ 及 $\delta=1-2(\lambda^2+\mu^2+v^2)>0$;指数 α,β,满足 $\alpha\geqslant 1\geqslant\beta>0$,则有

$$P_\lambda^{(\alpha)}\equiv\frac{\lambda x^\alpha}{(1-x^2)^\beta}+\frac{\mu y^\alpha}{(1-y^2)^\beta}+\frac{vz^\alpha}{(1-z^2)^\beta}\geqslant\sqrt{\delta}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^\beta\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \qquad (b)$$

显然,当 $\alpha = \beta = 1$ 时,式(b)化为式(a).

略证 注意到 $\alpha \geqslant 1 \geqslant \beta > 0$ 及 $x,y,z \in (0,1)$,首先应用幂平均不等式有

$$\sum(1-x^2)^\beta \leqslant 3\left[\frac{\sum(1-x^2)}{3}\right]^\beta = 3^{1-\beta}(3-\sum x^2)^\beta \leqslant 3^{1-\beta}(3-\sum yz)^\beta \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^\beta \geqslant \sum(1-x^2)^\beta \quad ⑤$$

设

$$1 > x \geqslant y \geqslant z > 0 \Rightarrow \frac{1}{(1-x^2)^\beta} \geqslant \frac{1}{(1-y^2)^\beta} \geqslant \frac{1}{(1-z^2)^\beta} \Rightarrow$$

$$P_\lambda(\alpha) = \sum \frac{\lambda x^\alpha}{(1-x^2)^\beta} \geqslant (\sum \lambda x^\alpha)\sum \frac{\lambda}{(1-x^2)^\beta}$$

$$[(2\sum \mu v - \sum \lambda^2)\sum(yz)^\alpha]\sum \frac{\lambda}{(1-x^2)^\beta} =$$

$$\sqrt{\delta}\sqrt{\sum(yz)^\alpha}\sum \frac{\lambda}{(1-x^2)^\beta} \geqslant$$

$$\sqrt{\delta}\cdot\sqrt{3\left(\frac{\sum yz}{3}\right)^\alpha}\cdot\sum \frac{\lambda}{(1-x^2)\beta} = \sqrt{\delta}\cdot 3^{(1-\alpha)/2}\cdot\sum \frac{\lambda}{(1-x^2)^\beta} \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^\beta\cdot P_\lambda(\alpha) \geqslant \sum(1-x^2)^\beta\cdot P_\lambda^{(\alpha)} \geqslant$$

$$\sqrt{\delta}\cdot 3^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot\sum(1-x^2)^\beta\cdot\sum\frac{\lambda}{(1-x^2)^\beta} \geqslant \sqrt{\delta}\cdot 3^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot(\sum\sqrt{\lambda})^2 \Rightarrow$$

$$P_\lambda^{(\alpha)} \geqslant \sqrt{\delta}(\sum\sqrt{\lambda})^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^\beta\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

等号成立仅当 $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 及 $\lambda = \mu = v = \frac{1}{3}$.

(4)还有一个纯粹的指数推广是:

结论5 设正数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$;正指数 α,β 满足 $\alpha+\beta \geqslant 2$,则有

$$P(\alpha,\beta) \equiv \frac{x^\alpha}{(1-x^2)^\beta} + \frac{y^\alpha}{(1-y^2)^\beta} + \frac{z^\alpha}{(1-z^2)^\beta} \geqslant \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta\cdot 3^{(1-\frac{\alpha+\beta}{2})} \quad (c)$$

特别地,当 $\alpha+\beta=2$ 时,式(c)简化为

$$P(\alpha,\beta) \geqslant \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta$$

证明 由于

$$x(1-x^2) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow P(\alpha,\beta) = \sum\frac{x^\alpha}{(1-x^2)^\beta} = \sum\frac{x^{\alpha+\beta}}{[x(1-x^2)]^\beta} \geqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta\sum(x^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geqslant 3\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta\left(\frac{\sum x^2}{3}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} = 3\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Rightarrow$$

$$P(\alpha,\beta) \geqslant \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta 3^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

等号成立仅当 $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(5) 相应地,还有一个拓广是:

结论6 设正数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$,系数 $\lambda,\mu,v>0$,指数 $\alpha\geqslant 0,\alpha+\beta\geqslant 1$,则有

$$T_\lambda\equiv\sum\frac{(\mu+v)(yz)^{\alpha+\beta}}{x^{\alpha+2\beta}(1-x^2)^\beta}\geqslant 2\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta(\delta 3^{1-\alpha-\beta})^{\frac{1}{2}} \tag{d}$$

特别地,当取 $\alpha=0,\beta=1$ 时,式(d) 即为

$$\sum\frac{(\mu+v)yz}{x^2(1-x^2)}\geqslant 3\sqrt{3\delta} \tag{e}$$

其中

$$\delta=\mu v+v\lambda+\lambda\mu \tag{⑥}$$

略证 设 $\theta=\alpha+\beta\geqslant 1$,由于

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2(\sqrt{3}x+2)\geqslant 0\Rightarrow x(1-x^2)\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}\Rightarrow T_\lambda=\sum\frac{(\mu+v)(yz)^{\alpha+\beta}}{[x(1-x^2)]^\beta}\geqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta\sum(\mu+v)\left(\frac{yz}{x}\right)^\theta\geqslant 2\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta\sqrt{\delta t} \tag{⑦}$$

其中

$$t=\sum\left[\left(\frac{zx}{y}\right)^\theta\left(\frac{xy}{z}\right)^\theta\right]=\sum x^{2\theta}\geqslant 3\left(\frac{\sum x^2}{3}\right)^\theta=3^{1-\theta}\Rightarrow T_\lambda\geqslant 2\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^\beta(\delta\cdot 3^{1-\alpha-\beta})^{\frac{1}{2}}$$

等号成立仅当

$$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ 及 }\lambda=\mu=v$$

(6) 最后,我们建立如下推广了的多元不等式:

结论7 设正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n(2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i=1,\theta,\alpha,\beta$ 均为正数,且满足条件 $\alpha+\theta\beta/(n^\theta-1)\geqslant 1$,则有

$$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^\alpha}{(1-x_i^\theta)^\beta}\geqslant\frac{n^{(1+\theta\beta-\alpha)}}{(n^\theta-1)^\beta} \tag{f}$$

如果将已知条件 $\sum_{i=1}^n x_i=1$ 改为 $\sum_{i=1}^n x_i^k=1(k>0)$,由于

$$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^\alpha}{(1-x_i^\theta)^\beta}=\sum_{i=1}^n\frac{(x_i^k)^{\frac{\alpha}{k}}}{[1-(x_i^k)^{\frac{\theta}{k}}]^\beta}$$

因此,式(f) 右边作置换

$$(\alpha,\theta)\to\left(\frac{\alpha}{k},\frac{\theta}{k}\right)$$

得到

$$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^\alpha}{(1-x_i^\theta)^\beta}\geqslant\frac{n^{(1+\frac{\theta\beta}{k}-\frac{\alpha}{k})}}{(n^{\frac{\theta}{k}}-1)^\beta} \tag{g}$$

相应地,已知条件 $\alpha+\theta\beta/(n^{\theta}-1)\geqslant 1$,变为

$$\frac{\alpha}{k}+\theta\beta/k(n^{\frac{\theta}{k}}-1)\geqslant 1$$

特别地,当在式(f)中取 $\theta=\beta=1$ 时,式(f)简化为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}}{1-x_i}\geqslant\frac{n^{2-\alpha}}{n-1}\qquad\text{(h)}$$

其中 α 满足
$$\alpha+\frac{1}{n-1}\geqslant 1\Rightarrow\alpha\geqslant\frac{n-2}{n-1}$$
这便是20世纪一位国外数学专家建立的结果.式(h)特殊的地方在于其指数 $\alpha_{\min}=\frac{n-2}{n-1}\in(0,1)$,而按常规的方法——应用柯西不等式或切比雪夫不等式,则必须 $\alpha_{\min}=2$ 或 $\alpha_{\min}=1$.因此,式(h)扩大了常规情形下指数 $\alpha\geqslant 1$ 的适应范围,达到了推广的目的.特别地,当 $n=3$ 时,在式(h)中取 $\alpha=\frac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$,便是题6的情形.因此,题6是式(h)的特例,式(h)是题6的背景,而(f)、(g)均为式(h)的推广.

证明 我们记式(f)左边为 P_n,再记

$$b_i=\{(1-x_i^{\theta})[(n^{\theta}-1)x_i^{\theta}]^{\frac{1}{n^{\theta}-1}}\}^{\beta}(\text{应用加权不等式})\leqslant$$
$$\left\{\frac{(1-x_i^{\theta})+\frac{1}{n^{\theta}-1}[(n^{\theta}-1)x_i^{\theta}]}{1+\frac{1}{n^{\theta}-1}}\right\}^{\beta\left(1+\frac{1}{n^{\theta}-1}\right)}\Rightarrow b_i\leqslant\left(\frac{n^{\theta}-1}{n^{\theta}}\right)^{\beta n^{\theta}/(n^{\theta}-1)}\qquad ⑧$$

又设

$$a_i=x_i^{\alpha}[(n^{\theta}-1)x_i^{\theta}]^{\beta/(n^{\theta}-1)}=(n^{\theta}-1)^{\beta/(n^{\theta}-1)}\cdot x_i^{\varphi}\qquad ⑨$$

其中

$$\varphi=\alpha+\frac{\theta\beta}{n^{\theta}-1}\geqslant 1\qquad ⑩$$

于是

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}}{(1-x_i^{\theta})^{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant k\sum_{i=1}^{n}x_i^{\varphi}\qquad ⑪$$

其中

$$K=(n^{\theta}-1)^{\frac{\beta}{n^{\theta}-1}}\cdot\left(\frac{n^{\theta}}{n^{\theta}-1}\right)^{\frac{\beta n^{\theta}}{n^{\theta}-1}}=\left(\frac{n^{\theta n^{\theta}/(n^{\theta}-1)}}{n^{\theta}-1}\right)^{\beta}\qquad ⑫$$

再应用幂平均不等式,得

$$P_n\geqslant nk\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^{\varphi}=nk\left(\frac{1}{n}\right)^{\varphi}=kn^{1-\varphi}\qquad ⑬$$

⑩,⑫ 两式代入式 ⑬ 即得

$$P_n\geqslant\frac{n^{(1+\theta\beta-\alpha)}}{(n^{\theta}-1)^{\beta}}$$

等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

7

为了加强自身的实力,不希望总步别人的后尘,我们自编新题:

题 7 设正数 a,b,c 满足$\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\leqslant 6$,则有

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+1}}\geqslant 1 \tag{S}$$

分析 本题的已知条件颇显特别,而要求证明的式(S)左边是三个分式和,分式根式内的各字母 a,b,c 的指数均高达 3,可见欲证本题,只能巧取,不可强攻.

证明 我们设

$$S=\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\Rightarrow S^2=\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2+2(a^2+b^2+c^2)=$$

$$\frac{1}{2}\sum\left[\left(\frac{ca}{b}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\right]+2(a^2+b^2+c^2)\geqslant\sum a^2+2\sum a^2=3\sum a^2\Rightarrow$$

$$\sum a^2\leqslant\frac{1}{3}S^2\leqslant 12 \tag{①}$$

等号成立仅当 $a=b=c=2$.

又因为

$$2\sqrt{a^3+1}=2\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}\leqslant(a+1)+(a^2-a+1)=a^2+2\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}\geqslant\frac{2}{a^2+2} \tag{②}$$

等号成立仅当 $a^2-a+1=a+1\Rightarrow a=2$,同理可得

$$\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}\geqslant\frac{2}{b^2+2},\frac{1}{\sqrt{c^3+1}}\geqslant\frac{2}{c^2+2} \tag{③}$$

② + ③ 得

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}\geqslant\sum\frac{2}{a^2+2}\geqslant\frac{2\times 9}{\sum(a^2+2)}(\text{应用柯西不等式})=$$

$$\frac{18}{\sum a^2+6}\geqslant\frac{18}{12+6}=1(\text{应用式 ①})$$

即式(S)成立,等号成立仅当 $a=b=c=2$.

(1)细赏上述证法可见,本题的难度和妙度与IMO试题基本相当,如果再从系数和指数上去推广它,那就更加妙不可言了:

推广 7 设正数 a,b,c 满足$\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\leqslant 6$,$\lambda,\mu,v,\theta$ 为任意正数,则有

$$P_\lambda^{(\theta)}\equiv\frac{\mu+v}{(a^3+1)^\theta}+\frac{v+\lambda}{(b^3+1)^\theta}+\frac{\lambda+\mu}{(c^3+1)^\theta}\geqslant 2\sqrt{3^{1-4\theta}(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)} \tag{T}$$

显然,当 $\lambda=\mu=v$ 及 $\theta=\frac{1}{2}$ 时,式(T)立刻化为式(S).可见,我们新建题7是“醉翁之意不在酒”,而其本意是欣赏式(S)的“水色山光”——看到秀美的式(T).

证明 应用前面的结论有

$$a^2+2\geqslant 2\sqrt{a^3+1}\Rightarrow(a^2+2)^{2\theta}\geqslant 4^\theta(a^3+1)^\theta\Rightarrow\frac{1}{(a^3+1)^\theta}\geqslant\frac{4^\theta}{(a^2+2)^{2\theta}}\Rightarrow$$

$$T(\theta)=\sum\frac{1}{[(a^3+1)(b^3+1)]^\theta}\geqslant\sum\frac{16^\theta}{[(a^2+2)(b^2+2)]^{2\theta}}\geqslant$$

$$16^\theta\cdot\frac{(1+1+1)^{1+2\theta}}{[\sum(a^2+2)(b^2+2)]^{2\theta}}\text{(应用权方和不等式)}=$$

$$\frac{3\times 12^{2\theta}}{[\sum(a^2+2)(b^2+2)]^{2\theta}}\geqslant$$

$$\frac{3\times 12^{2\theta}}{\{\frac{1}{3}[\sum(a^2+2)]^2\}^{2\theta}}\text{(应用三元对称不等式)}=$$

$$\frac{3\times 36^{2\theta}}{[\sum(a^2+2)]^{4\theta}}=\frac{3\times 36^{2\theta}}{[\sum(a^2+6)]^{4\theta}}\geqslant$$

$$\frac{3\times 36^{2\theta}}{(12+6)^{4\theta}}=3^{1-4\theta}\Rightarrow T(\theta)\geqslant 3^{1-4\theta}\Rightarrow$$

$$P_\lambda(\theta)=\sum\frac{\mu+v}{(a^3+1)^\theta}\geqslant 2(T(\theta)\sum\mu v)^{\frac{1}{2}}\text{(应用杨克昌不等式)}\geqslant$$

$$2[3^{1-4\theta}(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)]^{\frac{1}{2}}$$

即式(T)成立,等号成立仅当 $a=b=c=2$ 及 $\lambda=\mu=v$.

回首展望,本推广具有特点:第一,已知条件奇异独特,结论式(T)既美妙又高雅;第二,证明过程思路清晰,飞跃“千山万水”,喜降“峨嵋金顶”.

(2) 如果我们设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,那么易得

$$a_i^2+2\geqslant 2(a_i^3+1)^{1/2}\Rightarrow\prod_{i=1}^n(a_i^2+2)\geqslant 2^n\prod_{i=1}^n(a_i^3+1)^{1/2}\text{(应用赫尔特不等式)}\geqslant$$

$$2^n[(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{3}{n}}+1]^{\frac{n}{2}}\tag{U}$$

等号成立仅当 $a_i=2(1\leqslant i\leqslant n)$,式(U)也是一个不错的结论.

(3) 如果我们再设 $\lambda_i>0(1\leqslant i\leqslant n),\sum_{i=1}^n a_i^2\leqslant 4n$,那么

$$a_i^2+2\geqslant 2\sqrt{a_i^3+1}\Rightarrow\frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i^3+1}}\geqslant\frac{2\lambda_i}{a_i^2+2}\Rightarrow P_\lambda=\sum\frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i^3+1}}\geqslant 2\sum\frac{\lambda_i}{a_i^2+2}\geqslant$$

$$\frac{2(\sum\sqrt{\lambda_i})^2}{\sum(a_i^2+2)}=\frac{2(\sum\sqrt{\lambda_i})^2}{\sum a_i^2+2n}\geqslant\frac{2(\sum\sqrt{\lambda_i})^2}{4n+2n}\Rightarrow$$

$$P_\lambda\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^n\sqrt{\lambda_i})^2}{3n}\tag{V}$$

等号成立仅当 $a_i = 2(1 \leqslant i \leqslant n)$，且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

式(V) 也是一个有趣的结论.虽然我们刚才建立了(S)，(T)，(U)，(V) 四个不等式，但是“最美不过夕阳红，温馨又从容”，还是式(T) 最漂亮.

8

我们再欣赏如下妙题：

题 8 设正数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca \geqslant 3$，求证：

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3) \geqslant 27 \tag{W}$$

分析 观察式(W) 左边，结构既对称紧凑又复杂庞大，如果将左边去括号整理配方，那麻烦使人望而生畏，但左边三个括号内的常数均为 3，其积恰好是右边的值 27，结合已知条件，我们猜测式(W) 取等号的条件是

$$\begin{cases} ab+bc+ca=3 \\ a^5-a^2=b^5-b^2=c^5-c^2=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=1$$

因此，我们可尝试如下：

证法 1 由于(a^2-1) 与 a^3-1 同号，因此

$$(a^2-1)(a^3-1) \geqslant 0 \Rightarrow \text{同理}\begin{cases} a^5-a^2+3 \geqslant a^3+2 \\ b^5-b^2+3 \geqslant b^3+2 \\ c^5-c^2+3 \geqslant c^3+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P=\prod(a^5-a^2+3) \geqslant \prod(a^3+2)=(a^3+1+1)(1+b^3+1)(1+1+c^3) \geqslant$$

$$(a+b+c)^3(\text{应用赫尔特不等式}) \geqslant [3(ab+bc+ca)]^{3/2} \geqslant$$

$$(3\times 3)^{3/2}=27(\text{应用 3 元对称不等式}) \Rightarrow \prod(a^5-a^2+3) \geqslant 27$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$.

上述证法先推出 $a^5-a^2+3 \geqslant a^3+2$ 是关键，然后将 a^3+2,b^3+2,c^3+2 进行巧妙地错位排列，应用赫尔特不等式得出 $P \geqslant (a+b+c)^3$ 是技巧，最后应用3元对称不等式直通彼岸是自然.本题也可用比较法证明.

证法 2 由于

$$\begin{aligned}(a^5-a^2+3)-(a^3+2) &= a^5-a^3-a^2+1=a^3(a^2-1)-(a^2-1)= \\ &(a^2-1)(a^3-1)=(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1) \geqslant \\ &0 \Rightarrow a^5-a^2+3 \geqslant a^3+2\end{aligned}$$

以下步骤同证法 1.

以上证法 1 显得非常简洁，它启发我们将式(W) 从 3 个元数推广到多个元数的情形.

推广 8 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 满足 $S_n = a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_n \geqslant n$，指数 $m>0$，则有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^{m+n}-a_i^m+n) \geqslant n^n \tag{X}$$

特别地,当取 $n=3,m=2$ 时,式(X)等价于式(W).证明式(X)有一定难度,不仅要应用赫尔不等式,而且还须应用.

引理 对于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\geqslant\left(\frac{S_n}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

对于上式,大家可用数学归纳法证明(还可以加细成一条漂亮的不等式链).现在我们证明式(X).

证明 由于

$(a_i^m-1)(a_i^n-1)\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow a_i^{m+n}-a_i^m+n\geqslant a_i^n+n-1\Rightarrow$

$$P_n=\prod_{i=1}^{n}(a_i^{m+n}-a_i^m+n)\geqslant\prod_{i=1}^{n}(a_i^n+n-1)=$$

$$(a_1^n+1+\cdots+1)(1+a_2^n+1+\cdots+1)\cdot\cdots\cdot(1+1+\cdots+1+a_n^n)$$

$$(\text{应用赫尔特不等式})\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i)^n=n^n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^n\geqslant$$

$$n^n\left(\frac{S_n}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}(\text{应用引理})\Rightarrow P_n\geqslant n^n$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

9

如果将数学比做广阔无边的宇宙,那么名题妙题就是银河中的星星,有的光芒四射,有的却形态万千,如下题就是银河里飘飞的一条彩带:

题9 设正数 x,y 满足 $x+y=1$,则有

$$\frac{x}{x^2+y^3}+\frac{y}{x^3+y^2}\leqslant\frac{x}{x^3+y^2}+\frac{y}{x^2+y^3}\leqslant\frac{8}{3}\leqslant\frac{16}{9}\left(\frac{x^2+y^3}{x}+\frac{x^3+y^2}{y}\right)\leqslant$$

$$\frac{16}{9}\left(\frac{x^3+y^2}{x}+\frac{x^2+y^3}{y}\right)\tag{Y}$$

观察式(Y),壮如奔腾的"蛟龙",势不可挡.欲征服它,却又不知从何下手.如果按常规方法从左到右(或从右到左),步步紧逼,那将"翻山越岭""万里长征",经验告诉我们:征服长龙,得用利剑将它拦腰斩断,然后各个击破,方可取胜.

证明 第一步:先证明

$$\frac{x^2+y^3}{x}+\frac{x^3+y^2}{y}\geqslant\frac{3}{2}\tag{①}$$

$$\text{上式左边}=x+y+\frac{x^4+y^4}{xy}\geqslant 1+\frac{(x^2+y^2)^2}{2xy}\geqslant 1+x^2+y^2\geqslant$$

$$1+\frac{1}{2}(x+y)^2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

即式 ① 成立,等号成立仅当 $x=y=\frac{1}{2}$.

第二步:再证明

$$\frac{x}{x^3+y^2}+\frac{y}{x^2+y^3}\leqslant\frac{8}{3}\qquad②$$

设 $$t=xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow 0<t\leqslant\frac{1}{4}$$

且 $$\begin{cases}x^2+y^2=1-2t\\x^3+y^3=1-3t\end{cases},\begin{cases}x^4+y^4=2t^2-4t+1\\x^5+y^5=5t^2-5t+1\end{cases}$$

又式 ② 等价于

$$\begin{aligned}&x(x^2+y^3)+y(x^3+y^2)\leqslant\frac{8}{3}(x^3+y^2)(x^2+y^3)\Leftrightarrow(x^3+y^3)+xy(x^2+y^2)\leqslant\\&\frac{8}{3}[(x^5+y^5)+(xy)^2+(xy)^3]\Leftrightarrow(1+3t)+t(1-2t)\leqslant\\&\frac{8}{3}[(5t^2-5t+1)+t^2+t^3]\Leftrightarrow\\&8t^3+54t^2-34t+5\geqslant 0(\text{设 } m=4t\in(0,1])\Leftrightarrow\\&m^3+27m^2-68m+40\geqslant 0\Leftrightarrow\\&(m-1)(m^2+28m-40)\geqslant 0\qquad③\end{aligned}$$

由于 $$\begin{cases}-1<m-1\leqslant 0\\-40<m^2+28m-40\leqslant -11\end{cases}\Rightarrow(m-1)(m^2+28m-40)\geqslant 0$$

即式 ③ 成立,从而式 ② 成立,等号成立仅当 $m=1\Rightarrow t=\frac{1}{4}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

第三步:注意到

$$\begin{aligned}&[x(x^2+y^3)+y(x^3+y^2)]-[x(x^3+y^2)+y(x^2+y^3)]=\\&(x-y)[(x^2+y^3)-(x^3+y^2)]=\\&-(x-y)^2[(x^2+xy+y^2)-(x+y)]=-(x-y)^2[(x+y)^2-xy-(x+y)]=\\&-(x-y)^2(1^2-xy-1)=xy(x-y)^2\geqslant 0\Rightarrow\\&x(x^2+y^3)+y(x^3+y^2)\geqslant x(x^3+y^2)+y(x^2+y^3)\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^3}{y}+\dfrac{x^3+y^2}{x}\geqslant\dfrac{x^2+y^3}{x}+\dfrac{x^3+y^2}{y}&④\\\dfrac{x}{x^3+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^3}\geqslant\dfrac{x}{x^2+y^3}+\dfrac{y}{x^3+y^2}&⑤\end{cases}$$

最后,综合上述三步,将式 ① ~ ⑤ 连接成"一条龙"就是式(Y),等号成立仅当 $x=y=\frac{1}{2}$.

回顾上述证明使我们体会到:当我们遇到复杂的题目时一定要沉着冷静,见机行事,千万别在"临战"前就乱了"阵局",因为"狭路相逢,勇者必胜".

注 (1) 本题是笔者自编的一个代数不等式:如果设

$$\begin{cases}x=\cos^2\theta\\y=\sin^2\theta\end{cases},\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$$

那么我们又可将式(Y)转化为一个奇异的三角不等式链.

(2)我们能否将式(Y)从指数方面推广为:

猜想:设正数 x,y 满足 $x+y=1,m,n\in\mathbf{N}$,且 $m>n$,是否有(其中 $k>0$)

$$\frac{x^m+y^n}{x^k}+\frac{x^n+y^m}{y^k}\geqslant\frac{x^n+y^m}{x^k}+\frac{x^m+y^n}{y^k}\geqslant 2^{k+1-m}+2^{k+1-n}\geqslant$$
$$2(2^m+2^n)^2\left(\frac{x^k}{x^m+y^n}+\frac{y^k}{x^n+y^m}\right)\geqslant$$
$$2(2^m+2^n)^2\left(\frac{x^k}{x^n+y^m}+\frac{y^k}{x^m+y^n}\right)\tag{Z}$$

显然,当 $m=3,n=2$ 时,式(Z)化为式(Y)成立.为此,我们作差

$$P(x,y)=y^k(x^m+y^n)+x^k(x^n+y^m)-[x^k(x^m+y^n)+y^k(x^n+y^m)]=$$
$$(x^k-y^k)[(x^n-y^n)-(x^m-y^m)]=$$
$$(x-y)(x^k-y^k)D(x,y)\tag{⑥}$$

再令 $t=y/x>0$,有

$$D(x,y)=A(x,y)-B(x,y)\tag{⑦}$$
$$\begin{cases}A(x,y)=x^{n+1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\\B(x,y)=x^{m-1}+x^{m-2}y+\cdots+xy^{m-2}+y^{m-1}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}A(x,y)=x^{n-1}(1+t+\cdots+t^{n-1})\\B(x,y)=x^{m-1}(1+t+\cdots+t^{m-1})\end{cases}\tag{⑧}$$

注意到
$$\left.\begin{matrix}0<x<1\\m>n>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1>x^{n-1}>x^{m-1}>0$$

有

$$D(x,y)>x^{m-1}(1+t+\cdots+t^{n-1})-x^{m-1}(1+t+\cdots+t^{m-1})=$$
$$-x^{m-1}(t^n+t^{n+1}+\cdots+t^{m-1})\tag{⑨}$$

及

$$D(x,y)<x^{n-1}(1+t+\cdots+t^{m-1})-x^{m-1}(1+t+\cdots+t^{m-1})=$$
$$(x^{n-1}-x^{m-1})(1+t+\cdots+t^{m-1})\tag{⑩}$$

从⑨,⑩两式不能断定 $D(x,y)\geqslant 0$,因此不能断定 $P(x,y)\geqslant 0$,从而不能断定(Z)对任意 $m>n(m,n\in\mathbf{N},k>0)$ 恒成立.希望大家提供更好的判定方法.

(3)如果我们将本题已知条件 $x+y=1$ 改为 $x+y=2$,那么式(Y)也"随波逐流"为

$$\frac{x}{x^3+y^2}+\frac{y}{x^2+y^3}\leqslant\frac{x}{x^2+y^3}+\frac{y}{x^3+y^2}\leqslant 1\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{x^3+y^2}{x}+\frac{x^2+y^3}{y}\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{x^2+y^3}{x}+\frac{x^3+y^2}{y}\right)\tag{Y_1}$$

从外观上看,式(Y)与式(Y_1)的结构相似,但从顺序上看,却不相同,其证法与式(Y)相似.

(4) 如果我们将式(Y)的已知条件 $x + y = 1$ 改为 $xy = 1$,则有结论:

设 α,β,γ 为正数,且 $\alpha > \gamma$,则

$$\frac{x^{\gamma}}{x^{\alpha} + y^{\beta}} + \frac{y^{\gamma}}{x^{\beta} + y^{\alpha}} \leqslant 1 \leqslant \frac{x^{\alpha}}{x^{\gamma} + y^{\beta}} + \frac{y^{\alpha}}{x^{\beta} + y^{\gamma}} \tag{Y_2}$$

提示:记式(Y_2)左边为 T,由于

$$x^{\alpha+\beta} + 1 - (x^{\beta+\gamma} + x^{\alpha-\gamma}) = (x^{\beta+\gamma} - 1)(x^{\alpha-\gamma} - 1) \geqslant 0 \Rightarrow x^{\alpha+\beta} + 1 \geqslant x^{\beta+\gamma} + x^{\alpha-\gamma} \Rightarrow$$

$$T = \frac{x^{\gamma}}{x^{\alpha} + y^{\beta}} + \frac{y^{\gamma}}{x^{\beta} + y^{\alpha}} = \frac{x^{\beta+\gamma}}{x^{\alpha+\beta} + (xy)^{\beta}} + \frac{x^{\alpha}y^{\gamma}}{x^{\alpha+\beta} + (xy)^{\alpha}} =$$

$$\frac{x^{\beta+\gamma} + x^{\alpha}y^{\gamma}}{x^{\alpha+\beta} + 1} = \frac{x^{\beta+\gamma} + x^{\alpha-\gamma}}{x^{\alpha+\beta} + 1} \leqslant 1$$

费马点与数奥名题

邓寿才

1978 年陕西省中学数学竞赛决赛附加题是：

题目(费马)　设 $\triangle ABC$ 的内角均小于 $120°$，P 为其内部一点，且满足 $\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120°$，$M$ 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，求证：

$$MA + MB + MC \geqslant PA + PB + PC \tag{A}$$

其实，许多数奥书籍上都有此名题，且满足题设条件的特殊点 P，在趣味几何学上，人们通常称其为费马点. 从美学上讲，由于式(A)外观婀娜苗条，因此它是具备美的三要素(简洁美、对称美、和谐美)的线性几何不等式，故不等式(A)脍炙人口、久负盛名，深受广大读者的喜爱.

1　漂亮证明

由于式(A)是优美的趣味线性几何不等式，因此人们均用几何方法证明它.

证法 1　如图 1，分别过 A, B, C 作 PA, PB, PC 的垂线并交于 D, E, F 三点，则

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120° \Rightarrow$$
$$\angle D = \angle E = \angle A = 60° \Rightarrow$$
$$DE = EF = FD = a(\text{边长}) \Rightarrow$$
$$2S_{\triangle DEF} = a(PA + PB + PC) \tag{①}$$

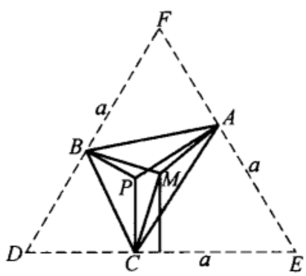


图 1

又

$$2S_{\triangle DEF} \leqslant aMA + aMB + aMC = a(MA + MB + MC) \Rightarrow \tag{②}$$
$$MA + MB + MC \geqslant PA + PB + PC$$

等号成立仅当 $M \equiv P$.

这种证法巧作辅助线 DE, EF, FD，构造正 $\triangle DEF$，再巧妙地应用正三角形的特殊性质证明. 此证法显得简捷明快，异常轻松.

证法 2　如图 2，以 BC 为边作正 $\triangle BCD$，并作 $\triangle BCD$ 的外接圆，联结 AD 交圆于 P，则 P 为费马点，设 $BC = CD = DB = a$，用托勒密定理有

$$PB \cdot CD + PC \cdot BD = PD \cdot BC \Rightarrow a \cdot PB + a \cdot PC = a \cdot PD \Rightarrow PB + PC = PD$$

(1) 当 $M \in \overset{\frown}{BC}$ 且 $M \neq P$ 时,则同样有

$$\begin{cases} MB + MC = MD \\ PA + PB + PC = PA + PD = AD \end{cases} \Rightarrow$$

$$MA + MB + MC = MA + MD > AD \Rightarrow$$

$$MA + MB + MC > PA + PB + PC$$

(2) 当 $M \notin \overset{\frown}{BC}$ 时,由托勒密定理有

$$MB \cdot CD + MC \cdot BD > BC \cdot MD \Rightarrow$$

$$a \cdot MB + a \cdot MC > a \cdot MD \Rightarrow$$

$$MB + MC > MD \Rightarrow$$

$$MA + MB + MC > MA + MD > AD$$

同样可得结论.

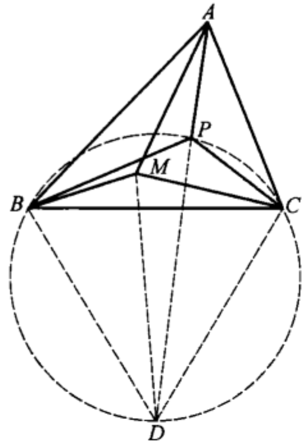


图 2

在平面几何学中,托勒密定理地位显赫,用处广泛,"乐于助人",证法 1 巧作正 $\triangle DEF$,证法 2 则巧作辅圆,在托勒密定理的帮助下漂亮地证明式(A).

证法 3 如图 3,延长 BP 到 K,使 $PK = PC$,联结 KC,则 $\angle BPC = 120^\circ \Rightarrow \angle CPK = 60^\circ \Rightarrow \triangle PCK$ 为正三角形 $\Rightarrow PC = KC$.

再延长 PK 到 R,使 $KR = PA$,联结 RC,在 $\triangle PCA$ 和 $\triangle KCR$ 中

$$\begin{cases} PC = KC \\ \angle CPA = \angle CKR = 120^\circ \\ PA = KR \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underset{(SAS)}{\triangle PCA \cong \triangle KCR} \Rightarrow \begin{cases} CA = CR \\ \angle PCA = \angle KCR \end{cases}$$

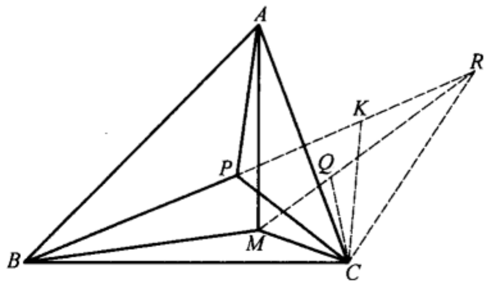


图 3

再以 MC 为边作正 $\triangle MCQ$,联结 QR,在 $\triangle QCR$ 与 $\triangle MCA$ 中,$MC = QC$,$CA = CR$,而

$$\angle MCA = \angle PCA + \angle MCP = \angle KCR + (\angle PCK - \angle PCQ) =$$
$$\angle KCR + \angle QCK = \angle QCR \Rightarrow$$
$$\underset{(SAS)}{\triangle MCA \cong \triangle QCR} \Rightarrow MA = QR \Rightarrow$$
$$MA + MB + MC = QR + MQ + MB \geqslant BR =$$
$$PB + PK + KR = PA + PB + PC \Rightarrow$$
$$MA + MB + MC \geqslant PA + PB + PC$$

本证法是传统的综合证法,连续作了 3 次辅助线,步步为营,直达彼岸.虽然本题是

典型的几何名题,但是我们还是可用非几何方法来证明它.

证法4 如图4,设$\triangle ABC$的三边长为依次为a,b,c,面积为Δ,$\angle AMB=\alpha$,$\angle BMC=\beta$,$\angle CMA=\gamma$,PA,PB,PC,MA,MB,MC依次为p,q,r,x,y,z,因$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$,在$\triangle PAB$中应用余弦定理,有

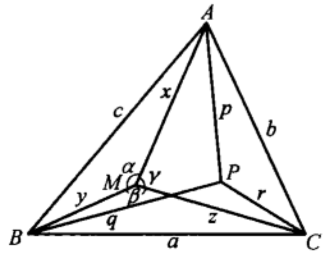


图4

$$c^2=p^2+q^2-2pq\cos 120°\Rightarrow 同理\left\{\begin{array}{l}c^2=p^2+q^2+pq\\a^2=q^2+r^2+qr\\b^2=r^2+p^2+rp\end{array}\right\}\Rightarrow \tag{③}$$

$$\sum a^2=2\sum p^2+\sum qr$$

又

$$\Delta=S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle CPA}=\sum\frac{1}{2}pq\sin 120°=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sum qr\Rightarrow 4\sqrt{3}\Delta=3(qr+rp+pq) \tag{④}$$

$$[③+④]\div 2\Rightarrow \frac{1}{2}\sum a^2+2\sqrt{3}\Delta=(\sum p)^2 \tag{⑤}$$

又

$$\frac{1}{2}\sum a^2=\frac{1}{2}\sum(y^2+z^2-2yz\cos\beta)=\sum x^2-\sum yz\cos\beta \tag{⑥}$$

且

$$\Delta=\frac{1}{2}\sum yz\sin\beta\Rightarrow 2\sqrt{3}\Delta=\sqrt{3}\sum yz\sin\beta \tag{⑦}$$

$$⑥+⑦\Rightarrow \frac{1}{2}\sum a^2+2\sqrt{3}\Delta=\sum x^2+2\sum yz(-\frac{1}{2}\cos\beta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta)=$$

$$\sum x^2+2\sum yz\cos(\beta-120°)\leqslant\sum x^2+2\sum yz=(\sum x)^2\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sum a^2+2\sqrt{3}\Delta\leqslant(\sum x)^2 \tag{⑧}$$

由⑦⑧得 $(\sum x)^2\geqslant(\sum p)^2\Rightarrow x+y+z\geqslant p+q+r$

等号成立仅当$\alpha=\beta=\gamma=120°\Rightarrow M\equiv P$.

本证法的特点是:(1)代数代换;(2)三角运算;(3)巧妙配方(且未添一条辅助线).因此,倍显标新立异,别具一格.

证法5 如图5,设$PA=p$,$PB=q$,$PC=r$,$MP=t\geqslant 0$,$\angle MPB=\theta\in[0,120°]$,则$\angle MPA=120°-\theta$,$\angle MPC=120°+\theta$.

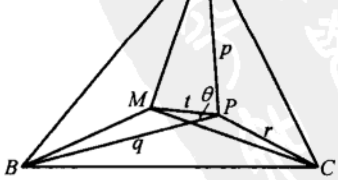


图5

分别在$\triangle MPA$,$\triangle MPB$,$\triangle MPC$中应用余弦定理,并设

$$\begin{cases}MA = A(t) = \sqrt{p^2 + t^2 - 2pt\cos(120° - \theta)} \\ MB = B(t) = \sqrt{q^2 + t^2 - 2qt\cos\theta} \\ MC = C(t) = \sqrt{r^2 + t^2 - 2rt\cos(120° + \theta)}\end{cases}$$

$$S(t) = MA + MB + MC = A(t) + B(t) + C(t)$$

于是有 $A(0) = p, B(0) = q, C(0) = r, S(0) = p + q + r$. 且 $S(t)$ 为连续单调有界函数,具有唯一的驻点和极值.对 $S(t)$ 求导得

$$S'(t) = \frac{t - p\cos(120° - \theta)}{A(t)} + \frac{t - q\cos\theta}{B(t)} + \frac{t - r\cos(120° + \theta)}{C(t)}$$

$$S''(t) = \frac{1}{A(t)} + \frac{1}{B(t)} + \frac{1}{C(t)} - \frac{[t - p\cos(120° - \theta)]^2}{A^3(t)} - \frac{(t - q\cos\theta)^2}{B^3(t)} - \frac{[t - r\cos(120° + \theta)]^2}{C^3(t)}$$

由于
$$\begin{aligned}S'(0) &= -\frac{p}{A(0)}\cos(120° - \theta) - \frac{q}{B(0)}\cos\theta - \frac{r}{C(0)}\cos(120° + \theta) = \\ &-[\cos(120° - \theta) + \cos\theta + \cos(120° + \theta)] = \\ &-(2\cos 120°\cos\theta + \cos\theta) = \\ &-(-\cos\theta + \cos\theta) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S''(0) &= \frac{1}{A(0)} + \frac{1}{B(0)} + \frac{1}{C(0)} - \frac{[p\cos(120° - \theta)]^2}{A^3(0)} - \frac{(q\cos\theta)^2}{B^3(0)} - \\ &\frac{[r\cos(120° + \theta)]^2}{C^3(0)} = \\ &\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{\cos^2(120° - \theta)}{p} - \frac{\cos^2\theta}{q} - \frac{\cos^2(120° + \theta)}{r} = \\ &\frac{\sin^2(120° - \theta)}{p} + \frac{\sin^2\theta}{q} + \frac{\sin^2(120° + \theta)}{r} \Rightarrow \begin{cases}S'(0) = 0 \\ S''(0) > 0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 $t = 0$ 是函数 $S(t)$ 的唯一驻点,所以

$$S(t) \geqslant S(t)_{\min} = S(0) = p + q + r \Rightarrow MA + MB + MC \geqslant PA + PB + PC$$

等号成立仅当 $t = 0 \Leftrightarrow M \equiv P$.

本证法应用余弦定理巧设函数,给人耳目一新的感觉.

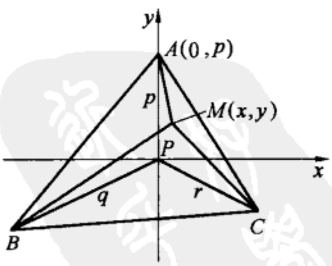


图 6

证法 6 如图 6,设 $PA = p, PB = q, PC = r$,以 P 为原点,PA 所在直线为 y 轴建立直角坐标系.则 A, B, C 的坐标为 $A(0, p), B(-\frac{\sqrt{3}}{2}q, -\frac{1}{2}q), C(\frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{2}r)$,又设 $M(x, y)$.

$$\begin{cases} MA = A(x,y) = \sqrt{x^2+(y-p)^2} \\ MB = B(x,y) = \sqrt{(x+\frac{\sqrt{3}}{2}q)^2+(y+\frac{1}{2}q)^2} \\ MC = C(x,y) = \sqrt{(x-\frac{\sqrt{3}}{2}r)^2+(y+\frac{1}{2}r)^2} \end{cases}$$

$$S = f(x,y) = MA + MB + MC = A(x,y) + B(x,y) + C(x,y)$$

则有 $\quad A(0,0) = p, B(0,0) = q, C(0,0) = r, f(0,0) = p + q + r$

且 $S = f(x,y)$ 是关于 x,y 的连续单调有界二元函数,有唯一极值驻点.

现分别对 x,y 求导得

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{A(x,y)} + \frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}q}{B(x,y)} + \frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}r}{C(x,y)}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{y-p}{A(x,y)} + \frac{y+\frac{1}{2}q}{B(x,y)} + \frac{y+\frac{1}{2}r}{C(x,y)}$$

$$f''_x(x,y) = \frac{1}{A(x,y)} + \frac{1}{B(x,y)} + \frac{1}{C(x,y)} - \frac{x^2}{A^3(x,y)} - \frac{(x-\frac{\sqrt{3}}{2}q)^2}{B^3(x,y)} - \frac{(x-\frac{\sqrt{3}}{2}r)^2}{C^3(x,y)}$$

$$f''_y(x,y) = \frac{1}{A(x,y)} + \frac{1}{B(x,y)} + \frac{1}{C(x,y)} - \frac{(y-p)^2}{A^3(x,y)} - \frac{(y+\frac{1}{2}q)^2}{B^3(x,y)} - \frac{(y+\frac{1}{2}r)^2}{C^3(x,y)}$$

当 $x = y = 0$ 时

$$f'_x(0,0) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}q}{q} + \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}r}{r}\right) = 0$$

$$f'_y(0,0) = \frac{-p}{p} + \frac{\frac{1}{2}q}{q} + \frac{\frac{1}{2}r}{r} = 0$$

$$f''_x(0,0) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}q)^2}{q^3} - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}r)^2}{r^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{4}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}) > 0$$

$$f''_y(0,0) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{p^2}{p^3} - \frac{(\frac{1}{2}q)^2}{q^3} - \frac{(\frac{1}{2}r)^2}{r^3} = \frac{3}{4}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}) > 0$$

因此 $P(0,0)$ 是二元函数 $S = f(x,y)$ 的唯一极值驻点.故

$$S = f(x,y) \geqslant f(x,y)_{\min} = f(0,0) = p + q + r \Rightarrow$$

$$MA + MB + MC \geqslant PA + PB + PC$$

等号成立仅当 $M(x,y) \equiv P(0,0)$.

与前面几种证法相比较,证法 6 虽然较难,但巧建坐标,启发思维,富有新意.

2　名题初探

本题的题设条件是 $\triangle ABC$ 的内角小于 $120°$，如果改为最大角 $\max(A,B,C)\geqslant 120°$ 时，从证法 2 可知，结论变为

$$MA+MB+MC<PA+PB+PC$$

如当 $\angle A\geqslant 120°$ 时

$$PA+PB+PC=AB+AC$$

式(A)告诉我们：内角小于 $120°$ 的 $\triangle ABC$ 所在平面上的点集中，只有 $\triangle ABC$ 内的费马点到三顶点的距离之和为最小.

通常，人们又把费马点叫做三角形顶点距离和最小点. 如果在未知费马点的情况下，可以通过分析和几何作图并严格证明的方法作出最小点 P. 其中证法 2 中的辅助线做法就是其中之一，总计起来约有六种之多，如舒拉特长法、李汉丰法、巴克纳法、史且纳法等. 特别是单墫老师在《几何不等式》一书中介绍的方法最有趣.

设 $S=PA+PB+PC$，P 为所求费马点，则对 $\triangle ABC$(内角小于 $120°$)，S 为定值，于是 PA 与 $PB+PC$ 均为定值常数. 于是我们可以 A 为圆心，$R=PA$ 为半径作圆 A，以 B、C 为两焦点作椭圆，与圆 A 的切点即为费马点 P，如图 7 所示，由椭圆的光学性质有 $\angle 1=\angle 2$，其中 l 为点 P 处的公切线，于是易知

$$\angle 1=\angle 2\Rightarrow\angle APB=\angle APC$$

同理可推得 $\angle BPC=\angle CPA,\angle APB=\angle BPC$

于是 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$

这就是点 P 应具有的特性.

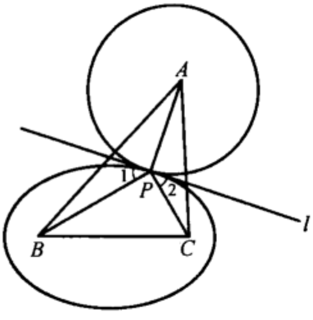


图 7

还有一种费马点的简妙做法为：

分别以边 AB，AC 向外作正 $\triangle ABD$，$\triangle ACE$，联结 BE，CD 交于点 P，则 P 即为所求的费马点.

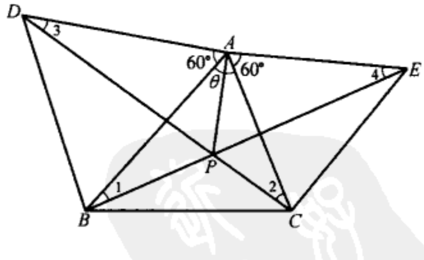


图 8

证明　记 $\angle BAC=\theta\in(0,120°)$，则

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAE=\theta+60°\\ \angle CAD=\theta+60°\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\angle BAE=\angle CAD\\ AB=AD,AE=AC\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\triangle BAE\underset{(SAS)}{\cong}\triangle CAD\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle 3=\angle 4\end{array}\right.\Rightarrow(A,P,B,D)\text{ 与 }(A,P,C,E)\text{ 均共圆}\Rightarrow$$

$$\angle APB=\angle APC=180°-60°=120°\Rightarrow\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$$

大家知道，$\triangle ABC$ 的外心 O、内心 I、垂心 H、重心 G 历来是人们研究的重点，再结合

费马点 P,通过探研,有结论

$$\sum PA \leqslant \sum IA \leqslant \left\{\begin{matrix} \sum GA \leqslant \sqrt{3\sum GA^2} \\ \sum HA \leqslant \sqrt{3\sum GA^2} \end{matrix}\right\} \leqslant \sum OA \tag{B}$$

这一美妙结论在本书 2008 年 · 第二辑(竞赛卷) 中的《"五朵金花",如何排队》一文里可见.

3　加权推广

我们知道,许多美妙的代数不等式和三角不等式都可以从系数方面进行加权推广,其实,许多优美的几何不等式也具有漂亮的加权推广.本篇的费马不等式就是如此.

推广 1(史坦纳)　设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点,且满足

$$\frac{\sin\angle BPC}{\alpha} = \frac{\sin\angle CPA}{\beta} = \frac{\sin\angle APB}{\gamma} \tag{①}$$

则当 M 为 $\triangle ABC$ 内任意一点,$\alpha,\beta,\gamma > 0$ 时,有

$$\alpha MA + \beta MB + \gamma MC \geqslant \alpha PA + \beta PB + \gamma PC \tag{C}$$

显然,在式(C) 中,当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时,有 $\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120°$,点 P 即为费马点,且式(C) 化为式(A).

本身式(A) 就妙不可言,那推广后绝美的式(C) 就趣味无穷了.自然,绝美的定理 —— 史坦纳定理,有优美的证明.

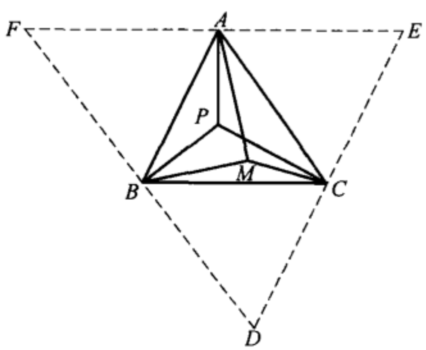


图 9

证明　如图 9,过 A,B,C 分别作 PA,PB,PC 的垂线,这三垂线构成 $\triangle DEF$,则 (D,B,P,C),(E,C,P,A),(F,A,P,B) 均四点共圆,那么 $\angle BPC = \pi - \angle D$,$\angle CPA = \pi - \angle E$,$\angle APB = \pi - \angle F$,且

$$\frac{\sin\angle BPC}{\alpha} = \frac{\sin\angle CPA}{\beta} = \frac{\sin\angle APB}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin D}{\alpha} = \frac{\sin E}{\beta} = \frac{\sin F}{\gamma} \tag{②}$$

在 $\triangle DEF$ 中,依正弦定理,得

$$\frac{EF}{\sin D} = \frac{FD}{\sin E} = \frac{DE}{\sin F} \tag{③}$$

② × ③,并设比值为 K,得

$$\frac{EF}{\alpha} = \frac{FD}{\beta} = \frac{DE}{\gamma} = K \Rightarrow \tag{④}$$

$$EF = K\alpha, FD = K\beta, DE = K\gamma$$

又

$$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle EPF}+S_{\triangle FPD}+S_{\triangle DPE}=\frac{1}{2}(EF\cdot PA+FD\cdot PB+DE\cdot PC)=$$
$$\frac{K}{2}(\alpha PA+\beta PB+\gamma PC) \qquad ⑤$$

而

$$\frac{K}{2}(\alpha MA+\beta MB+\gamma MC)=\frac{1}{2}(EF\cdot MA+FD\cdot MB+DE\cdot MC)\geqslant$$
$$S_{\triangle MEF}+S_{\triangle MDF}+S_{\triangle MDE}=S_{\triangle DEF} \qquad ⑥$$

由 ⑤ 和 ⑥ 得

$$\frac{K}{2}(\alpha MA+\beta MB+\gamma MC)\geqslant\frac{K}{2}(\alpha PA+\beta PB+\gamma PC)\Rightarrow\alpha MA+\beta MB+\gamma MC\geqslant$$
$$\alpha PA+\beta PB+\gamma PC$$

等号成立仅当 $M\equiv P$.

上述证法使人惊叹不已,拍案叫绝.但是,史坦纳毕竟是人,而不是神,他是怎样发现这个绝美的定理的呢?

许多美妙的问题我们不要急于结尾,而要善于寻根逆源,回首反思.就本定理而言:

(1) 即满足条件 ①,又能使式(C) 恒成立的 α,β,γ 必须满足什么条件?难道仅仅有 $\alpha,\beta,\gamma>0$ 就足够了吗?

(2) 本定理有何实用意义呢?下面的题目可以告诉我们.

题目 设在一平原地方有 A,B,C 三个村庄(不在一条直线上),分别有 p,q,r 位学生要上学,问 p,q,r 满足什么关系时,可在 $\triangle ABC$ 内找到一处合理的建校基地?

粗略一想,也许有人会毫不思索地回答:建校基地应当是 $\triangle ABC$ 内的费马点 P,或 $\triangle ABC$ 的重心点 G,或外心点 O,或内心点 I,或垂心点 H.如此严肃的问题,答案是唯一的,最优的.如果你是一位建筑承包商,若能确定出最合理的建校基地,那么你就可以夺标建校.

解 (1) 如果 M 为理想的建校基地,那么 A,B,C 三个村庄学生走的总路程

$$S=pMA+qMB+rMC$$

取最小值.

根据力学平衡原理,制作一张三角形桌面 ABC,使 $\triangle ABC$ 是按三村庄 ABC 按比例缩小而成的相似形,今在 A,B,C 处依次悬挂重量为 p N(牛顿)、q N、r N 的物体,再用细线将它们联系在一起,如图 10 所示,当它们静止平衡时,三线交结点 M 即为所求.

作 $BA'\parallel MC,CA'\parallel MB$,且 $BA'\cap CA'=A'$,则 $MBA'C$ 是平行四边形,且 A,M,A' 三点共线,$AM=MA'$.

设 $\angle BMC=\theta_1,\angle CMA=\theta_2,\angle AMB=\theta_3$,在 $\triangle MBA'$ 中,$\angle MBA'=180^\circ-\theta_1$,$\angle BMA'=180^\circ-\theta_3,\angle BA'M=\angle A'MC=180^\circ-\theta_2$,应用正弦定理有

$$\frac{p}{\sin(180^\circ-\theta_1)}=\frac{q}{\sin(180^\circ-\theta_2)}=\frac{r}{\sin(180^\circ-\theta_3)}\geqslant$$
$$\frac{\sin\theta_1}{p}=\frac{\sin\theta_2}{q}=\frac{\sin\theta_3}{r} \qquad ⑦$$

令

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{p}=\frac{\sin\beta}{q}=\frac{\sin\gamma}{\gamma}=t>0 \qquad ⑦'$$

这就是点 M 应满足的条件.

显然,当 $p=q=r\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=120°\Rightarrow M\equiv P$,即此时点 M 为费马点.

当 p,q,r 不全等时,由史坦纳定理知,点 M 即为最合理的建校基地.

(2) 为了测量出建校基地 M 的准确位置,故计算出点 M 向 $\triangle ABC$ 三边的张角 α,β,γ,由于 $\alpha+\beta+\gamma=360°$,因此,α,β,γ 中最多一个角为锐角,否则,如设

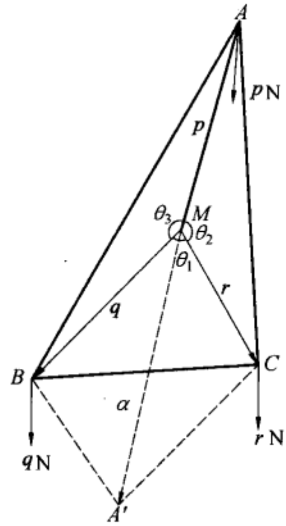


图 10

$$\left.\begin{aligned}&\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})\\&\gamma\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\pi=2\pi$$

矛盾.

a.如果 $\alpha,\beta,\gamma\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 均为钝角,即

$$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\in(-1,0)\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=-\sqrt{1-(pt)^2}\\\cos\beta=-\sqrt{1-(qt)^2}\\\cos\gamma=-\sqrt{1-(rt)^2}\end{cases}$$

又

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi=-\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\Rightarrow\gamma t=$$
$$pt(\sqrt{1-q^2t^2})+qt(\sqrt{1-p^2t^2})\Rightarrow r=\sqrt{p^2-(pqt)^2}+\sqrt{q^2-(pqt)^2}$$

设

$$\begin{cases}x=\sqrt{p^2-(pqt)^2}\\y=\sqrt{q^2-(pqt)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=r\\x^2-y^2=p^2-q^2\end{cases}\Rightarrow x-y=(p^2-q^2)/r\Rightarrow 2rx=r^2+p^2-q^2\Rightarrow$$
$$(2rx)^2=(r^2+p^2-q^2)^2\Rightarrow 4r^2[p^2-(pqt)^2]=(r^2+p^2-q^2)^2\Rightarrow$$
$$(2pqrt)^2=(2rp)^2-(r^2+p^2-q^2)^2=$$
$$(2rp+r^2+p^2-q^2)(2rp-r^2-p^2+q^2)=$$
$$[(r+p)^2-q^2][q^2-(r-p)^2]=(p+q+r)T=S\Rightarrow$$
$$t=\frac{\sqrt{S}}{2pqr}=\frac{\sqrt{(p+q+r)T}}{2pqr} \qquad ⑧$$

其中
$$T=(q+r-p)(r+p-q)(p+q-r)$$

显然,欲使 $t>0$,必须 $T>0$,则易知

$$q+r>p,r+p>q,p+q>r \tag{9}$$

此时,本题答案为:当 p,q,r 满足条件③时,三村庄 A,B,C 内才能寻找到使

$$S=pMA+qMB+rMC$$

取到最小值的合理的建校基地 M,且具体位置是:M 向 $\triangle ABC$ 三边的张角为

$$\begin{cases}\angle BMC=\alpha=\pi-\arcsin(pt)\\ \angle CMA=\beta=\pi-\arcsin(qt)\\ \angle AMB=\gamma=\pi-\arcsin(rt)\end{cases} \tag{10}$$

其中 $$t=\sqrt{\delta}/(2pqr),\delta=(\sum p)\prod(q+r-p)$$

b.当 α,β,γ 中有一个为锐角时,如 α 为锐角时,则有

$$\cos\alpha=\sqrt{1-(qt)^2},\cos\beta=-\sqrt{1-(qt)^2},\cos\gamma=-\sqrt{1-(rt)^2}$$

由 $$-\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\Rightarrow -rt=-tx+ty\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}y-x=-r\\ x^2-y^2=p^2-q^2\end{array}\right\}\Rightarrow x+y=(p^2-q^2)/r\Rightarrow$$

$$2ry=r^2+p^2-q^2\Rightarrow(2ry)^2=(r^2+p^2-q^2)^2\Rightarrow$$

$$4r^2[q^2-(pqt)^2]=$$

$$(r^2+p^2-q^2)^2\Rightarrow(2pqrt)^2=$$

$$(2rq)^2-(r^2+p^2-q^2)^2=\delta\Rightarrow t=\sqrt{\delta}/(2pqr)$$

这并不影响 t 的值,但

$$\begin{cases}\angle BMC=\alpha=\arcsin(pt)\\ \angle CMA=\beta=\pi-\arcsin(qt)\\ \angle AMB=\gamma=\pi-\arcsin(rt)\end{cases}$$

且 $$\arcsin(pt)=\arcsin(qt)+\arcsin(rt)$$

4 多边形推广

不等式(A)是关于三角形(内角$\angle 120°$)的问题,费马点在$\triangle ABC$内,那么,对于任意一个凸四边形 $ABCD$,其内部还存在费马点吗?

如图 11,我们设 P 为四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点,M 为其内任意一点,则显然有

$$MA+MB+MC+MD=(MA+MC)+(MB+MD)\geqslant$$
$$AC+BD\Rightarrow$$
$$MA+MB+MC+MD\geqslant$$
$$PA+PB+PC+PD$$

等号成立仅当 $M\equiv P$.

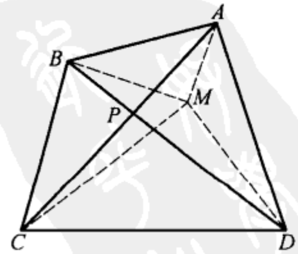


图 11

由此可见,凸四边形两条对角线的交点即为其内的费马点.这是一条简单而又重要的结论.

那么,进一步地,对于凸五形,凸六边形,…,直至凸多边形呢?其实,应用

引理 等角凸多边形内部任意一点到各边的距离为定值.

提示 设 P 为等角凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内任意一点,以 P 为原点,A_1A_2 边的垂线 PD_1 为 x 轴建立直角坐标系,如图 12 所示.设 $PD_i \perp A_iA_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, n; 3 \leqslant n \in \mathbf{N})$,约定

$$A_{n+1} \equiv A_1, |PD_i| = h_i, 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\angle D_iPD_{i+1} = \pi - \angle D_iA_{i+1}D_{i+1} = \pi - \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

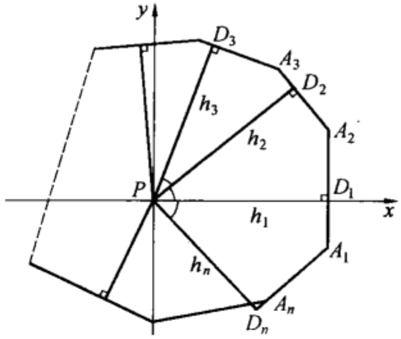


图 12

于是 $\angle D_1PD_i = \dfrac{2i\pi}{n}, 2 \leqslant i \leqslant n-1$

边 A_iA_{i+1} 的倾角为 $\alpha_i = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2i\pi}{n}, 2 \leqslant i \leqslant n-1$

设其方程为 $L_{A_iA_{i+1}}$:

$$y = x\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2i\pi}{n}\right) + b_i$$

即

$$y = -x\cot\frac{2i\pi}{n} + b_i$$

$$x\cos\frac{2i\pi}{n} + y\sin\frac{2i\pi}{n} - p_i = 0 \qquad ①$$

其中 $i = 2, \cdots, n-1$.

$$p_i = b_i\sin\frac{2i\pi}{n}, 2 \leqslant i \leqslant n-1$$

因此 P 到边 $A_iA_{i+1}(2 \leqslant i \leqslant n)$ 的距离为

$$|PD_i| = |p_i| = \left|b_i\sin\frac{2i\pi}{n}\right|$$

最终,问题转化为证明

$$h + \sum_{i=2}^{n}\left|b_i\sin\frac{2i\pi}{n}\right| = \sum_{i=1}^{n}|PD_i|$$

为定值常数.

对于凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$,不能断定其内部一定有一点 P,使 P 向各边的张角相等,即不一定有

$$\angle A_1PA_2 = \angle A_2PA_3 = \cdots = \angle A_nPA_1 = \frac{2\pi}{n}$$

因此我们不能直接应用引理建立推广,而只能建立广义的:

推广 2 设 P 是凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内一点,它到各边的张角依次为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n$,且满足

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)} = 0 \qquad ②$$

则 P 是 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内唯一的费马点.

进一步地,史坦纳定理也可相应地推广为:

推广 3 对一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内存在一点 P,使得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_iPA_i$ 为最小的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\overrightarrow{P}_i=0,\overrightarrow{P}_i=\overrightarrow{PA}_i/|\overrightarrow{PA}_i|,1\leqslant i\leqslant n$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)}=0 \qquad ③$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 是 P 向各边的张角.

显然,当 $n=3$ 时,式③化为

$$\lambda_1e^{i\theta_1}+\lambda_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}+\lambda_3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=0\Rightarrow$$
$$\lambda_1e^{i\theta_1}+\lambda_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}+\lambda_3e^{i2\pi}=0\Rightarrow$$
$$\lambda_1e^{i\theta_1}+\lambda_2e^{i(2\pi-\theta_3)}+\lambda_3e^{i2\pi}=0\Rightarrow$$
$$\lambda_1e^{i\theta_1}+\lambda_2e^{-i\theta_3}+\lambda_3=0\Rightarrow$$
$$(\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_3+\lambda_3)+i(\lambda_1\sin\theta_1-\lambda_2\sin\theta_3)=0\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_3+\lambda_3=0\\ \lambda_1\sin\theta_1-\lambda_2\sin\theta_3=0\end{cases}$$

设
$$\begin{cases}\lambda_1=K\sin\theta_3\\ \lambda_2=K\sin\theta_1\end{cases}(K>0)\Rightarrow\lambda_3=-K(\sin\theta_1\cos\theta_3+\cos\theta_1\sin\theta_3)=$$
$$-K\sin(\theta_1+\theta_3)=-K\sin(2\pi-\theta_2)=K\sin\theta_2\Rightarrow$$
$$\frac{\sin\theta_1}{\lambda_2}=\frac{\sin\theta_2}{\lambda_3}=\frac{\sin\theta_3}{\lambda_1}$$

这与推广 1 中的结论实质上是一致的.

如果我们设 M 为另一点,则有

$$\lambda_1MA_1+\lambda_2MA_2+\cdots+\lambda_nMA_n\geqslant\lambda_1PA_1+\lambda_2PA_2+\cdots+\lambda_nPA_n \qquad (D)$$

此外,费马不等式在四面体中的推广为:

推广 4 若点 P 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的内点,且点 P 对各棱所张视角均相等(等于 $\pi-\arccos\frac{1}{3}$),则点 P 就是该四面体的费马点.

至于空间多面体内是否存在费马点,还有待于我们继续探讨.不过,有如下事实:

正多面体内任意一点到各个面的距离之和为定值.

其实,应用力学平衡原理,也可以证明推广 3,而且还可将推广 3 推广到凸多面体.

5 相关妙论 Ⅰ

在趣味几何学中,关于费马不等式(A)的推广结果并不太多,但围绕它而产生的相

关结论却较多,且它们个个美妙,个个精彩.

结论 1(冷岗松)　设 P 为 $\triangle ABC$ 内的一点,证明:

$$\sqrt{PA}+\sqrt{PB}+\sqrt{PC}<\frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{BC}+\sqrt{CA}+\sqrt{AB}) \tag{A_1}$$

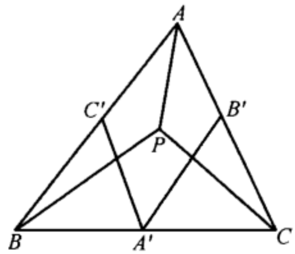


图 13

证法 1　设 BC,AC,BA,PA,PB,PC 依次为 a,b,c,x,y,z,作出 $\triangle ABC$ 三边的中点 A',B',C',则 P 必位于平行四边形 $A'B'AC',C'B'CA',B'A'BC'$ 某一个之中,不妨设 $P\in A'B'AC'$ 内,如图 13 所示,则对凸四边形 $ABA'B'$ 易证

$$PA+PB<BA'+A'B'+B'A\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y<\frac{1}{2}(a+b+c)\\ \text{同理 } z+x<\frac{1}{2}(a+b+c)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$2x+y+z<a+b+c \tag{①}$$

又

$$\text{式}(A_1)\Leftrightarrow(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2<\frac{5}{4}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\Leftrightarrow$$

$$\sum x+2\sum\sqrt{yz}<\frac{5}{4}(\sum a+2\sum\sqrt{bc}) \tag{②}$$

由平均值不等式可得:$2\sqrt{xy}\leqslant 2x+\frac{1}{2}y,2\sqrt{zx}\leqslant 2x+\frac{1}{2}z,2\sqrt{yz}\leqslant y+z$,于是可得

$$\sum x+2\sum\sqrt{yz}\leqslant\frac{5}{2}(2x+y+z)<\frac{5}{2}\sum a \tag{③}$$

式 ② 与式 ③ 比较知,欲证式(A_1),只须证

$$\frac{5}{2}\sum a\leqslant\frac{5}{4}(\sum a+2\sum\sqrt{bc})\Leftrightarrow\sum a\leqslant 2\sum\sqrt{bc} \tag{④}$$

由对称性,不妨设

$$a\geqslant b\geqslant c\Rightarrow 2\sum\sqrt{bc}\geqslant 2(b+c+c)=$$
$$(b+c)+b+3c>a+b+c$$

即式 ④ 成立,从而式(A_1)成立.

证法 2　设 BC,CA,AB 依次为 a,b,c,且不妨设 $a\leqslant b,c$,过 P 作一个以 B,C 为焦点的椭圆,如图 14 所示,与 AB,AC 分别交于 E 和 F,则 $PA\leqslant\max(EA,FA)$,不妨设 $EA\geqslant FA$,则 $PA\leqslant EA$,又

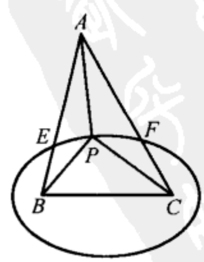


图 14

$$\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\leqslant\sqrt{2(PB+PC)}=\sqrt{2(EB+EC)}\Rightarrow$$
$$\sum\sqrt{PA}\leqslant\sqrt{EA}+\sqrt{2(EB+EC)}=$$

$$\sqrt{EA}+2\left(\frac{EB+EC}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\text{应用柯西不等式})\leqslant$$

$$\left[(1^2+2^2)\left(EA+\frac{EB+EC}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left[5(EA+EB)+\frac{5}{2}(EC-EB)\right]^{\frac{1}{2}}<$$

$$\sqrt{5}(c+\frac{a}{2})^{\frac{1}{2}}<\frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\Rightarrow$$

$$\sum\sqrt{PA}<\frac{\sqrt{5}}{2}\sum\sqrt{a}$$

以上两种证法图文并茂，技巧非凡，而且式(A_1)中的系数$\frac{\sqrt{5}}{2}$是最优的，式(A_1)也是最强的.如果应用赫尔特不等式，还可建立漂亮的：

结论2 设P为$\triangle ABC$(三边长为a,b,c)内任意一点，$0<\theta<1,\lambda,\mu,v>0$，则

$$\lambda PA^\theta+\mu PB^\theta+vPC^\theta\leqslant m(a+b+c)^\theta \tag{B_1}$$

其中

$$m=\left[2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}+\mu^{\frac{1}{1-\theta}}+v^{\frac{1}{1-\theta}}\right]^{1-\theta} \tag{5}$$

证明 设$PA=x,PB=y,PC=z,p,q,r>0,0<\theta<1\Rightarrow 0<1-\theta<1$.并注意到应用赫尔特不等式，有

$$\begin{aligned}(2x+y+z)^\theta(p+q+r)^{1-\theta}\geqslant p^{1-\theta}(2x)^\theta+q^{1-\theta}y^\theta+r^{1-\theta}z^\theta=\\(2^\theta p^{1-\theta})x^\theta+q^{1-\theta}y^\theta+r^{1-\theta}z^\theta\end{aligned} \tag{6}$$

令

$$\begin{cases}\lambda=2^\theta p^{1-\theta}\\ \mu=q^{1-\theta}\\ v=r^{1-\theta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\left(\frac{\lambda}{2^\theta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\\ q=\mu^{\frac{1}{1-\theta}}\\ r=v^{\frac{1}{1-\theta}}\end{cases}\Rightarrow\lambda x^\theta+\mu y^\theta+vz^\theta\leqslant(p+q+r)^{1-\theta}(2x+y+z)^\theta=$$

$$m(2x+y+z)^\theta<m(a+b+c)^\theta$$

即式(B_1)成立.

但当$\theta=\frac{1}{2}$时，$m=\left(\frac{1}{2}\lambda^2+\mu^2+v^2\right)^{\frac{1}{2}}$.再取$\lambda=\mu=v=1$时式$(B_1)$化为

$$\sqrt{PA}+\sqrt{PB}+\sqrt{PC}<\sqrt{\frac{5}{2}(a+b+c)} \tag{7}$$

式⑦比式(A_1)要弱.

式(B_1)中的指数$0<\theta<1$，并指明了$f_\lambda(\theta)=\lambda PA^\theta+\mu PB^\theta+vPC^\theta$的极大值.

现在我们将指数变动为$k>1$，指明

$$S_\lambda(k)=\lambda PA^k+\mu PB^k+vPC^k$$

的极小值.

结论 3 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,最大角小于 $120°$,P 为其内任意一点,$k>1,\lambda,\mu,v>0$,则

$$\lambda PA^k+\mu PB^k+vPC^k\geqslant t\cdot s^k \tag{C_1}$$

其中 Δ 表示 $\triangle ABC$ 的面积,且

$$\begin{cases}s=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\Delta\\ t=(\lambda^{\frac{1}{1-k}}+\mu^{\frac{1}{1-k}}+v^{\frac{1}{1-k}})^{1-k}\end{cases} \tag{8}$$

证明 设 x,y,z 为待定正数,注意到

$$\frac{1}{k}+\frac{k-1}{k}=1\text{ 及}\frac{1}{k},\frac{k-1}{k}\in(0,1)$$

应用赫尔特不等式有

$$(\sum\lambda PA^k)^{\frac{1}{k}}\cdot(\sum x)^{\frac{k-1}{k}}\geqslant\sum[(\lambda PA^k)^{\frac{1}{k}}\cdot x^{\frac{k-1}{k}}]=\sum[(\lambda x^{k-1})^{\frac{1}{k}}\cdot PA] \tag{9}$$

令

$$\begin{cases}\lambda x^{k-1}=1\\ \mu y^{k-1}=1\\ vz^{k-1}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda^{1/(1-k)}\\ y=\mu^{1/(1-k)}\\ z=v^{1/(1-k)}\end{cases}\Rightarrow \tag{10}$$

$$\sum\lambda PA^k\geqslant(\sum x)^{1-k}(\sum PA)^k \tag{11}$$

由于 $\max(A,B,C)<120°$,因此只有当 P 为 $\triangle ABC$ 内的费马点时,$(\sum PA)^k$ 取最小值

$$S^k=\left[\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\triangle\right]^{\frac{k}{2}} \tag{12}$$

⑩,⑪,⑫ 结合即得式(C_1).等号成立仅当 P 为 $\triangle ABC$ 内的费马点,且

$$\frac{\lambda PA^k}{x}=\frac{\mu PB^k}{y}=\frac{vPC^k}{z}\Rightarrow\lambda\cdot PA^{k-1}=\mu\cdot PB^{k-1}=v\cdot PC^{k-1} \tag{13}$$

结论 4(陈计) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,P 为其内任意一点,则

$$PA+PB+PC\geqslant\frac{3abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}} \tag{D_1}$$

证明 (1)我们知道,当 $\triangle ABC$ 的三内角均小于 $120°$ 时,即当 P 为 $\triangle ABC$ 内的费马点时,$\sum PA$ 为最小,记 $PA=x,PB=y,PC=z$,则应用余弦定理有

$$\begin{cases}a^2=y^2+z^2+yz\\ b^2=z^2+x^2+zx\\ c^2=x^2+y^2+xy\end{cases}$$

式(D_1)化为

$$\sqrt{\frac{1}{a^1}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\geqslant\frac{3}{PA+PB+PC}\Leftrightarrow(\sum x)^2\sum\left(\frac{1}{y^2+z^2+yz}\right)\geqslant 9\Leftrightarrow \tag{14}$$

$$[\sum(y^3-z^3)^2+3\sum yz(y-z)(y^3-z^3)]\div\prod(y^2+z^2+yz)\geqslant 0 \tag{15}$$

等号成立仅当 $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为正三角形.

(2) 当 $\angle A\geqslant 120°$ 时,则当 $P\equiv A$ 时,$\sum PA$ 为最小,此时 $PA=0,PB=c,PC=b$,所以

$$
\begin{aligned}
(b+c)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)>(b+c)^2\left[\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right]= \\
1+(b+c)^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geqslant 1+(b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\geqslant \\
1+\frac{1}{2}\times 4^2=9
\end{aligned}
$$

此时,式(D_1)仍然成立.

从上述证法可见,不等式(D_1)是一个非常强的几何不等式.如果未用配方法,而直接应用柯西不等式或别的方法,是难以奏效的.

6 相关妙论 Ⅱ

下面是带权系数的一个非常著名的几何不等式:

结论 5 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上的任意一点,记 $PA=R_1,PB=R_2,PC=R_3$,则对任意实数 $x,y,z\in\mathbf{R}$ 有

$$
(x+y+z)(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2)\geqslant yza^2+zxb^2+xyc^2 \tag{E_1}
$$

其中 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长.

式(E_1)是一个应用广泛的几何不等式,其系数 $x,y,z\in\mathbf{R}$.

如果约定 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,并令 $S=x+y+z,p=x/S,q=y/S,r=z/S$,则 $p,q,r\in(0,1)$,且 $p+q+r=1$,这样式(E_1)可以简化为

$$
pR_1^2+qR_2^2+rR_3^2\geqslant qra^2+rpb^2+pqc^2 \tag{F_1}
$$

显然,式(E_1)是一个非常秀美的几何不等式.

证法 1 我们令

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ}=(\sum x\overrightarrow{PA})/\sum x\Rightarrow 0\leqslant(\sum x)^2\,|\overrightarrow{PQ}|^2=|\sum x\overrightarrow{PA}|^2= \\
\sum x^2\,|\overrightarrow{PA}|^2+2\sum yz\,\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}= \\
\sum x^2\,|\overrightarrow{PA}|^2+\sum yz(|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)= \\
(\sum x)(\sum x\,|\overrightarrow{PA}|^2)-\sum zy\,|\overrightarrow{AB}|^2= \\
(\sum x)(\sum xR_1^2)-\sum zya^2\Rightarrow \\
(\sum x)(\sum xR_1^2)\geqslant\sum yza^2
\end{aligned}
$$

即式(E_1)成立.

证法 2 如图 15,记 $\angle BPC=\pi-\alpha,\angle CPA=\pi-\beta,\angle APB=\pi-\gamma$,应用余弦定理有

$$
\alpha+\beta+\gamma=3\pi-(\angle BPC+\angle CPA+\angle APB)=
$$

$$3\pi - 2\pi = \pi$$

$a^2 = R_2^2 + R_3^2 - 2R_2R_3\cos\angle BPC =$

$R_2^2 + R_3^2 + 2R_2R_3\cos\alpha \Rightarrow$

$yza^2 = yz(R_2^2 + R_3^2) + 2yzR_2R_3\cos\alpha \Rightarrow \sum yza^2 =$

$\sum yz(R_2^2 + R_3^2) + 2\sum(yR_2 \cdot zR_3)\cos\alpha$

(应用三角母不等式)$\leqslant$

$\sum yz(R_2^2 + R_3^2) + \sum(xR_1)^2 = \sum x(y+z)R_1^2 +$

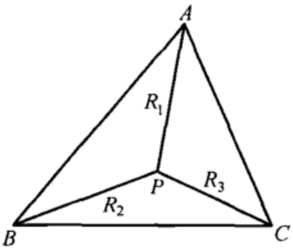


图 15

$\sum(xR_1)^2 =$

$$\sum[x(y+z) + x^2]R_1^2 = (\sum x)(\sum xR_1^2) \Rightarrow (\sum x)(\sum xR_1^2) \geqslant \sum yza^2$$

等号成立仅当

$$\frac{\sin\alpha}{xR_1} = \frac{\sin\beta}{yR_2} = \frac{\sin\gamma}{zR_3} \Rightarrow \frac{\sin\angle BPC}{xPA} = \frac{\sin\angle CPA}{yPB} = \frac{\sin\angle APB}{zPC}$$

结论 5 还可推广到凸多边形中去,这将留在最后.有趣的是,如果我们在式(E_1)中取 $x = a^2, y = b^2, z = c^2$,立即得

$$a^2R_1^2 + b^2R_2^2 + c^2R_3^2 \geqslant \frac{3(abc)^2}{a^2+b^2+c^2} \tag{G_1}$$

如果我们取 $x = a, y = b, z = c$,得

$$(a+b+c)(aR_1^2 + bR_2^2 + cR_3^2) \geqslant bca^2 + cab^2 + abc^2 = abc(a+b+c) \Rightarrow$$

$$aR_1^2 + bR_2^2 + cR_3^2 \geqslant abc \Rightarrow$$

$$aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 \geqslant abc \tag{H_1}$$

式(H_1)是一个相当漂亮的结论,如果说它英俊潇洒、风度翩翩,那么它必有一个如花似玉、貌若天仙的配对式:

结论 6 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,P 为其内任意一点,则有

$$\begin{cases} aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 \geqslant abc \\ aPB \cdot PC + bPC \cdot PA + cPA \cdot PB \geqslant abc \end{cases} \tag{I_1}$$

我们只须证明式(I_1)成立即可.

证法 1 在结论 5 的式(E_1)

$$(x+y+z)(xR_1^2 + yR_2^2 + zR_3^2) \geqslant yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \tag{E_1}$$

中令

$$\begin{cases} x = aR_2R_3 \\ y = bR_3R_1 \Rightarrow \sum x = \sum aR_1R_3 \Rightarrow \\ z = cR_1R_2 \end{cases} \begin{cases} \sum xR_1^2 = R_1R_2R_3\sum aR_1 \\ \sum yza^2 = abcR_1R_2R_3\sum R_1a \end{cases}$$

代入式(E_1)即得式(I_1).等号成立仅当

$$\frac{xR_1}{\sin\angle BPC} = \frac{yR_2}{\sin\angle CPA} = \frac{zR_3}{\sin\angle APB} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{a}{\sin\angle BPC} = \dfrac{b}{\sin\angle CPA} = \dfrac{c}{\sin\angle APB} \\ \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\angle BPC}{\sin A}=\frac{\sin\angle CPA}{\sin B}=\frac{\sin\angle APB}{\sin C}\Rightarrow(\angle BPC,\angle CPA,\angle APB)=$$
$$(\pi-A,\pi-B,\pi-C)\Rightarrow(\angle BPC,\angle CPA,\angle APB)=$$
$$(\angle B+\angle C,\angle C+\angle A,\angle A+\angle B)\Rightarrow P\text{ 为 }\triangle ABC\text{ 的垂心 }H$$

证法 2　如图 16，作 $EP \mathrel{\underline{\parallel}} BC$，$AF \mathrel{\underline{\parallel}} EP$，则 $AF = EP = BC$，$EF = AP$，$EB = PC$，$FB = AC$.

在四边形 $AFEB$ 中和 $AEBP$ 中，由托勒密定理有

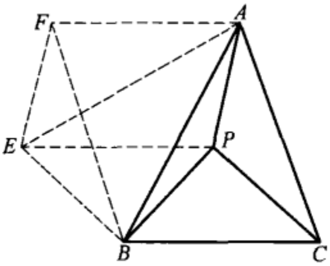


图 16

$$\begin{cases}AB\cdot EF+AF\cdot BE\geqslant AE\cdot FB\\ AP\cdot EB+AE\cdot BP\geqslant AB\cdot EP\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}AB\cdot AP+BC\cdot PC\geqslant AE\cdot AC & ①\\ AD\cdot PC+AE\cdot BP\geqslant AB\cdot BC & ②\end{cases}\Rightarrow$$
$$PA\cdot PB\cdot AB+PB\cdot PC\cdot BC+$$
$$PC\cdot PA\cdot CA=$$
$$PB(PA\cdot AB+PC\cdot BC)+PC\cdot PA\cdot CA\geqslant$$
$$PB\cdot AE\cdot AC+PC\cdot PA\cdot CA=$$
$$AC(PB\cdot AE+PC\cdot PA)\geqslant AC\cdot AB\cdot BC\Rightarrow$$
$$aPB\cdot PC+bPC\cdot PA+cPA\cdot PB\geqslant abc$$

等号成立的充要条件是：① 和 ② 等号同时成立，即 $ABEF$ 与 $AEBP$ 均为圆内接四边形，所以 $APBEF$ 为圆内接五边形，由于 $APEF$ 为平行四边形，故 $APEF$ 为矩形，故 $AP\perp EP$，即 $AP\perp BC$，且 $\angle EBA=\angle EPA=90^\circ$，故 $PC\perp AB$，P 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

以上两种证法中，证法 1 属于三角法，证法 2 属于几何法(巧妙应用托勒密不等式).

证法 3　设 A,B,C,P 所对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3,z，则 $|PA|=|z-z_1|$，$|PB|=|z-z_2|$，$|PC|=|z-z_3|$，$|BC|=a=|z_3-z_2|$，$|CA|=b=|z_1-z_3|$，$|AB|=c=|z_2-z_1|$.

$$f(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}+\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}$$

由于
$$f(z_1)=f(z_2)=f(z_3)=1$$
即方程 $f(z)=1$ 有三个根 z_1,z_2,z_3，但 $f(z)-1=0$ 是关于 z 的一元二次方程，只有两个根，因此 $f(z)\equiv1$，于是

$$\frac{|z-z_1|\cdot|z-z_2|}{|z_3-z_1|\cdot|z_3-z_2|}+\frac{|z-z_2|\cdot|z-z_3|}{|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|}+\frac{|z-z_2|\cdot|z-z_1|}{|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_1|}\geqslant$$
$$|f(z)|\equiv1\Rightarrow\frac{PA\cdot PB}{ab}+\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}\geqslant1\Rightarrow$$
$$aPB\cdot PC+bPC\cdot PA+cPA\cdot PB\geqslant abc$$

证法 4　如以 P 为原点建立复平面，并设点 A,B,C 对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3，且

记

$$t=-(z_1-z_2)^2(z_2-z_3)^2(z_3-z_1)^2$$

$$\begin{cases}\alpha_1=z_3z_2/[(z_3-z_1)(z_2-z_1)]\\ \alpha_2=z_3z_1/[(z_1-z_2)(z_3-z_2)]\\ \alpha_3=z_1z_2/[(z_1-z_3)(z_2-z_3)]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\neq 0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\end{cases}\Rightarrow \tag{3}$$

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\geqslant|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3|=1\Rightarrow \tag{4}$$

$$|z_1z_2(z_1-z_2)|+|z_2z_3(z_2-z_3)|+|z_3z_1(z_3-z_1)|\geqslant$$
$$|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)|\Rightarrow \tag{5}$$
$$aPB\cdot PC+bPC\cdot PA+cPA\cdot PB\geqslant abc$$

等号成立的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 同向,又由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0$.

另外,易证如下等式成立:

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}=\left(\frac{z_3}{z_1-z_2}\right)^2,\ -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}=\left(\frac{z_1}{z_2-z_3}\right)^2,\ -\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2}=\left(\frac{z_2}{z_3-z_1}\right)^2 \tag{6}$$

从而 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

从以上两种证法知,应用复数证明几何问题往往倍显简洁.

结论 6 中的两个结论不仅仅是美观漂亮,而且(I_1)有漂亮的应用,式(H_1)有优美的推广.

结论7(笔者) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,P 为其内任意一点,正数 x,y,z 满足条件

$$\delta=2(xyab+yzbc+zxca)-(xa)^2-(yb)^2-(zc)^2 \tag{7}$$

则有

$$xPA+yPB+zPC\geqslant\sqrt{\delta} \tag{K_1}$$

特别地,当取

$$(x,y,z)=(bc,ca,ab)$$

时,得到新的推论

$$bcPA+caPB+abPC\geqslant\sqrt{3}abc \tag{K'_1}$$

或

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\geqslant\sqrt{3}$$

证明 将(I_1)式变形为等价的

$$M\equiv\frac{PB}{b}\cdot\frac{PC}{c}+\frac{PC}{c}\cdot\frac{PA}{a}+\frac{PA}{a}\cdot\frac{PB}{b}\geqslant 1 \tag{I_1}'$$

应用杨克昌不等式有

$$xPA+yPB+zPC=ax\left(\frac{PA}{a}\right)+by\left(\frac{PB}{b}\right)+cz\left(\frac{PC}{c}\right)\geqslant\sqrt{M\delta}\geqslant\sqrt{\delta}\Rightarrow$$
$$xPA+yPB+zPC\geqslant\sqrt{\delta}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 P 为其中心,$x=y=z$.

如果我们取 $(x,y,z)=(a,b,c)$,并应用海伦公式有

$$\delta=2[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2]-a^4-b^4-c^4=16\Delta^2\Rightarrow$$

$$aPA+bPB+cPC\geqslant 4\Delta \tag{K''_1}$$

若取 $x=y=z=1$,应用“费-哈”不等式有

$$\delta=2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta\Rightarrow PA+PB+PC\geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}\Delta} \tag{K'''_1}$$

现在我们将式(H_1)从一个点 P,推广到两个点 P,P',使之显得绝妙无比,令人称奇.

结论 8(Klamkim)　设 P,P' 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面上任意两点,记 $PA_i=R_i,P'A_i=R'_i$,三边 $a_i=A_{i-1}A_{i+1}$,其中 $A_4=A_1,A_0=A_3,i=1,2,3$,求证:

$$a_1R_1R'_1+a_2R_2R'_2+a_3R_3R'_3\geqslant a_1a_2a_3 \tag{L_1}$$

显然,当 $P\equiv P'$(重合)时,$R_i=R'_i(i=1,2,3)$,式(L_1)化为式(H_1)的等价形式

$$a_1R_1^2+a_2R_2^2+a_3R_3^2\geqslant a_1a_2a_3 \tag{8}$$

证法 1　在结论 5 的式(E_1)

$$(x+y+z)(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2)\geqslant yza_1^2+zxa_2^2+xya_3^2 \tag{9}$$

中取

$$(x,y,z)=\left(\frac{a_1R'_1}{R_1},\frac{a_2R'_2}{R_2},\frac{a_3R'_3}{R_3}\right)\Rightarrow\left(\sum\frac{a_iR'_i}{R_i}\right)\left(\sum a_iR'_iR_i\right)\geqslant$$

$$\sum a_1^2\left(\frac{a_2R'_2}{R_2}\right)\left(\frac{a_3R'_3}{R_3}\right)\Rightarrow m\sum a_1R_1R'_1\geqslant na_1a_2a_3 \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases}m=\sum a_1R'_1R_2R_3\\ n=\sum a_1R_1R'_2R'_3\end{cases}$$

又式 ⑨ 有配对式

$$(x+y+z)(xR'^2_1+yR'^2_2+zR'^2_3)\geqslant yza_1^2+zxa_2^2+xya_3^2 \tag{11}$$

在式 ⑪ 中令

$$(x,y,z)=\left(\frac{a_1R_1}{R'_1},\frac{a_2R_2}{R'_2},\frac{a_3R_3}{R'_3}\right)\Rightarrow n\sum a_1R_1R'_1\geqslant ma_1a_2a_3 \tag{12}$$

⑩ + ⑫ 或 ⑩ × ⑫,均可得到

$$\sum a_iR_iR'_i\geqslant a_1a_2a_3$$

即式(L_1)成立,设 r_i,r'_i 分别是 P 和 P' 到边 $a_i(i=1,2,3)$ 的距离,那么式(L_1)等号成立仅当 ⑪,⑫ 两式等号均成立,即

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_1R_1}{R'_1}=\frac{r_2R_2}{R'_2}=\frac{r_3R_3}{R'_3}\\ \frac{r'_1R'_1}{R_1}=\frac{r'_2R'_2}{R_2}=\frac{r'_3R'_3}{R_3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow r_1r'_1=r_2r'_2=r_3r'_3$$

即 P 和 P' 到三边的距离成反比,这说明 P 和 P' 是关于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一对等角共轭点.

证法 2　为了书写方便,我们对字母作置换

$$(A_1,A_2,A_3)\rightarrow(A,B,C)$$

$$(P,P')\rightarrow(P_1,P_2)$$

$$(a_1,a_2,a_3)\to(a,b,c)$$
$$(R_1,R_2,R_3)\to(a_1,b_1,c_1)$$
$$(R'_1,R'_2,R'_3)\to(a_2,b_2,c_2)$$

这样式(L_1)化为等价形式

$$aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc \qquad (\mathrm{L}_1)'$$

如图 17，顺次以 BC,CA,AB 为反射轴，将 $\triangle P_1BC$，$\triangle P_1CA$，$\triangle P_1AB$ 反射成 $\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$，联结 P_2E，P_2F，P_2D.

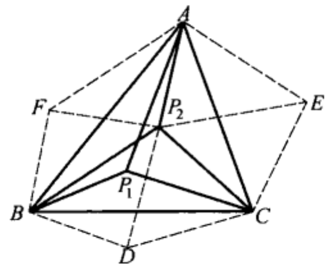


图 17

$$S_{\triangle AFP_2}=\frac{1}{2}AF\cdot AP_2\sin\angle FAP_2=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\angle FAP_2$$
$$S_{\triangle BFP_2}=\frac{1}{2}BF\cdot BP_2\sin\angle FBP_2=\frac{1}{2}b_1b_2\sin\angle FBP_2$$
$$S_{\triangle BDP_2}=\frac{1}{2}BD\cdot BP_2\sin\angle DBP_2=\frac{1}{2}b_1b_2\sin\angle DBP_2$$
$$S_{\triangle CDP_2}=\frac{1}{2}CD\cdot CP_2\sin\angle DCP_2=\frac{1}{2}c_1c_2\sin\angle DCP_2$$
$$S_{\triangle CEP_2}=\frac{1}{2}CE\cdot CP_2\sin\angle ECP_2=\frac{1}{2}c_1c_2\sin\angle ECP_2$$
$$S_{\triangle AEP_2}=\frac{1}{2}AE\cdot AP_2\sin\angle EAP_2=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\angle EAP_2$$
$$(S_{\triangle AFP_2}+S_{\triangle AEP_2})+(S_{\triangle BFP_2}+S_{\triangle BDP_2})+(S_{\triangle CDP_2}+S_{\triangle CEP_2})=2S_{\triangle ABC}$$

因为 $S_{\triangle AFP_2}+S_{\triangle AEP_2}=\frac{1}{2}a_1a_2(\sin\angle FAP_2+\sin\angle EAP_2)=$

$$a_1a_2\sin\frac{1}{2}(\angle FAP_2+\angle EAP_2)\cos\frac{1}{2}(\angle FAP_2-\angle EAP_2)=$$
$$a_1a_2\sin A\cos\frac{1}{2}(\angle FAP_2-\angle EAP_2)\leqslant a_1a_2\sin A\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}S_{\triangle AFP_2}+S_{\triangle AEP_2}\leqslant a_1a_2\sin A\\ \text{同理}\begin{cases}S_{\triangle BFP_2}+S_{\triangle BDP_2}\leqslant b_1b_2\sin B\\ S_{\triangle CDP_2}+S_{\triangle CEP_2}\leqslant c_1c_2\sin C\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$2S_{\triangle ABC}\leqslant a_1a_2\sin A+b_1b_2\sin B+c_1c_2\sin C=$$
$$\frac{1}{2R}(aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2)\geqslant\frac{abc}{2R}\Rightarrow$$
$$aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$$

证法 3 设在复平面上，A,B,C 三点对应的复数为 x_1,x_2,x_3，P_1,P_2 对应的复数为 p_1,p_2，构造二次多项式

$$f(x)=(x-p_1)(x-p_2)$$

据欧氏公式得

$$f(x)=\sum_{j=1}^{3}\prod_{i\neq j}\left(\frac{x-x_i}{x-x_j}\right)f(x_j)=(x-p_1)(x-p_2),1\leqslant i<j\leqslant 3$$

比较上式 x^2 的系数,得

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1\Rightarrow \tag{13}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\(1<i\leqslant 3)}}^{3}\prod_{i\neq j}\frac{|f(x_j)|}{|x_j-x_i|}\geqslant 1 \tag{14}$$

但 $|f(x_1)|=|(x_1-p_1)(x_1-p_2)|=a_1a_2$, $|f(x_2)|=b_1b_2$, $|f(x_3)|=c_1c_2$,且 $|x_1-x_2|=c$, $|x_2-x_3|=a$, $|x_3-x_1|=b$,代入 ⑭ 得

$$\frac{a_1a_2}{bc}+\frac{b_1b_2}{ca}+\frac{c_1c_2}{ab}\geqslant 1\Rightarrow aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$$

前面绝妙的证法 2 是周持忠先生发现的,充分展示了几何的魅力与美丽.

此外,唐立华先生还建立了两个漂亮的结论:

结论 9(唐立华) 设 P 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面上的任意一点,$PA_i=R_i(i=1,2,3)$,$\triangle A_1A_2A_3$ 的面积为 Δ,三边长分别为 a_1,a_2,a_3,则

$$(R_2^2+R_3^2-R_1^2)\sin A_1+(R_3^2+R_1^2+R_2^2)\sin A_2+(R_1^2+R_2^2-R_3^2)\sin A_3\geqslant 2\Delta \tag{M$_1$}$$

$$(a_2^2+a_3^2-a_1^2)R_1^2+(a_3^2+a_1^2-a_2^2)R_2^2+(a_1^2+a_2^2-a_3^2)R_3^2\geqslant\frac{16}{3}\Delta^2 \tag{N$_1$}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=a_3$,且

$$R_1:R_2:R_3=\sin\alpha_1:\sin\alpha_2:\sin\alpha_3$$

其中 $\alpha_i=\angle A_{i+1}PA_{i+2}(A_4=A_1,A_5=A_2,i=1,2,3)$(按同一方向取角).

式(M_1)的证明:记

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(a_2+a_3-a_1)\\ y=\dfrac{1}{2}(a_3+a_1-a_2)\\ z=\dfrac{1}{2}(a_1+a_2-a_3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=y+z\\ a_2=z+x\\ a_3=x+y\end{cases}$$

由于

$$\sum x(y-z)^2\geqslant 0\Leftrightarrow\sum x(y^2+z^2)\geqslant 6xyz\Leftrightarrow 4\sum x(y^2+z^2)\geqslant 3\sum x(y^2+z^2)+6xyz\Leftrightarrow$$

$$4\sum yz(y+z)\geqslant 3\prod(y+z)\Leftrightarrow$$

$$\sum a_1(a_1+a_2-a_3)(a_3+a_1-a_2)\geqslant 3a_1a_2a_3 \tag{15}$$

等号成立仅当

$$x=y=z\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3$$

记 $\lambda_i=(a_1+a_2+a_3-2a_i)>0(i=1,2,3)$,那么式 ⑮ 化为

$$a_1\lambda_2\lambda_3+a_2\lambda_3\lambda_1+a_3\lambda_1\lambda_2\geqslant 3a_1a_2a_3 \tag{16}$$

地方数学竞赛试题研究

由三角形面积公式 $\Delta = a_1a_2a_3/(4R)$,将式(M_1)化为

$$\sum(R_2^2 + R_3^2 - R_1^2)a_1 \geqslant 4R\Delta = a_1a_2a_3 \Leftrightarrow \sum(a_2 + a_3 - a_1)R_1^2 \geqslant a_1a_2a_3 \Leftrightarrow$$

$$\sum \lambda_i R_i^2 \geqslant a_1a_2a_3 \tag{17}$$

由对称性,不妨设

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \Rightarrow \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \Rightarrow \frac{a_1}{\lambda_1} \geqslant \frac{a_2}{\lambda_2} \geqslant \frac{a_3}{\lambda_3} \Rightarrow \lambda_2\lambda_3a_1 \geqslant \lambda_3\lambda_1a_2 \geqslant \lambda_1\lambda_2a_3 \Rightarrow$$

$$\sum(a_2 + a_3 - a_1)R_1^2 = \sum\lambda_iR_i^2 \geqslant \frac{\sum\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}a_i^2}{\sum i}(\text{结论 5 中的式}(E_1)) =$$

$$\frac{\sum(\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}a_i)a_i}{\sum a_i} \geqslant \frac{(\sum\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}a_i)(\sum a_i)}{3\sum a_i}(\text{应用切比雪夫不等式}) =$$

$$\sum\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}a_i \geqslant a_1a_2a_3(\text{应用式⑯}) \Rightarrow$$

$$\sum(a_2 + a_3 - a_1)R_1^2 \geqslant a_1a_2a_3$$

从而式(M_1)成立.

式(N_1)证法 1:设

$$\begin{cases} x = a_2^2 + a_3^2 - a_1^2 \\ y = a_3^2 + a_1^2 - a_2^2 \\ z = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum x = \sum a_1^2 \\ T = \sum(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)R_1^2 = \sum xR_1^2 \end{cases}$$

设

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \Rightarrow a_1^2 \geqslant a_2^2 \geqslant a_3^2 \Rightarrow x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$$

$$yz \geqslant zx \geqslant xy \Rightarrow \sum yza_1^2 = xyz\sum\frac{a_1^2}{x} \geqslant \frac{1}{3}(\sum a_1^2)(\sum\frac{1}{x})xyz =$$

$$\frac{1}{3}(\sum x)\sum xyz \tag{18}$$

由式(E_1)(惯性矩不等式)

$$(\sum x)(\sum xR_1^2) \geqslant \sum yza_1^2 \Rightarrow (\sum x)(\sum xR_1^2) \geqslant \frac{1}{3}(\sum x)(\sum yz) \Rightarrow$$

$$\sum xR_1^2 = T \geqslant \frac{1}{3}\sum yz = \frac{1}{3}\sum(a_3^2 + a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) =$$

$$\frac{1}{3}(2\sum a_2^2a_3^2 - \sum a_1^4) = \frac{16}{3}\Delta^2 \Rightarrow T = \sum xR_1^2 \geqslant \frac{16}{3}\Delta^2$$

即式(N_1)成立,易推得等号成立仅当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形,且 P 为其中心.

证法 2 我们记

$$S = \sum a_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

则

$$S \leqslant 9R^2 = 9\left(\frac{a_1a_2a_3}{4\Delta}\right)^2 \Rightarrow \frac{(a_1a_2a_3)^2}{S} \geqslant \frac{16}{9}\Delta^2 \tag{19}$$

接前面的记法有

$$T = \sum xR_1^2$$

$$x = S - 2a_1^2, y = S - 2a_2^2, z = S - 2a_3^2$$

由式(E_1)有

$$(\sum x)(\sum xR_1^2) \geqslant \sum yza_1^2 \Rightarrow T \geqslant \frac{\sum yza_1^2}{\sum x} = \frac{1}{S}\sum yza_1^2 \Rightarrow$$

$$T \geqslant \frac{1}{S}\sum(S-2a_2^2)(S-2a_3^2)a_1^2 =$$

$$\frac{1}{S}\sum[S^2 - 2(a_2^2+a_3^2)S + 4a_2^2a_3^2]a_1^2 =$$

$$\sum[S - 2(a_2^2+a_3^2) + \frac{4a_2^2a_3^2}{S}]a_1^2 =$$

$$\sum[Sa_1^2 - 2(a_2^2+a_3^2)a_1^2 + \frac{4(a_1a_2a_3)^2}{S}] =$$

$$(\sum a_1^2)S - 2\sum(a_2^2+a_3^2)a_1^2 + \frac{12(a_1a_2a_3)^2}{S} =$$

$$(\sum a_1^2)^2 - 4\sum a_2^2a_3^2 + 12\frac{(a_1a_2a_3)^2}{S} =$$

$$\sum a_1^4 - 2\sum a_2^2a_3^2 + 12\frac{(a_1a_2a_3)^2}{S} \geqslant$$

$$-16\Delta^2 + 12 \times \frac{16}{9}\Delta^2 = \frac{16}{3}\Delta^2 \Rightarrow$$

$$T \geqslant \frac{16}{3}\Delta^2$$

回顾以上各式的证法知,式(M_1)也可按式(N_1)的方法证明,因此式(M_1)可有三种证法.

结论 10 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点,$\lambda,\mu,v > 0$,且 $\lambda + \mu + v \leqslant 1$,则

$$\lambda PA^2 + \mu PB^2 + vPC^2 \geqslant 4\sqrt{\lambda\mu v}\Delta \tag{O_1}$$

证明 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,首先应用式(E_1)有

$$(\sum\lambda)^2(\sum\lambda PA^2) \geqslant (\sum\mu va^2)^2 \geqslant$$

$$(\sum\mu v\cdot v\lambda)[2\sum b^2c^2 - \sum a^4]\text{(应用杨克昌不等式)} =$$

$$16\Delta^2\lambda\mu v(\sum\lambda) \Rightarrow (\sum\lambda PA^2)^2 \geqslant \frac{16\lambda\mu v\Delta^2}{\lambda+\mu+v} \geqslant$$

$$16\lambda\mu v\Delta^2 \Rightarrow \sum\lambda PA^2 \geqslant 4\sqrt{\lambda\mu v}\Delta$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 P 为其内中心,$\lambda = \mu = v = \frac{1}{3}$.

式(O_1)是一个外观非常简洁漂亮的几何不等式.如果 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,P 为其内任意一点,注意到

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C \tag{20}$$

有

$$\prod \tan A = \sum \tan A \geqslant 3(\prod \tan A)^{1/3} \Rightarrow \prod \tan A \geqslant (\sqrt{3})^3 \Rightarrow \sum\left[\frac{\tan A}{(\sqrt{3})^3}\cdot PA^2\right] \geqslant$$

$$4\sqrt{\prod \frac{\tan A}{(\sqrt{3})^3}}\Delta = 4\sqrt{\frac{\prod \tan A}{(\sqrt{3})^9}}\cdot\Delta \geqslant 4\left[\frac{(\sqrt{3}^3)}{(\sqrt{3})^9}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\Delta =$$

$$\frac{4\Delta}{(\sqrt{3})^3} \Rightarrow \sum(\tan A)PA^2 \geqslant 4\Delta \qquad ㉑$$

上述推导颇有技巧,似乎天衣无缝,无懈可击,但是,应用式(O_1)的首要条件是$\lambda + \mu + v \leqslant 1$,而

$$\sum \tan A/(\sqrt{3})^3 \geqslant \frac{3}{(\sqrt{3})^3}(\prod \tan A)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^3}\cdot\sqrt{3} = 1$$

由

$$\sum \tan A/(\sqrt{3})^3 \geqslant 1 \qquad ㉒$$

因此我们刚才粗心大意地应用式(O_1)建立的式 ㉑ 是错误的.

但是,外观如此简洁漂亮的式 ㉑ 真是错误的吗?让我们用另一种新思路来证实,方才甘心.

结论 11 设 P 为锐角 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点,则

$$PA^2\tan A + PB^2\tan B + PC^2\tan C \geqslant 4\Delta \qquad (P_1)$$

证明 如图 18,取 BC 所在直线为 x 轴,过 A 的高线所在直线为 y 轴建立直角坐标系.设 A,B,C 的坐标分别为$A(0,a)$,$B(-b,0)$,$C(c,0)$$(a,b,c>0)$,则有

$$\begin{cases}\tan B = a/b\\ \tan C = a/c\end{cases} \Rightarrow \tan A = -\tan(B+C) = \frac{a(b+c)}{a^2-bc}$$

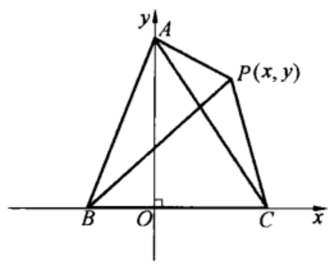


图 18

又由 $A\in(0,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \tan A > 0 \Rightarrow a^2 - bc > 0$

现设点 P 的坐标为$P(x,y)$,则

$$PA^2\tan A + PB^2\tan B + PC^2\tan C =$$

$$[x^2+(y-a)^2]\frac{a(b+c)}{a^2-bc} +$$

$$\frac{a}{b}[(x+b)^2+y^2] + \frac{a}{c}[(x-c)^2+y^2] =$$

$$(x^2+y^2+a^2-2ay)\frac{a(b+c)}{a^2-bc} +$$

$$\frac{a(b+c)}{bc}(x^2+y^2+bc) =$$

$$\frac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}[a^2x^2+(ay-bc)^2+2bc(a^2-bc)] \geqslant$$

$$\frac{a(b+c)}{bc(a^2-bc)}\cdot 2bc(a^2-bc) =$$

$$2a(b+c)=4\Delta \Rightarrow \sum PA^2\tan A \geqslant 4\Delta$$

等号成立仅当 $x=0, y=\frac{bc}{a}$,即点 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心 $H(0,\frac{bc}{a})$.

7 绝美妙论

我们在前面介绍的相关妙论均涉及三角形的范畴,现在我们将视野拓宽到凸多边形平面上去建立更美更妙的结论.

结论 12(冷岗松) 已知 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个正 n 边形,$M_1,M_2,\cdots,M_n$ 是相应边的中点,设 P 是这个 n 边形所在平面上的任意一点,则有

$$\sum_{i=1}^{n} PM_i \geqslant (\cos\frac{\pi}{n})\sum_{i=1}^{n} PA_i \qquad (Q_1)$$

一看便知,式(Q_1)是一个优美的线性几何不等式.

证明 如图 19,设 M_{i-1} 和 M_i 分别是这正 n 边形第 $i-1$ 条边 $A_{i-1}A_i$ 和第 i 条边 A_iA_{i+1} 的中点,在四边形 $PM_{i-1}A_iM_i$ 中应用托勒密定理有

$$A_iM_{i-1}\cdot PM_i + PM_{i-1}\cdot A_iM_i \geqslant PA_i\cdot M_{i-1}M_i \qquad ①$$

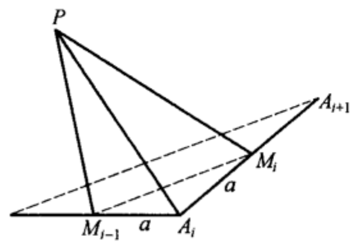


图 19

设 $A_iM_{i-1}=A_iM_i=a$,注意到 $\angle M_{i-1}A_iM_i=\left(\frac{\pi-2}{n}\right)\pi$,在 $\triangle M_{i-1}A_iM_i$ 中应用余弦定理,有

$$M_{i-1}M_i^2 = a^2+a^2-2a^2\cos\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)=$$

$$2a^2+2a^2\cos\frac{2\pi}{n}=$$

$$(2a\cos\frac{\pi}{n})^2 \Rightarrow M_{i-1}M_i = 2a\cos\frac{\pi}{n} \qquad ②$$

代入式 ① 得

$$PM_{i-1}+PM_i \geqslant 2PA_i\cos\frac{\pi}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(PM_{i-1}+PM_i) \geqslant \qquad ③$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}PA_i(\text{约定 } PM_0\equiv PM_n) \Rightarrow$$

$$2\sum_{i=1}^{n}PM_i \geqslant 2(\cos\frac{\pi}{n})\sum_{i=1}^{n}PA_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}PM_i \geqslant (\cos\frac{\pi}{n})\sum_{i=1}^{n}PA_i$$

等号成立仅当 P,M_{i-1},A_i,M_i 共圆,即

$$\angle M_{i-1}PM_i = \pi - \frac{n-2}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}(\text{常数}) \Rightarrow$$

$$\angle M_1PM_2 = \angle M_2PM_3 = \cdots = \angle M_{n-1}PM_n = \angle M_nPM_1 = \frac{2\pi}{n}$$

再加上 M_i 为中点,故 P 为正 n 边形的中心时式(Q_1)等号成立.

上述证法巧妙地应用了托勒密定理.其实,我们还可以从系数、指数两个方面综合推广为

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\lambda_{i+1})PM_i^k \geqslant 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^k\sum_{i=1}^{n}\lambda_i PA_i^k \tag{R_1}$$

其中 $k\geqslant 1,\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n$,约定 $\lambda_{n+1}\equiv\lambda_1)$.

显然,当 $k=1,\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时,式(R_1)化为式(Q_1),且式(R_1)的推论便是式(Q_1)的指数推广

$$\sum_{i=1}^{n}PM_i^k \geqslant (\cos\frac{\pi}{n})^k\sum_{i=1}^{n}PA_i^k \tag{R'_1}$$

这仍是一个不错的结论.

证明　记 $PM_i=x_i(1\leqslant i\leqslant n)$,应用前面的式③,有

$$(\cos\frac{\pi}{n})^k\cdot PA_i^k\leqslant\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^k\leqslant\frac{x_{i-1}^k+x_i^k}{2}\Rightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^k\cdot\lambda_i PA_i^k\leqslant\lambda_i(x_{i-1}^k+x_i^k)\Rightarrow$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i PA_i^k\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^k\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_{i-1}^k+x_i^k)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\lambda_{i+1})x_i^k\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\lambda_{i+1})PM_i^k\geqslant$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^k\sum_{i=1}^{n}\lambda_i PA_i^k$$

著名的惯性矩不等式(E_1),也可以推广到多边形中去.

结论 13(笔者)　设 P 为凸 $n(3\leqslant n\in\mathbf{N}$ 为奇数)边形内任意一点,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为正数,则

$$\sum_{i=1}^{n}t_i PA_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{i+1}\overline{A_iA_{i+1}}^2 \tag{S_1}$$

其中

$$t_i=\lambda_i(\lambda_{i-1}+2\lambda_i\cos\frac{n-2}{n}\pi+\lambda_{i+1})$$

约定

$$\lambda_0\equiv\lambda_n,\lambda_{n+1}\equiv\lambda_1,A_{n+1}\equiv A_1.$$

特别地,当 $n=3$ 时

$$t_i=\lambda_i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),i=1,2,3$$

式(S_1)化为

$$\begin{gathered}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1PA_1^2+\lambda_2PA_2^2+\lambda_3PA_3^2)\geqslant\\ \lambda_1\lambda_2(A_1A_2)^2+\lambda_2\lambda_3(A_2A_3)^2+\lambda_3\lambda_1(A_3A_1)^2\end{gathered} \tag{④}$$

这正是惯性矩不等式.

证明式(S_1)要用到我们在三角学中见过的:

引理(Ozeki)　设 $3\leqslant m\in\mathbf{N}$ 为奇数,$\varphi_i\in(0,\pi)(i=1,2,\cdots,k\in\mathbf{N})$,且 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k=m\pi$,则对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}x_i^2\geqslant(\sec\frac{m}{k}\pi)\left(\sum_{i=1}^{k}x_ix_{i+1}\cos\varphi_i\right) \tag{⑤}$$

证明 设 $PA_i=R_i,A_iA_{i+1}=a_i,\angle A_iPA_{i+1}=\theta_i,\theta_i=\pi-\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=n\pi-\sum_{i=1}^{n}\theta_i=(n-2)\pi$ 为 π 的奇数倍.

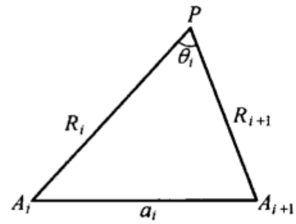


图 20

在 $\triangle PA_iA_{i+1}$ 中应用余弦定理有

$$a_i^2=R_i^2+R_{i+1}^2-2R_iR_{i+1}\cos\theta_i=R_i^2+R_{i+1}^2+2R_iR_{i+1}\cos\alpha_i\Rightarrow$$

$$\lambda_i\lambda_{i+1}a_i^2=\lambda_i\lambda_{i+1}(R_i^2+R_{i+1}^2)+2\lambda_i\lambda_{i+1}R_iR_{i+1}\cos\alpha_i\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{i+1}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{i+1}(R_i^2+R_{i+1}^2)+$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(\lambda_iR_i)(\lambda_{i+1}R_{i+1})\cos\alpha_i\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{i+1}(R_i^2+R_{i+1}^2)+2\cos\theta\sum_{i=1}^{n}(\lambda_iR_i)^2(\theta=(n-2)\pi/n)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(\lambda_{i-1}+2\lambda_i\cos\theta+\lambda_{i+1})R_i^2]\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}t_iR_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{i+1}a_i^2$$

即式(S_1)成立.

式(S_1)的配对式便是惯性矩不等式(E_1)的另一个绝妙推广:

结论 14(陈计) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为正数,P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 所在平面上任意一点,则

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iPA_i^2)\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j(A_iA_j)^2\qquad(T_1)$$

很明显,当 $n=3$ 时,(T_1)即为惯性矩不等式.

略证 设

$$\overrightarrow{PQ}=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{PA_i})/(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\Rightarrow0\leqslant(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2\cdot|\overrightarrow{PQ}|^2=|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\overrightarrow{PA_i}|^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2|\overrightarrow{PA_i}|^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i\lambda_j\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PA_j})=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2|\overrightarrow{PA_i}|^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j(|\overrightarrow{PA_i}|^2+|\overrightarrow{PA_j}|^2-|\overrightarrow{A_iA_j}|^2)=$$

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iPA_i^2)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_j(A_iA_j)^2\Rightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iPA_i^2)\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j(A_iA_j)^2$$

式(S_1)与式(T_1)相比较,各具特色,各有千秋,它俩天然成趣,交相辉映.

最后,我们再建立一个优美的线性几何不等式:

结论 15 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,A_1,B_1,C_1 分别为 AG,BG,CG 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点,$\lambda,\mu,v>0$,且 $\lambda+\mu+v\geqslant3$,则有

$$\lambda GA_1+\mu GB_1+vGC_1\geqslant$$

$$(2-\lambda)GA+(2-\mu)GB+(2-v)GC \qquad (U_1)$$

特别地,当 $\lambda=\mu=v=1$ 时,式(U_1)化为

$$GA_1+GB_1+GC_1 \geqslant GA+GB+GC \qquad ⑤$$

这与费马不等式(A)

$$MA+MB+MC \geqslant PA+PB+PC$$

的外观结构完全一致,简直天生一对,地配一双.

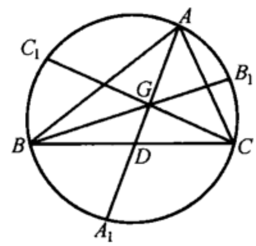


图 21

证明 记 $M_a=AA_1, k^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$.应用相交弦定理得

$$\left.\begin{aligned}&AD\cdot DA_1=BD\cdot DC\Rightarrow m_a(M_a-m_a)=(\frac{a}{2})^2\\&m_a^2=\frac{1}{4}[2(b^2+c^2)-a^2]=2k^2=\frac{3}{4}a^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$m_a(M_a-m_a)=\frac{1}{3}(2k^2-m_a^2)\Rightarrow$$

$$m_aM_a=\frac{2}{3}k^2+\frac{2}{3}m_a^2\geqslant\frac{4}{3}km_a\Rightarrow$$

$$M_a\geqslant\frac{4}{3}k \qquad ⑥$$

又 $\sum m_a^2=\frac{1}{4}\sum[2(b^2+c^2)-a^2]=\frac{3}{4}\sum a^2\Rightarrow 3k^2=\sum m_a^2\geqslant\frac{1}{3}(\sum m_a)^2\Rightarrow$

$$k\geqslant\frac{1}{3}\sum m_a\Rightarrow M_a\geqslant\frac{4}{9}\sum m_a\Rightarrow\lambda M_a\geqslant\frac{4}{9}\lambda\sum m_a\Rightarrow$$

$$\sum\lambda M_a\geqslant\frac{4}{9}(\sum\lambda)(\sum m_a)\geqslant\frac{4}{3}\sum m_a=$$

$$\frac{4}{3}\sum\frac{3}{2}GA=2\sum GA\Rightarrow$$

$$\sum\lambda(GA_1+GA)\geqslant\sum 2GA\Rightarrow\sum\lambda GA_1\geqslant\sum 2GA-\sum\lambda GA=$$

$$\sum(2-\lambda)GA\Rightarrow\sum\lambda GA_1\geqslant\sum(2-\lambda)GA$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\lambda+\mu+v=3$.

8 Brocard 点

我们知道,$\triangle ABC$ 内存在特殊点:重心 G,垂心 H,内心 I,外心 O,在前面,我们又介绍了费马点 P,点 P 的存在条件是

$$\max(A,B,C)\leqslant 120°$$

而且,点 P 的标新立异的特色是:点 P 向 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的张角相等,即 $\angle BPC=\angle CPA=\angle APB=120°$ 这一特性不仅有趣,也便于记忆.

当 $\triangle ABC$ 的最大角大于 120° 时,$\triangle ABC$ 内(或边界上)不存在费马点:凸四边形的两条对角线交点即为费马点.至于凸多边形与凸多面体,情况就复杂了.

如此妙趣的费马点,会孤单寂寞,独守空房吗?自然不会,当然有另一个光彩靓丽的点与之天作之合,那就是美妙迷人的布洛卡尔(Brocard)点 N;点 N 的特性是:点 N 与 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的夹角相等,即

$$\angle NAB = \angle NBC = \angle NCA = \omega$$

或

$$\angle NAC = \angle NBA = \angle NCB = \omega'$$

也许有人对此心怀疑虑.这样的点真的存在吗?它是天边的流星吗?如果存在,怎样作出来呢?这个夹角 ω 是常数吗?

分析 如图22(a),设 N 为 $\triangle ABC$ 内的Brocard点,且 $\angle NAB = \angle NBC = \angle NCA = \omega$,作 $BD \parallel AC$,交 CN 延长线于 D,则 $\angle BDN = \angle NCA = \omega = \angle NAB = \angle NBC$,这表明 A,N,B,D 共圆,BC 为其切线.因此点 N 的做法是:

如图22(b),以 AB 为弦作一恰好与 BC 切于点 B 的圆 O,过切点 B 作 AC 的平行线交圆 O 于 D,联结 CD 交 $\widehat{AB}$ 于点 N,联结 AN,BN,CN,则点 N 即为 $\triangle ABC$ 内的Brocard点.同理可作出另一个点 N',使得 $\angle N'BA = \angle N'CB = \angle N'AC = \omega$!

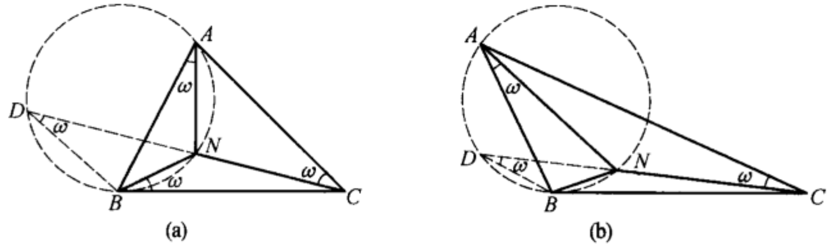


图22

可见,任意一个三角形内不仅有Brocard点,而且还有两个,真是好事成双,出人意料.

那么,自然的问题是,这两个Brocard角相等吗?事实上,我们有

(1)$\varphi = \omega = \omega' \in (0,30°)$.

(2)$\cot \varphi = \cot A + \cot B + \cot C$.

(3)$3\cot A\cot B\cot C \leqslant \tan \varphi \leqslant \dfrac{1}{9}\tan A\tan B\tan C$.

我们先证结论(2)成立.

证法1 如图23,设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,外接圆半径为 R,由于

$\angle ANB = \pi - \angle B,\angle BNC = \pi - \angle C,\angle CNA = \pi - \angle A$

$$\Delta = 2R^2\prod\sin A$$

$$x = b\sin\varphi/\sin(\pi - A) = 2R\sin\varphi\sin B/\sin A$$

$$\Delta_{ANB} = \frac{1}{2}xc\sin\varphi = 2R^2\sin^2\varphi\sin B\sin C\csc A$$

同理可得

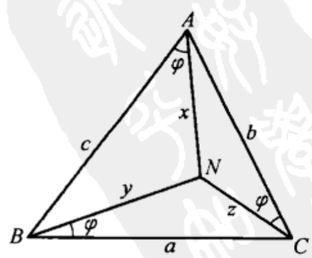


图23

$$\Delta_{BNC} = 2R^2\sin^2\varphi\sin A\sin B\csc B$$
$$\Delta_{CNA} = 2R^2\sin^2\varphi\sin A\sin B\csc C$$

由

$$\Delta_{ANB} + \Delta_{BNC} + \Delta_{CNA} = \Delta \Rightarrow \csc^2\varphi = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C \Rightarrow 1 + \cot^2\varphi = \sum(1 + \cot^2 A) \Rightarrow \cot^2\varphi = \sum\cot^2 A + 2\sum\cot B\cot C = (\sum\cot A)^2 \Rightarrow \cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$$

证法 2 应用余弦定理有

$$\begin{cases}2az\cos\varphi = a^2 + z^2 - y^2 \\ az\sin\varphi = 2\Delta_{NBC}\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\Delta_{NBC}\cdot\cot\varphi = a^2 + z^2 - y^2 \\ \text{同理}\begin{cases}4_{\Delta NCA}\cdot\cot\varphi = b^2 + x^2 - z^2 \\ 4_{\Delta NAB}\cdot\cot\varphi = c^2 + y^2 - x^2\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$4\Delta = 4(\Delta_{NBC} + \Delta_{NCA} + \Delta_{NAB}) = (a^2 + b^2 + c^2)/\cot\varphi \Rightarrow \cot\varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

但 $$\sum\cot A = \sum\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\Delta}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta} \Rightarrow \cot\varphi = \sum\cot A$$

证法 3 如图 24.

$$BC = h_a(\cot B + \cot C) = x_a[\cot\varphi + \cot(C - \varphi)] = x_a\left(\frac{1 + \cot^2\varphi}{\cot\varphi - \cot C}\right) \Rightarrow \frac{\Delta_{NBC}}{\Delta} = \frac{x_a}{h_a} = \frac{(\cot\varphi - \cot C)(\cot B + \cot C)}{1 + \cot^2\varphi}$$

同理

$$\frac{\Delta_{NCA}}{\Delta} = \frac{(\cot\varphi - \cot A)(\cot C + \cot A)}{1 + \cot^2\varphi}$$
$$\frac{\Delta_{NAB}}{\Delta} = \frac{(\cot\varphi - \cot B)(\cot A + \cot B)}{1 + \cot^2\varphi}$$

但

$$\frac{\Delta_{NBC}}{\Delta} + \frac{\Delta_{NCA}}{\Delta} + \frac{\Delta_{NAB}}{\Delta} = 1 \Rightarrow 1 + \cot^2\varphi = \sum(\cot\varphi - \cot A)(\cot C + \cot A) \Rightarrow \cot^2\varphi - 2(\sum\cot A)\cot\varphi + \sum\cot^2 A + \sum\cot B\cot C + 1 = 0 \Rightarrow \cot^2\varphi - 2(\sum\cot A)\cot\varphi +$$

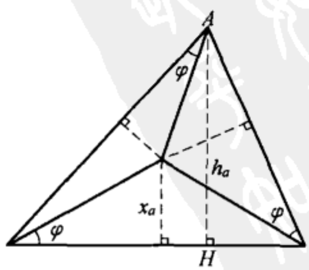


图 24

$$(\sum\cot^2 A+2\sum\cot B\cot C)=0\Rightarrow$$
$$\cot^2\varphi-2(\sum\cot A)\cot\varphi+(\sum\cot A)^2=0\Rightarrow$$
$$(\cot\varphi-\sum\cot A)^2=0\Rightarrow\cot\varphi=\sum\cot A$$

现在我们证明结论(3).

证明 应用柯西不等式有

$$\cot\varphi(\sum\tan A)=(\sum\cot A)(\sum\tan A)\geqslant 9\Rightarrow(\prod\tan A)\cot\varphi\geqslant 9\Rightarrow$$
$$\tan\varphi\leqslant\frac{1}{9}\prod\tan A \qquad ①$$

又

$$\cot\varphi=\sum\cot A=(\sum\tan B\tan C)\prod\cot A\leqslant\frac{1}{3}(\sum\tan A)^2\prod\cot A=$$
$$\frac{1}{3}(\prod\tan A)^2\prod\cot A=\frac{1}{3}\prod\tan A\Rightarrow$$
$$\tan\varphi\geqslant 3\prod\cot A \qquad ②$$

由 ① 和 ② 即得 $$3\prod\cot A\leqslant\tan\varphi\leqslant\frac{1}{9}\prod\tan A$$

且 $$\cot\varphi=\sum\cot A\geqslant 3\cot\left(\frac{\sum A}{3}\right)=3\cot\frac{\pi}{3}=\cot\frac{\pi}{6}\Rightarrow 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}$$

如果我们设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,外接圆半径为 R,由前面的证法 1 有

$$NA=2R\sin\varphi\cdot\frac{b}{a},NB=2R\sin\varphi\cdot\frac{c}{b},NC=2R\sin\varphi\cdot\frac{a}{c}$$

于是有

$$NA\cdot NB\cdot NC=(2R\sin\varphi)^3\leqslant R^3 \qquad \text{(a)}$$

这是一个很有趣的结论,而且,还有

$$\frac{NA}{NB}+\frac{NB}{NC}+\frac{NC}{NA}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geqslant\frac{(a+b+c)^3}{9abc} \qquad \text{(b)}$$

可见,式(b) 也是一个不错的结论.

如果我们再设 λ,μ,v 为正常数,并应用杨克昌不等式,有

$$\frac{\sum(\lambda+\mu)NA\cdot NB}{(2R\sin\varphi)^2}=(\lambda+\mu)\frac{c}{a}+(\mu+v)\frac{a}{b}+(v+\lambda)\frac{b}{c}\geqslant$$
$$2\left[(\sum\lambda\mu)(\sum\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b})\right]^{\frac{1}{2}}=$$
$$2\left[(\sum\lambda\mu)\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant$$
$$2(3\sum\lambda\mu)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow(\lambda+\mu)NA\cdot NB+(\mu+v)NB\cdot NC+$$
$$(v+\lambda)NC\cdot NA\geqslant$$
$$8\sqrt{3(\lambda\mu+\mu v+v\lambda)}(R\sin\varphi)^2 \qquad \text{(c)}$$

显然,这更是一个美妙的结论.

对于凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$. 设其面积为 S, 边 $A_iA_{i+1}=a_i$, $NA_i=x_i(i=1,2,\cdots,n$; 约定 $A_{n+1}=A_1, 3\leqslant n\in\mathbf{N})$, 如图 25 所示, 则有

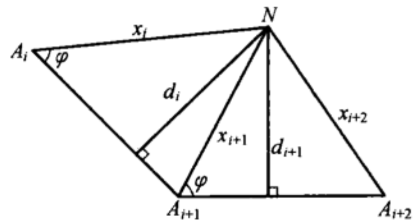


图 25

$$\begin{cases}2x_ia_i\cos\varphi=a_i^2+x_i^2-x_{i+1}^2\\ x_ia_i\sin\varphi=2S_i=2S_{\triangle A_iNA_{i+1}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$4S_i\cot\varphi_i=a_i^2+x_i^2-x_{i+1}^2\Rightarrow$$

$$4(\cot\varphi)\sum_{i=1}^{n}S_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+x_i^2-x_{i+1}^2)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Rightarrow$$

$$\cot\varphi=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{4S} \qquad ③$$

式 ③ 表明: 一但 n 边形确定, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$ 和 S 也随之确定, 从而布洛卡尔角 $\omega=\omega'=\varphi$ 也确定, 并且应用不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 4S\tan\frac{\pi}{n}\Rightarrow\cot\varphi\geqslant\tan\frac{\pi}{n}=$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\Rightarrow\theta<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n} \qquad (d)$$

显然, 当 $n=3$ 时, 有 $0<\varphi\leqslant 30°$.

此外, 如果我们再记 N 到边 A_iA_{i+1} 的距离为 d_i, 则

$$\sin\varphi=\frac{d_i}{x_i}=\sin^n\varphi=\prod_{i=1}^{n}\frac{d_i}{x_i}$$

$$\sin(A_{i+1}-\varphi)=\frac{d_i}{x_{i+1}}\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\sin(A_{i+1}-\varphi)=\prod_{i=1}^{n}\frac{d_i}{x_{i+1}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{d_i}{x_i}\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\sin(A_i-\varphi)=$$

$$\prod_{i=1}^{n}\sin(A_{i+1}-\varphi)=\prod_{i=1}^{n}\frac{d_i}{x_i}\Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}\sin(A_i-\varphi)=(\sin\varphi)^n\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\csc A_i=\prod_{i=1}^{n}(\cot\varphi-\cot A_i)\leqslant$$

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\cot\varphi-\cot A_i)\right]^n=\left(\cot\beta-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cot A_i\right)^n\Rightarrow$$

$$\cot\varphi\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cot A_i+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\csc A_i} \qquad (e)$$

这就是布洛卡尔角 φ 与 n 边形顶角 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之间的三角不等式, 它是如此美丽, 如此迷人.

如果再应用

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\csc A_i\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\csc\frac{(n-2)\pi}{n}=\csc\frac{2\pi}{n}$$

又可得到式(e) 的一个简洁漂亮的推论

$$\cot\varphi \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cot A_i + \csc\frac{2\pi}{n} \tag{f}$$

如果我们再记式(e)右边为 M_n,那么著名的传统不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 4S\tan\frac{\pi}{n}$$

可以加强成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 4M_nS$$

关于 Brocard 点,还有许多新奇美妙的结论等待我们下苦功去探索、钻研、揭示,如:

(1) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,$\triangle ANB$,$\triangle BNC$,$\triangle CNA$ 的外接圆半径依次为 R_1,R_2,R_3,则

$$R_1R_2R_3 = R^3 \geqslant (2r)^3 \tag{g}$$

$$\frac{3}{R} \leqslant \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \leqslant \frac{1}{R}+\frac{1}{r} \tag{h}$$

$$\frac{3}{R^2} \leqslant \frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)^2 \tag{i}$$

(2) 设 N 是 $\triangle ABC$ 的一个 Brocard 点,与它对应的角为 α,N 关于 $\triangle ABC$ 三边的垂足三角形为 $\triangle A'B'C'$,则 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$,且相似比为 $\sin\alpha$.

(3) 设 N 与 N' 是 $\triangle ABC$ 的两个 Brocard 点,N,N' 关于 $\triangle ABC$ 三边的垂足三角形分别为 $\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_2B_2C_2$,则

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$$

这些趣味诱人的结论,大家去研究吧!

一道 IMO 试题的新证法

邓寿才

1

当你翻开《历届 IMO 试题集》(刘培杰主编)第 696 页时,一道妙题立刻展现在你的眼前:

题目 正实数 x,y,z 满足 $xyz\geqslant 1$,证明

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0 \tag{A}$$

本题的显著特点是题意简洁.要求证明的结论式(A)外观优美,结构对称.它是由韩国的 HojooLee 先生提供的,2005 年 7 月在墨西哥梅里达(Merida)举行的第 46 届国际数学奥林匹克(IMO,2005),将本题选为第 3 题,由于本题妙度与难度共存,因此它成为本届 IMO 中得分率最低的一题.

在前述的书中,向读者介绍了 3 种漂亮的证法,并建立了本题的多元推广和配对命题.也许四川的蒋明斌老师对本题情有独钟,偏爱有加,对本题颇有研究,在本刊第二辑第 30 页上,发表了他的美文《第 46 届国际数学奥林匹克试题 3 的证明、加强与推广》,向广大读者介绍一系列新奇的研究成果,读后感叹不已,拍案叫绝.

由于本题妙趣无穷,自然美妙迷人.笔者最近发现,它还有几个巧妙的推广,而且证法不难,重在技巧.

推广 1(系数推广) 设正数 λ,μ,v 与正数 x,y,z(满足 $xyz\geqslant 1$)同序,则

$$\frac{\lambda(x^5-x^2)}{x^5+y^2+z^2}+\frac{\mu(y^5-y^2)}{y^5+z^2+x^2}+\frac{v(z^5-z^2)}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0 \tag{B}$$

特别地,当 $\lambda=\mu=v$ 时,式(B)化为式(A).

证明 由题意知

$$\lambda,\mu,v \text{ 与 } x,y,z \text{ 同序} \Rightarrow \begin{cases}\lambda,\mu,v \text{ 与 } x^2,y^2,z^2 \text{ 同序}\\ \lambda,\mu,v \text{ 与 } \dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z} \text{ 反序}\end{cases}$$

并注意到由 $xyz\geqslant 1$ 有

$$\frac{1}{x}\leqslant yz,\frac{1}{y}\leqslant zx,\frac{1}{z}\leqslant xy$$

应用切比雪夫不等式有

$$\sum\lambda(x^2-\frac{1}{x})=\sum\lambda x^2-\sum\frac{\lambda}{x}\geqslant(\frac{\sum\lambda}{3})(\sum x^2)-(\frac{\sum\lambda}{3})(\sum\frac{1}{x})=$$

$$(\frac{\sum\lambda}{3})(\sum x^2-\sum\frac{1}{x})\geqslant(\frac{\sum\lambda}{3})(\sum x^2-\sum yz)=$$

$$\frac{1}{6}(\sum\lambda)\sum(y-z)^2\geqslant 0\Rightarrow$$

$$\sum\lambda(x^2-\frac{1}{x})\geqslant 0 \quad ①$$

此外,由于

$$x^3(x^3-1)(x^2+y^2+z^2)-(x^3-1)(x^5+y^2+z^2)=(x^3-1)(y^2+z^2)\geqslant 0\Rightarrow$$

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{\lambda(x^5-x^2)}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\dfrac{\lambda(x^2-\frac{1}{x})}{x^2+y^2+z^2}\\ \text{同理}\begin{cases}\dfrac{\mu(y^5-y^2)}{y^5+z^2+x^2}\geqslant\dfrac{\mu(y^2-\frac{1}{y})}{x^2+y^2+z^2}\\ \dfrac{v(z^5-z^2)}{z^5+x^2+y^2}\geqslant\dfrac{v(z^2-\frac{1}{z})}{x^2+y^2+z^2}\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum\frac{\lambda(x^5-x^2)}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{\sum\lambda(x^2-\frac{1}{x})}{x^2+y^2+z^2}\geqslant 0(\text{应用式 ①})$$

即式(B)成立,等号成立仅当 $x=y=z=1$(与系数 λ,μ,v 无关).

2

式(A)又可以从指数、参数两个方面推广为:

推广2 设 α,β,p,q,r,x,y,z 均为正数,且 $xyz\geqslant 1$,则有

$$\frac{x^{5\beta}-x^{2\beta}}{px^{\alpha+3\beta}+qy^{\alpha}+rz^{\alpha}}+\frac{y^{5\beta}-y^{2\beta}}{qy^{\alpha+3\beta}+rz^{\alpha}+px^{\alpha}}+\frac{z^{5\beta}-z^{2\beta}}{rz^{\alpha+3\beta}+px^{\alpha}+qy^{\alpha}}\geqslant 0 \quad (C)$$

显然,当取 $p=q=r,\alpha=2,\beta=1$ 时,式(C)简化为式(A).

证明 由于

$$x^{3\beta}(x^{3\beta}-1)(px^{\alpha}+qy^{\alpha}+rz^{\alpha})-(x^{3\beta}-1)(px^{\alpha+3\beta}+qy^{\alpha}+rz^{\alpha})=$$

$$(x^{3\beta}-1)^2(qy^{\alpha}+rz^{\alpha})\geqslant 0\Rightarrow\frac{x^{5\beta}-x^{2\beta}}{px^{\alpha+3\beta}+qy^{\alpha}+rz^{\alpha}}\geqslant\frac{x^{2\beta}-(\frac{1}{x})^{\beta}}{\sum px^{\alpha}}$$

$$\text{同理}\begin{cases}\dfrac{y^{5\beta}-y^{2\beta}}{qy^{\alpha+3\beta}+\gamma z^{\alpha}+px^{\alpha}}\geqslant\dfrac{y^{2\beta}-(\frac{1}{y})^{\beta}}{\sum px^{\alpha}}\\ \dfrac{z^{5\beta}-z^{2\beta}}{rz^{\alpha+3\beta}+px^{\alpha}+qy^{\alpha}}\geqslant\dfrac{z^{2\beta}-(\frac{1}{z})^{\beta}}{\sum px^{\alpha}}\end{cases}\Rightarrow\sum\left(\frac{x^{5\beta}-x^{2\beta}}{px^{\alpha+3\beta}+qy^{\alpha}+rz^{\alpha}}\right)\geqslant\frac{\sum(x^{2\beta}-\frac{1}{x^{\beta}})}{\sum px^{\alpha}}=$$

$$\frac{\sum x^{2\beta}-\sum(\frac{1}{x})^{\beta}}{\sum px^{\alpha}}\geqslant\frac{\sum x^{2\beta}-\sum(yz)^{\beta}}{\sum px^{\alpha}}=\frac{\sum(y^{\beta}-z^{\beta})^{2}}{2(\sum px^{\alpha})}\geqslant 0$$

这表明式(C)成立,等号成立仅当 $x=y=z=1$(与 α,β,p,q,r 无关).

回顾前面的两个推广,总结它们的证法技巧,我们不难发现,完全可以将(B)、(C)两式珠联合璧成一个优美的

推广 3 设 $\alpha,\beta,\lambda,\mu,v,p,q,r,x,y,z$ 均为正实数,且 $xyz\geqslant 1,\lambda,\mu,v$ 与 x,y,z 同序,则有

$$\frac{\lambda(x^{5\beta}-x^{2\beta})}{px^{\alpha+3\beta}+qy^{\alpha}+rz^{\alpha}}+\frac{\mu(y^{5\beta}-y^{2\beta})}{qy^{\alpha+3\beta}+rz^{\alpha}+px^{\alpha}}+\frac{v(z^{5\beta}-z^{2\beta})}{rz^{\alpha+3\beta}+px^{\alpha}+qy^{\alpha}}\geqslant 0 \qquad \text{(D)}$$

等号成立仅当 $x=y=z=1$(与 $\alpha,\beta,\lambda,\mu,v,p,q,r$ 无关).

3

可见,式(D)是一个外形丰满迷人的"胖美人",它的基本元素是 x,y,z3 个,那么,我们可从元数、参数、系数、指数四个方面建立"一统天下"的综合推广吗?

推广 4(综合推广) 设指数 $\alpha,\beta>0$,正系数 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 与正元数 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 大小同序,且满足 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\geqslant 1,p_1,p_2,\cdots,p_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 为正参数,记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i^{\alpha}$, $S_i=S-p_ix_i^{\alpha}>0(1\leqslant i\leqslant n)$,则有

$$P_{\lambda}\equiv\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{x_i^{(2n-1)\beta}-x_i^{(n-1)\beta}}{p_ix_i^{\alpha+n\beta}+S_i}\right)\geqslant 0 \qquad \text{(E)}$$

特别地,当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n,p_1=p_2=\cdots=p_n$ 时,式(E)化为美文中的式⑲.

证明 记

$$G_i=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_i}\geqslant\frac{1}{x_i}$$

$$M_i=(\sum_{i=1}^{n}x_i^{(n-1)\beta})-x_i^{(n-1)\beta}\geqslant(n-1)G_i^{\beta}\Rightarrow(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{(n-1)\beta}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}M_i\geqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}G_i^{\beta}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{(n-1)\beta}\geqslant\sum_{i=1}^{n}G_i^{\beta}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i^{(n-1)\beta}-\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i})^{\beta}\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)\beta} - \sum_{i=1}^{n} G_i^{\beta} \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)\beta} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\beta} \geqslant 0 \qquad ①$$

由于 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 与 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 大小同序，则 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 与 $(x_1^{(n-1)\beta}, x_2^{(n-1)\beta},\cdots,x_n^{(n-1)\beta})$ 大小同序，而与 $(x_1^{-\beta},x_2^{-\beta},\cdots,x_n^{-\beta})$ 大小反序，应用切比雪夫不等式有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[x_i^{(n-1)\beta} - \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\beta}\right] &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^{(n-1)\beta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{x_i^{\beta}} \geqslant \\ &\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{(n-1)\beta}\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{\beta}} = \\ &\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{(n-1)\beta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{\beta}}\right) \geqslant 0(\text{应用式 ①}) \Rightarrow \\ &\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[x_i^{(n-1)\beta} - \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\beta}\right] \geqslant 0 \qquad ②\end{aligned}$$

由于

$$x_i^{n\beta}(x_i^{n\beta}-1)S - (x_i^{n\beta}-1)(p_i x_i^{\alpha+n\beta} + S_i) = (x_i^{n\beta}-1)[x_i^{n\beta}(S_i + p_i x_i^{\alpha}) - (p_i x_i^{\alpha+n\beta} + S_i)] =$$

$$(x_i^{n\beta}-1)^2 S_i \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x_i^{n\beta}(x_i^{n\beta}-1)}{p_i x_i^{\alpha+n\beta} + S_i} \geqslant \frac{x_i^{n\beta}-1}{S} \Rightarrow \frac{x_i^{(2n-1)\beta} - x_i^{(n-1)\beta}}{p_i x_i^{\alpha+n\beta} + S_i} \geqslant \frac{x_i^{(n-1)\beta} - \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\beta}}{S} \Rightarrow$$

$$P_\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{x_i^{(2n-1)\beta} - x_i^{(n-1)\beta}}{p_i x_i^{\alpha+n\beta} + S_i}\right) \geqslant \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[x_i^{(n-1)\beta} - \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\beta}\right] \geqslant 0(\text{应用式 ②}) \Rightarrow P_\lambda \geqslant 0$$

即式(E)成立，等号成立仅当 $x_i = 1(1 \leqslant i \leqslant n)$（与 $\alpha,\beta,\lambda_i,p_i$ 无关）.

关于一道 IMO 试题研究的补记

邓寿才

1　证　明

如果我们设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，并记

$$S=\sum(a^2+8bc)=(a^2+8bc)+(b^2+8ca)+(c^2+8ab)=\sum a^2+8\sum bc=$$
$$(\sum a)^2+6\sum bc\leqslant(\sum a)^2+2(\sum a)^2\Rightarrow 3(\sum a)^2\geqslant S$$

再设

$$T=\sum\frac{a^2}{a^2+8bc}$$

那么有

$$3(\sum a)^2T\geqslant ST=\sum(a^2+8bc)\sum\frac{a^2}{a^2+8bc}(\text{应用柯西不等式})\geqslant(\sum a)^2\Rightarrow T\geqslant\frac{1}{3}$$

即

$$\frac{a^2}{a^2+8bc}+\frac{b^2}{b^2+8ca}+\frac{c^2}{c^2+8ab}\geqslant\frac{1}{3}\qquad①$$

如果我们再记

$$P=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$$

应用均方根不等式或柯西不等式，均可得到

$$\sqrt{3T}\geqslant P$$

因此，一个自然的问题是，不等式 ① 能加强成

$$P\geqslant 1\qquad(?)$$

吗？

其实，第 42 届 IMO 第 2 题（由韩国提供）即为：

题目　对所有正实数 a,b,c，求证：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1\qquad(\text{A})$$

式(A)是外形“头轻脚重”，结构对称的一个典型的分式形代数不等式，许多数奥资料上都有它的证明，但有一定难度，需要技巧性. 特别是《历届 IMO 试题集》（刘培杰主编，

以后简称书[1])和《国际奥赛试题全解》(以后简称书[2]).这两本书对(A)式作了比较全面系统的推广.笔者对式(A)也情有独钟、偏爱有加,班门弄斧地作几点补充.望广大师生和读者斧正赐教.

首先,我们补充一种新证法:

证明 我们先证明如下结论:

设 $\lambda,\mu,v>0$,且 $\lambda\mu v=1$,则

$$T=\frac{1}{1+2\lambda}+\frac{1}{1+2\mu}+\frac{1}{1+2v}\geqslant 1 \qquad ②$$

由于

$$②\Leftrightarrow\sum(1+2\mu)(1+2v)\geqslant\prod(1+2\lambda)\Leftrightarrow\sum(1+2\mu+2v+4\mu v)\geqslant$$
$$1+2\sum\lambda+4\sum\mu v+8\lambda\mu v\Leftrightarrow 3+4\sum\lambda+4\sum\mu v\geqslant 1+2\sum\lambda+4\sum\mu v+8\Leftrightarrow$$
$$\sum\lambda=\lambda+\mu+v\geqslant 3 \qquad ③$$

式③显然成立,等号成立仅当 $\lambda=\mu=v=1$.

又因为

$$(1+2\lambda)^2=1+4(\lambda+\lambda^2)\geqslant 1+8\sqrt{\lambda^3}\Rightarrow 1+2\lambda\geqslant\sqrt{1+8\lambda^{3/2}}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} T=\sum\dfrac{1}{1+2\lambda}\leqslant\sum\dfrac{1}{\sqrt{1+8\lambda^{3/2}}} \\ \text{令}(\lambda,\mu,v)=\left(\left(\dfrac{bc}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}},\left(\dfrac{ca}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}},\left(\dfrac{ab}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \qquad ④$$

$$P=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant T\geqslant 1$$

即式(A)成立,等号成立仅当

$$\lambda=\mu=v=1\Rightarrow a=b=c$$

前面的式②是一个简洁漂亮的不等式,我们将它作推广,为以后备用.

结论1 设正数 x,y,z 满足 $xyz\geqslant 8$.正数 λ,μ,v 满足 $\lambda\mu v=1$,则

$$\frac{1}{1+\lambda x}+\frac{1}{1+\mu y}+\frac{1}{1+vz}\geqslant\frac{3}{1+t} \qquad (a_1)$$

其中 $t=\sqrt[3]{xyz}$.

证明 式(a_1)等价于

$$(t+1)\sum(1+\mu y)(1+vz)\geqslant 3\prod(1+\lambda x)\Leftrightarrow(t+1)\sum[1+(\mu y+vz)+\mu vyz]\geqslant$$
$$3[1+\sum\lambda x+\sum\lambda\mu xy+\lambda\mu vxyz]\Leftrightarrow$$
$$(t+1)(3+2\sum\lambda x+\sum\mu vyz)=$$
$$3(t^3+1)+3\sum\lambda x+3\sum\lambda\mu xy\Leftrightarrow$$
$$(t-2)\sum\mu vyz+(2t-1)\sum\lambda x\geqslant 3(t^3-t) \qquad ⑤$$

易证

$$\sum\lambda x\geqslant 3(\lambda\mu vxyz)^{1/3}=3t$$
$$\sum\mu vyz\geqslant 3(\lambda\mu vxyz)^{2/3}=3t^2$$

因此式 ⑤ 左边大于等于

$$3t^2(t-2)+3t(2t-1)=3(t^3-t)$$

即式 ⑤ 成立,从而式(a_1) 成立.等号成立仅当 $\lambda=\mu=v=1$ 及 $x=y=z\geqslant 2$.

至于式(a_1) 的再推广,我们以后讨论.

2 加 强

从表面上看,式(A) 好像“如钢似铁”,其实它并非最强.据笔者初探,它至少有 7 种加强,其中最简洁的加强式为:

加强 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\geqslant 1 \tag{B}$$

如果我们记式(B) 左边为 P',则显然有

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\geqslant 1\Leftrightarrow P\geqslant P'\geqslant 1$$

因此式(B) 比式(A) 要强.

证明 记 $G=abc,t=\frac{1}{3}\sum a^3,m=\frac{1}{6}\sum a(b^2+c^2)\geqslant G$,则有

$$P'=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}=\sum\frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^3+2a(b+c)^2}}(\text{应用权方和不等式})\geqslant$$

$$\frac{(\sum a)^{1+\frac{1}{2}}}{\{\sum[a^3+2a(b+c)^2]\}^{1/2}}=\left[\frac{(\sum a)^3}{\sum a^3+2\sum a(b+c)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left[\frac{\sum a^3+3\sum a(b^2+c^2)+6G}{3t+2\sum a(b^2+c^2)+12G}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{3t+2\sum a(b^2+c^2)+6m+6G}{3t+2\sum a(b^2+c^2)+12G}\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$\left(\frac{3t+12m+6G+6G}{3t+12m+12G}\right)^{\frac{1}{2}}=1\Rightarrow P'\geqslant 1$$

等号成立仅当 $a=b=c$.

3 配 对

由于式(A) 足够漂亮,自然“风流偶傥”,配对的“情侣” 多多.

设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则有

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+8bc}+\sqrt{b^2+8ca}+\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant\frac{1}{3} \tag{A_1}$$

证明 应用前面的结论有

$$9(\sum a)^2\geqslant 3\sum(a^2+8bc)\geqslant(\sum\sqrt{a^2+8bc})^2\Rightarrow 3\sum a\geqslant\sum\sqrt{a^2+8bc}\Rightarrow$$

$$\frac{\sum a}{\sum \sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \frac{1}{3}$$

等号成立仅当 $a=b=c$.

式(A)和式(A_1)的外形结构有相似之处.我们视式(A_1)为式(A)的一个配对式.

如果我们将式(A)左边各分式的分子与分母交换位置.翻个跟斗,就得到它的另一个配对式

$$M=\sum \frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a} \geqslant 9 \tag{A_2}$$

而且,式(A_2)还可以加强为

$$m=\prod\left(\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a}\right) \geqslant 27 \tag{A_3}$$

式(A_3)的证明较简单,利用它,易将式(A_2)加权推广为:

设 a,b,c 及 λ,μ,v 均为正数,则

$$(\mu+v)x+(v+\lambda)y+(\lambda+\mu)z \geqslant 6\sqrt{3(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)} \tag{A_4}$$

其中 x,y,z 依次表示式(A_2)左边和式里的三项.

式(A)最"喜欢"的配对式是:

设 $a,b,c>0$,则有(假定 $10bc-a^2,10ca-b^2,10ab-c^2$ 均为正数)

$$\frac{a}{\sqrt{10bc-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{10ca-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{10ab-c^2}} \geqslant 1 \tag{A_5}$$

证明 记 $G=abc,3t=\sum a^3$,则

$$T=\sum \frac{a}{\sqrt{10bc-a^2}}=\sum \frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{10G-a^3}} \geqslant \frac{(\sum a)^{1+\frac{1}{2}}}{[\sum(10G-a^3)]^{1/2}}=\left[\frac{(\sum a)^3}{30G-\sum a^3}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\left(\frac{\sum a^3+24G}{30G-\sum a^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3t+24G}{30G-3t}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{8G+t}{10G-t}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[1+\dfrac{2(t-G)}{10G-t}\right]^{\frac{1}{2}} \\ 0<G \leqslant t<10G\end{array}\right\} \Rightarrow T \geqslant 1$$

等号成立仅当 $a=b=c$.

仿照式(B)的加强技巧,易将式(A_5)加强为

$$\sum \frac{a}{\sqrt{\frac{5}{2}(b+c)^2-a^2}} \geqslant 1 \tag{A_6}$$

设 $a,b,c>0$,则有

$$\frac{a}{\sqrt{6a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{6b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{6c^2+3ab}} \leqslant 1 \tag{A_7}$$

式(A_7)是式(A)最"偏爱"的配对式. 因为式(A_7)可将式(A)完善成一个优美的双向不等式

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant 1 \geqslant \sum \frac{a}{\sqrt{6a^2+3bc}} \tag{A'}$$

恰似"微雨燕双飞".

证明 设 $x,y,z>0$ 满足 $xyz=1$. 记 $S=x+y+z, t=yz+zx+xy$, 则 $t \geqslant 3(xyz)^{2/3}=3$.

$$\sum \frac{1}{2+x}-1=\frac{12+4s+t}{9+4s+2t}-1=\frac{3-t}{9+4s+2t} \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\sum \frac{1}{2+x}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z} \leqslant 1 \Rightarrow \tag{①}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum \frac{1}{\sqrt{2+x}} \leqslant \sqrt{3\sum \frac{1}{2+x}} \leqslant \sqrt{3} \\ \text{令}(x,y,z)=\left(\frac{bc}{a^2},\frac{ca}{b^2},\frac{ab}{c^2}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \sum \frac{a}{\sqrt{2a^2+bc}} \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$T=\sum \frac{a}{\sqrt{6a^2+3bc}} \leqslant 1$$

等号成立仅当 $x=y=z \Rightarrow a=b=c$.

从上述证明可知, 如果我们令

$$(x,y,z)=\left(\frac{b^2}{a^2},\frac{c^2}{b^2},\frac{a^2}{c^2}\right) \Rightarrow T_1=\sum \frac{a}{\sqrt{6a^2+3b^2}} \leqslant 1 \tag{A_8}$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{a^2}{b^2},\frac{b^2}{c^2},\frac{c^2}{a^2}\right) \Rightarrow T_2=\sum \frac{b}{\sqrt{6b^2+3a^2}} \leqslant 1 \tag{A_9}$$

如果我们再设正数 λ,μ,v 与 x,y,z 均满足条件及 $\theta \geqslant 2$, 则

$$\left.\begin{array}{l}xyz=1 \\ \lambda\mu v=1\end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda x)(\mu y)(vz)=1 \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{2+\lambda x}} \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 \geqslant$$

$$\left[\frac{1}{3}\sum\left(\frac{1}{6+3\lambda x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \geqslant$$

$$\left[\frac{1}{3}\sum\left(\frac{1}{6+3\lambda x}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\theta} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}T_\lambda^{(0)}=\sum \frac{1}{\sqrt[\theta]{6+3\lambda x}} \leqslant 3^{(\theta-2)/\theta} \\ \text{令}(x,y,z)=\left(\left(\frac{bc}{a^2}\right)^{\frac{\theta}{2}},\left(\frac{ca}{b^2}\right)^{\frac{\theta}{2}},\left(\frac{ab}{c^2}\right)^{\frac{\theta}{2}}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$T_\lambda^{(\theta)}=\sum \frac{a}{\sqrt{6a^\theta+3(\sqrt{bc})^\theta \cdot \lambda}} \leqslant 3^{\frac{\theta-2}{\theta}} \tag{A_{10}}$$

式(A_{10})便是式(A_9)的"参数 - 指数"双推广.

如果我们再设 $p,q,r>0, \phi \in (0,1)$, 那么应用赫尔特不等式, 有

$$\sum P\left(\frac{a}{\sqrt[\theta]{6a^\theta+3\lambda(\sqrt{bc})^\theta}}\right)^\phi \leqslant \left(\sum \frac{a}{\sqrt[\theta]{6a^\theta+3\lambda(\sqrt{bc})^\theta}}\right)^\phi \left(\sum p^{\frac{1}{1-\phi}}\right)^{1-\phi} \leqslant$$

$$3^{\frac{\phi}{\theta}(\theta-2)}\left(\sum p^{\frac{1}{1-\phi}}\right)^{1-\phi} \tag{A_{11}}$$

这便是式(A_{10})的加权推广.式(A_{11})还可以再推广为：

推广 1 设组数 $n\in\mathbf{N}$，元数 $a_i,b_i,c_i>0$；指数 $\theta\geqslant 2,\phi\in(0,1),\alpha_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. 正参数 λ,μ,v 满足 $\lambda\mu v=1$，p,q,r 为正系数，则有

$$\sum p\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_i}\leqslant 3^{\frac{\phi}{\theta}(\theta-2)}\left(\sum p^{\frac{1}{1-\phi}}\right)^{1-\phi} \tag{A_{12}}$$

其中
$$y_i=\left(\frac{a_i}{6a_i^{\theta}+3\lambda(\sqrt{b_ic_i})^{\theta}}\right)^{\phi},1\leqslant i\leqslant n$$

提示：用 m 表示式(A_{12})右边，应用赫尔特不等式有

$$\sum p\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_i}\right)=\sum\prod_{i=1}^{n}(py_i)^{\alpha_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum py_i\right)^{\alpha_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}m^{\alpha_i}=m^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}=m$$

等号成立仅当 $\lambda=\mu=v=1,p=q=r$，且 $a_i=b_i=c_i(i=1,2,\cdots,n)$.

由于代数、几何、三角组成美妙无穷的数学世界，因此，虽然式(A_7)是一个代数不等式，但我们可以把它转化成一个奇特的三角不等式：

设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边之长，则

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant\sum\frac{a}{\sqrt{6a^2+3bc}} \tag{A_{13}}$$

如果未应用递进关系

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 1\geqslant\sum\frac{a}{\sqrt{6a^2+3bc}}$$

欲直接证明式(A_{13})，那是颇有难度的，而且式(A_{13})还可以再从参数、系数、指数三个方面去推广它.

4 加权推广

式(A)的第一个加权推广为：

推广 2 设正数 λ,μ,v 与 a,b,c 大小关系同序，则有

$$\frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{\mu b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{vc}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant\frac{1}{3}(\lambda+\mu+v) \tag{C}$$

显然，当 $\lambda=\mu=v$ 时，式(C)化为式(A).

证明 简记 $S=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}$，则有

$$S^2-(a^{\frac{4}{3}})^2=(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})\geqslant 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc\Rightarrow$$

$$S^2\geqslant(a^{\frac{4}{3}})^2+8a^{\frac{2}{3}}bc=a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{S}\Rightarrow$$

$$\text{同理}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \dfrac{\lambda a^{\frac{4}{3}}}{S} \\ \dfrac{\mu b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geqslant \dfrac{\mu b^{\frac{4}{3}}}{S} \\ \dfrac{vc}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant \dfrac{vc^{\frac{4}{3}}}{S}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum \frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \frac{1}{S}\sum \lambda a^{\frac{4}{3}}$$

(应用切比雪夫不等式) $\geqslant$

$$\frac{1}{S}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum\lambda\right)\left(\sum a^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{1}{3}\sum\lambda = \frac{1}{3}(\lambda+\mu+v)$$

等号成立仅当 $a = b = c$.

式(A)的第二个加权推广是:

推广3 设 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$, $\lambda,\mu,v \in \mathbf{N}$.且满足条件 $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} = 1$,其中

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (\mu+v-2\lambda, v+\lambda-2\mu, \lambda+\mu-2v)$$

记 $S = \lambda+\mu+v$,则有

$$\sum \frac{\lambda a}{\sqrt[S-1]{a^{S-1}+(S^{S-1}-1)(\sqrt{bc})^{S-1}}} \geqslant 1 \tag{D}$$

等号成立仅当 $a = b = c$.

推广3还可以再推广,证明见后面.

式(A)的第三个加权推广是:

推广4 设 $a,b,c > 0$, $k > 1$, $\lambda,\mu,v > 0$,则有

$$\lambda\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^k + \mu\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^k + v\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^k \geqslant (\lambda^{1-k}+\mu^{1-k}+v^{1-k})^{1-k} \tag{E}$$

当 $\lambda = \mu = v$ 时,式(E)化为式(A)的一个指数推广.

证明 记式(E)左边为 $P_{\lambda}^{(k)}$,令

$$(x,y,z) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}, \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}, \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)$$

注意到

$$k > 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{1}{k} < 1, 0 < 1-\dfrac{1}{k} < 1 \\ \dfrac{1}{k}+\dfrac{k-1}{k} = 1\end{cases}$$

应用赫尔特不等式有

$$(\lambda x^k+\mu y^k+vz^k)^{\frac{1}{k}}(\lambda^{1-k}+\mu^{1-k}+v^{1-k})^{\frac{k-1}{k}} \geqslant \sum(\lambda x^k)^{\frac{1}{k}}\cdot(\lambda^{1-k})^{\frac{k-1}{k}} =$$

$$x+y+z \geqslant 1(\text{应用式(A)}) \Rightarrow P_{\lambda}^{(k)} = \lambda x^k+\mu y^k+vz^k \geqslant (\lambda^{1-k}+\mu^{1-k}+v^{1-k})^{1-k}$$

等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{l}a=b=c\Rightarrow x=y=z\\ \dfrac{\lambda x^k}{\lambda^{1-k}}=\dfrac{\mu y^k}{\mu^{1-k}}=\dfrac{vz^k}{v^{1-k}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=b=c\\ \lambda=\mu=v\end{cases}$$

5 参数推广 Ⅰ

最先建立式(A)参数推广的,是陕西师大罗增儒老师.

推广 5 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,参数 $k\geqslant 8$,则

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}} \tag{F}$$

式(F)的美妙是一看便知的,许多相关数奥资料上都有它的漂亮的初等证法,如书[1]第449页.

如果我们记式(F)左边为 P_k,那么当 $0<k\leqslant 8$ 时,有

$$P_k=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}\geqslant\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant 1$$

因此,式(F)可以综合为

$$P_k\geqslant\begin{cases}1, 0<k\leqslant 8\\ \dfrac{3}{\sqrt{1+k}}, k\geqslant 8\end{cases} \tag{F$'$}$$

关于式(F)的证明,据笔者初探,近10种之多,现选列几种最简妙的证法,以抛砖引玉.

证法 1 从书[1]有结论

$$(a+b+c)^3\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc \tag{①}$$

记

$$m=\frac{1}{3}\sum a^3, G=abc\leqslant m$$

应用权方和不等式有

$$P_k=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}=\sum\frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{(a^3+kabc)^{1/2}}\geqslant\frac{(\sum a)^{1+\frac{1}{2}}}{[\sum(a^3+kabc)]^{1/2}}=$$

$$\left[\frac{(a+b+c)^3}{\sum a^3+3kabc}\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\frac{\sum a^3+24abc}{\sum a^3+3kabc}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{m+8G}{m+kG}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{②}$$

从式②知,欲证式(F),只须证

$$\left(\frac{m+8G}{m+kG}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}}\Leftrightarrow(1+k)(m+8G)\geqslant 9(m+kG)\Leftrightarrow \tag{③}$$

$$(m-G)(k-8)\geqslant 0 \tag{④}$$

由于

$$\begin{cases}k\geqslant 8\\ m\geqslant G\end{cases}\Rightarrow(m-G)(k-8)\geqslant 0$$

因此逆推知,式(F)成立,等号成立仅当 $a=b=c$.

证法 2　设 $\lambda = 3/\sqrt{1+k}$ 及

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+kbc}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+kca}} \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+kab}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 = k\dfrac{bc}{a^2} \\ \dfrac{1}{y^2} - 1 = k\dfrac{ca}{b^2} \\ \dfrac{1}{z^2} - 1 = k\dfrac{ab}{c^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\frac{1}{x^2}-1)(\frac{1}{y^2}-1)(\frac{1}{z^2}-1) = k^3 \Rightarrow \quad ⑤$$

$$k^3(xyz)^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) =$$
$$1 - \sum x^2 + \sum y^2z^2 - (xyz)^2 \Rightarrow (1+k^3)(xyz)^2 =$$
$$1 - (\sum x)^2 + 2\sum yz + \sum y^2z^2 \quad ⑥$$

记 $t = (xyz)^{2/3}$，假设

$$P_k = x + y + z = \sum x < \lambda \Rightarrow (1+k^3)(xyz)^2 > 1 - \lambda^2 + 2\sum yz + \sum y^2z^2 \geqslant$$
$$1 - \lambda^2 + 6t + 3t^2 \Rightarrow (1+k^3)t^3 > 1 - \lambda^2 + 6t + 3t^2 = 1 - \frac{9}{1+k} + 6t + 3t^2 \Rightarrow$$
$$(1+k)^2(k^2-k+1)t^3 - 3(1+k)t^2 - 6(1+k)t - (k-8) > 0 \Rightarrow \quad ⑦$$
$$(k^2-k+1)[(1+k)t]^3 - 3[(1+k)t]^2 - 6(1+k)[(1+k)t] - (1+k)(k-8) > 0 \Rightarrow$$
$$[(1+k)t - 1][(1+k)^2(k^2-k+1)t^2 + (1+k)(k-8)t + (k-8)(1+k)] > 0 \quad ⑧$$
$$(\text{注意 } k - 8 \geqslant 0 \text{ 和 } k^2 - k + 1 > 0) \Rightarrow (1+k)t - 1 > 0 \Rightarrow \quad ⑨$$
$$\sqrt{t} > \frac{1}{\sqrt{1+k}} \Rightarrow (xyz)^{1/3} > \frac{1}{\sqrt{1+k}} = \frac{\lambda}{3} \Rightarrow$$
$$3\sqrt[3]{xyz} > \lambda > x + y + z > 0 \quad ⑩$$

这与 $x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$ 矛盾，故假设 $x + y + z < \lambda$ 不成立，因此只有

$$P_k = x + y + z \geqslant \lambda = 3/\sqrt{1+k}$$

即式(F)成立，等号成立仅当

$$x = y = z \Rightarrow a = b = c$$

证法 3　仍然记 $t = (xyz)^{2/3}$. 由证法 2 并假设

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x + y + z < 3/\sqrt{1+k} \\ k \geqslant 8 \Leftrightarrow 3/\sqrt{1+k} \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < x + y + z < 1 \Rightarrow 1 - (x+y+z)^2 > 0 \Rightarrow (1+k^3)t^3 =$$
$$1 - (\sum x)^2 + \sum y^2z^2 + 2\sum yz > \quad ⑪$$
$$\sum y^2z^2 + 2\sum yz \geqslant 3t^2 + 6t \Rightarrow (1+k^3)t^3 > 3t^2 + 6t \Rightarrow$$
$$(1+k^3)t^2 - 3t - 6 > 0 \Rightarrow \quad ⑫$$
$$\Delta t = 9 + 24(1+k^3) < 0$$

矛盾，因此假设不成立. 从而只有

$$P_k = x + y + z \geqslant 3/\sqrt{1+k}$$

成立，即式(F)成立. 等号成立仅当

$$x = y = z \Rightarrow a = b = c$$

证法 4 仍然记 $t = (xyz)^{2/3}$. 由证法 2 有

$$\prod(1 - x^2) = k^3(xyz)^2 \Rightarrow T = \prod(9 - 9x^2) = (9k)^3(xyz)^2 \quad ⑬$$

如果

$$\begin{aligned} 0 < P_k = x + y + z < 3/\sqrt{1+k} \Rightarrow 9 > (1+k)(\sum x)^2 \Rightarrow 9 - 9x^2 > \\ (1+k)(\sum x)^2 - 9x^2 = \\ (k-8)x^2 + (1+k)(y^2+z^2) + 2(1+k)\sum yz \geqslant \\ (k-8)x^2 + 2(1+k)yz + 6(1+k)t \Rightarrow \quad ⑭ \\ T = \prod(9-9x^2) > \prod[(k-8)x^2 + 2(1+k)yz + 6(1+k)t] \\ (\text{应用赫尔特不等式}) \geqslant \\ [(k-8)t + 2(1+k)t + 6(1+k)t]^3 = \\ (9kt)^3 = (9k)^3(xyz)^2 \Rightarrow \quad ⑮ \\ T > (9k)^3(xyz)^2 \end{aligned}$$

这与式⑬矛盾，所以假设不成立，因此式(F)成立.

证法 5 接证法 4 中的式⑭有

$$\begin{aligned} 9 - 9x^2 > (k-8)x^2 + 2(k+1)yz + 2(1+k)\sum yz = \\ (k-8)x^2 + 2(1+k)(2yz + 2x + xy) \geqslant \\ (k-8)x^2 + 8(1+k)[(yz)^2 \cdot zx \cdot xy]^{1/4} = \\ (k-8)x^2 + 8(1+k)[(xyz)^2 \cdot yz]^{1/4} \end{aligned}$$

记 $t = xyz$，并注意到

$$(k-8) + 8(1+k) = 9k$$

应用加权不等式，有

$$9 - 9x^2 > (k-8)x^2 + 8(1+k)(t^2yz)^{1/4} \geqslant 9k[x^{2(k-8)} \cdot (t^2yz)^{2(1+k)}]^{1/9k}$$

同理可得

$$9 - 9y^2 > 9k[y^{2(k-8)} \cdot (t^2zx)^{2(1+k)}]^{1/9k}$$

$$9 - 9z^2 > 9k[z^{2(k-8)} \cdot (t^2xy)^{2(k+1)}]^{1/9k}$$

于是

$$\begin{aligned} T = \prod(9-9x^2) > (9k)^3[t^{2(k-8)} \cdot (t^6 \cdot t^2)^{2(1+k)}]^{1/9k} = \\ (9k)^3t^2 = (9k)^3(xyz)^2 \Rightarrow T > (9k)^3(xyz)^2 \end{aligned}$$

这与 $T = (9k)^3(xyz)^2$ 矛盾，因此假设不成立，从而式(F)成立.

6 参数推广 Ⅱ

现在我们再建立式(A)的新的参数推广.

在推广 5 的基础上,我们有

推广 6 设 $a,b,c>0$,参数 $k\geqslant 8.\lambda,\mu,v\geqslant 0$,则有

$$\frac{a+\lambda}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b+\mu}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c+v}{\sqrt{c^2+kab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}}(1+Q)\tag{G}$$

其中

$$Q=\frac{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^2}{3(a+b+c)}\geqslant 0$$

显然,当 $\lambda=\mu=v=0$ 时,$Q=0$,式(G)化为式(F).

证明 注意到 $k\geqslant 8$,并记 $S=a+b+c$.

$$\begin{aligned}(\sum\sqrt{a^2+kbc})^2\leqslant 3\sum(a^2+kbc)=3(\sum a^2+k\sum bc)=3[S^2+(k-2)\sum bc]\leqslant\\ 3[S^2+\frac{1}{3}(k-2)S^2]=(k+1)S^2\Rightarrow\\ \sum\sqrt{a^2+kbc}\leqslant\sqrt{1+k}\cdot S\Rightarrow P_\lambda=\sum\frac{a+\lambda}{\sqrt{a^2+kbc}}=\\ \sum\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\sum\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+kbc}}(\text{应用式(F)柯西不等式})\geqslant\\ \frac{3}{\sqrt{1+k}}+\frac{(\sum\sqrt{\lambda})^2}{\sum\sqrt{a^2+kbc}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}}+\frac{(\sum\sqrt{\lambda})^2}{\sqrt{1+k}S}=\\ \frac{3}{\sqrt{1+k}}(1+Q)\end{aligned}$$

等号成立仅当 $a=b=c$ 及 $\lambda=\mu=v$.

有趣的是,如果我们在式(G)中取

$$(\lambda,\mu,v)=(t_1^2S,t_2^2S,t_3^2S),t_1,t_2,t_3\geqslant 0$$

则可得到一个有趣的结果

$$\sum\frac{a+t_1^2S}{\sqrt{a^2+kbc}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}}\left[1+\frac{1}{3}(t_1+t_2+t_3)^2\right]\tag{G'}$$

可以说,推广 5 中的式(F)非常娇艳迷人,现在我们再将它打扮得更"花枝招展".

推广 7 设 $a,b,c>0,\lambda,\mu,v>0$.记 $\lambda+\mu+v=3S$.

$$P_\lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\mu ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+vab}}$$

则

$$P_\lambda\geqslant\begin{cases}1,0<S\leqslant 8\\ \dfrac{3}{\sqrt{1+S}},S\geqslant 8\end{cases}\tag{H}$$

显然,当 $\lambda=\mu=v=S=k$ 时,式(H)化为式(F).

证明 由于

$$P_\lambda=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}=\sum\frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{(a^3+\lambda abc)^{1/2}}\geqslant\frac{(\sum a)^{1+\frac{1}{2}}}{[\sum(a^3+\lambda abc)]^{1/2}}=$$

$$\frac{(\sum a)^{3/2}}{(\sum a^3+3Sabc)^{1/2}}\geqslant\left(\frac{\sum a^3+24abc}{\sum a^3+3Sabc}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad ①$$

(1) 显然当 $0<S\leqslant 8$ 时,有 $P_\lambda=1$.

(2) 当 $S\geqslant 8$ 时,记 $t=\frac{1}{3}\sum a^3\geqslant abc$.

欲证式(H),只须证

$$\left(\frac{\sum a^3+24abc}{\sum a^3+3Sabc}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+S}}\Leftrightarrow \qquad ②$$

$$\frac{t+8abc}{t+Sabc}\geqslant\frac{9}{1+S}\Leftrightarrow(t+8abc)(1+S)\geqslant$$

$$9(t+Sabc)\Leftrightarrow(S-8)(t-abc)\geqslant 0$$

上式显然成立,逆推之式 ② 成立.结合式 ① 得式(H)成立,等号成立仅当 $a=b=c$.

进一步地,我们又可将推广 7 加强为:

推广 8 设 $a,b,c>0$,正参数 λ,μ,v 满足 $\sqrt[3]{\lambda\mu v}=t\geqslant 8$,则有

$$P_\lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\mu ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+vab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+t}} \qquad (I)$$

这是因为

$$8\leqslant t\leqslant S\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{1+t}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+S}}$$

证明 我们设正实数 x,y,z 满足

$$xyz=k^3\geqslant 8^3$$

则书[2]第 159 页有结论

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}} \qquad ③$$

我们再设 $\lambda,\mu,v>0,xyz=1$,且 $t=\sqrt[3]{\lambda\mu v}\geqslant 8$,则

$$(\lambda x)(\mu y)(vz)=t^3\geqslant 8^3$$

这样式 ③ 化为

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\mu y}}+\frac{1}{\sqrt{1+vz}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+t}}\\ \text{再令}(x,y,z)=\left(\frac{bc}{a^2},\frac{ca}{b^2},\frac{ab}{c^2}\right)\end{cases}\Rightarrow P_\lambda=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+t}} \qquad ④$$

等号成立仅当 $x=y=z\Rightarrow a=b=c$ 及 $\lambda=\mu=v=t$.

如果我们再令

$$(x,y,z)=\left(\frac{b^2}{a^2},\frac{c^2}{b^2},\frac{a^2}{c^2}\right)$$

和

$$(x,y,z)=\left(\frac{a^2}{b^2},\frac{b^2}{c^2},\frac{c^2}{a^2}\right)$$

便又得到式(I)的两个配对式

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda b^2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+t}} \tag{I$_1$}$$

$$\sum \frac{a}{\sqrt{\lambda a^2+b^2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+t}} \tag{I$_2$}$$

由于式(B)是式(A)的一个最简洁的加强,它也有相似于推广7的推广形式吗?

推广9 设 $a,b,c>0,\lambda,\mu,v$ 为正参数,记 $3S=\lambda+\mu+v\geqslant 6$ 满足条件

$$(4S+1)/3>\max(\lambda,\mu,v)$$

则有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\mu(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+v(a+b)^2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{4S+1}} \tag{J}$$

证明 我们记 $G=abc,3t=\sum a^3$,则有 $t\geqslant G>0$.

记式(J)左边为 P'_λ,由已知有

$$\frac{1}{3}(4S+1)>\max(\lambda,\mu,v)\Rightarrow\begin{cases}4S-3\lambda+1>0\\4S-3\mu+1>0\\4S-3v+1>0\end{cases}$$

并注意到 $\sum(4S-3\lambda+1)=12S-3\sum\lambda+3=12S-9S+3=3S+3$

于是

$$P'_\lambda=\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda(b+c)^2}}=\sum\frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^3+\lambda a(b+c)^2}}=$$

$$\sum\frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{[a^3+2\lambda G+\lambda a(b^2+c^2)]^{1/2}}(\text{应用权方和不等式})\geqslant$$

$$\frac{(\sum a)^{1+\frac{1}{2}}}{(\sum[a^3+2\lambda G+\lambda a(b^2+c^2)])^{1/2}}=\left[\frac{\sum a^3+3\sum a(b^2+c^2)+6G}{\sum a^3+6SG+\sum\lambda a(b^2+c^2)}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left[\frac{3t+3\sum a(b^2+c^2)+6G}{3t+\sum\lambda a(b^2+c^2)+6SG}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

欲证式(J),只须证

$$(4S+1)[t+\sum a(b^2+c^2)+2G]\geqslant 3[3t+6SG+\sum\lambda a(b^2+c^2)]\Leftrightarrow \tag{6}$$

$$(4S-8)t-(10S-2)G+\sum[(4S-3\lambda+1)a(b^2+c^2)]\geqslant 0 \tag{7}$$

式⑦左边(注意 $S\geqslant 2$)$\geqslant$

$$(4S-8)G-(10S-2)G+\sum[(4S-3\lambda+1)\cdot 2G]=$$

$$(4S-8)G-(10S-2)G+2(3S+3)G=0=\text{右边}$$

因此式⑥成立.从而式(J)成立,等号成立仅当 $a=b=c$ 及 $\lambda=\mu=v=S\geqslant 2$.

另外,如果我们设正参数 λ,μ,v 满足 $\sqrt[3]{\lambda\mu v}=t\geqslant 2$,又设

$$(x,y,z)=\left(\frac{(b+c)^2}{a^2},\frac{(c+a)^2}{b^2},\frac{(a+b)^2}{c^2}\right)\Rightarrow xyz=\prod\left(\frac{b+c}{a}\right)^2\geqslant\prod\left(\frac{4bc}{a^2}\right)=4^3\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{(\lambda x)\cdot(\mu y)\cdot(vz)}\geqslant 8(\text{应用前面的式⑥})\\ \sum\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+4t}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda(b+c)^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+4t}} \tag{J'}$$

式(J′) 即为式(J) 的加强式. 等号成立的条件一致.

7 参数推广 Ⅲ

式(J) 也有配对形式,它是式(A_6) 的推广:

推广 10 设 $a,b,c>0$. 正参数 λ,μ,v 满足 $\lambda+\mu+v=3S$,且

$$\frac{1}{3}(4S-1)>\max(\lambda,\mu,v)$$

$$\min\{\lambda(b+c)^2-a^2,\mu(c+a)^2-b^2,v(a+b)^2-c^2\}>0$$

则有

$$T_\lambda=\frac{a}{\sqrt{\lambda(b+c)^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{\mu(c+a)^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{v(a+b)^2-c^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{4S-1}} \tag{K}$$

提示 方法技巧和记号同上. 须证

$$T_\lambda\geqslant\left[\frac{3t+6G+3\sum a(b^2+c^2)}{\sum\lambda a(b^2+c^2)+6SG-3t}\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{4S-1}}\Leftrightarrow$$

$$[t+2G+\sum a(b^2+c^2)](4S-l)\geqslant$$

$$3[\sum\lambda a(b^2+c^2)+6SG-3t]\Leftrightarrow$$

$$(4S+8)t-(10S+2)G+\sum[(4S-3\lambda-1)a(b^2+c^2)]\geqslant 0 \tag{①}$$

式 ① 左边 $\geqslant$

$$(4S+8)G-(10S+2)G+2G\sum(4S-3\lambda-1)=$$

$$(4S+8)G-(10S+2)G+2G(3S-3)=0$$

从而式(K) 成立. 等号成立仅当 $a=b=c$ 及 $\lambda=\mu=v=S>1$.

下面我们建立式(F) 的一个指数推广.

推广 11 设 $a,b,c>0,k\geqslant 8,m\in\mathbf{N}$. 记 $S=(k+1)^m-1$,则

$$\frac{a}{\sqrt[2m]{a^{2m}+S(bc)^m}}+\frac{b}{\sqrt[2m]{b^{2m}+S(ca)^m}}+\frac{c}{\sqrt[2m]{c^{2m}+S(ab)^m}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}} \tag{L}$$

显然,当取 $m=1$ 时,式(L) 化为式(F).

证明 我们只须证明当 $2\leqslant m\in\mathbf{N}$ 时的情况.

设 $x,y,z>0$,且 $xyz=1$,应用推广 8 证明中的式 ③ 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+kx}}+\frac{1}{\sqrt{1+ky}}+\frac{1}{\sqrt{1+kz}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+k}} \tag{②}$$

设

$$(1+kx)^m=1+p, m\geqslant 2 \tag{③}$$

其中 $$p=\sum_{i=1}^{m}C_m^i(kx)^i=\sum_{i=1}^{m}(C_m^ik^i)x^i$$

注意到 $$S=\sum_{i=1}^{m}C_m^ik^i=(1+k)^m-1$$

应用加权不等式有

$$p\geqslant S(\prod_{i=1}^{m}x^{iC_m^ik^i})^{1/S}=Sx^\theta$$

其中 $\theta=\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{m}iC_m^ik^i>1$，于是

$$1+kx=\sqrt[m]{1+p}\geqslant\sqrt[m]{1+Sx^\theta}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\sqrt{1+kx}\geqslant\sqrt[2m]{1+Sx^\theta}\\ \text{同理}\begin{cases}\sqrt{1+ky}\geqslant\sqrt[2m]{1+Sy^\theta}\\ \sqrt{1+kz}\geqslant\sqrt[2m]{1+Sz^\theta}\end{cases}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$P_m^{(k)}=\sum\frac{1}{\sqrt[2m]{1+Sx^\theta}}\geqslant\sum\frac{1}{\sqrt{1+kx}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}} \tag{④}$$

由于 $xyz=1\Rightarrow x^\theta y^\theta z^\theta=1$，令

$$(x^\theta,y^\theta,z^\theta)=\left((\frac{bc}{a^2})^m,(\frac{ca}{b^2})^m,(\frac{ab}{c^2})^m\right)\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt[2m]{a^{2m}+S(bc)^m}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+k}}$$

等号成立仅当 $a=b=c$.

8 元数推广

关于式(A)的元数推广，书[1]和书[2]建立了一系列精彩美妙的定理. 认真学习了之后，不难得到漂亮的推论：

推广 12 设 $m,n,k\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant 3, 2\leqslant m\leqslant n-1, k\geqslant n^m-1, a_i>0$，定义 $a_{n+i}\equiv a_i, A_i=a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{i+m}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt[m]{a_i^m+kA_i}}\geqslant\frac{n}{\sqrt[m]{1+k}} \tag{M}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

推广 13 设 $a_i>0,\lambda_i>0(1\leqslant i\leqslant n;3\leqslant n\in\mathbf{N}), 2\leqslant m\in\mathbf{N}$，$\{\lambda_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 两序列大小关系同序，记 $G_i=a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$（约定 $a_0=1$），$\theta=(n^m-1)/(m\cdot n^{m-1})$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_ia_i^{(n-1)/m}}{\sqrt[m]{a_i^{n-1}+(n^m-1)G_i}}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{N}$$

提示：记式(N)左边和里各项为 $\lambda_ix_i(1\leqslant i\leqslant n)$，再记 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i^\theta$.

由书[2]第155页有结论

$$x_i \geqslant a_i^{\theta}/S(1 \leqslant i \leqslant n) \geqslant \lambda_i x_i \geqslant \lambda_i a_i^{\theta}/S \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geqslant \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\theta}$$

（应用切比雪夫不等式）$\geqslant$

$$\frac{1}{nS}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

在推导过程中，我们会发现，当

$$\theta = \beta = (n^k - 1)/[(n-1)n^{k-1}]$$

时，式(N)仍然成立.

9 引 理

为了建立更好的综合推广，我们先准备几个引理.

引理 1 设 $m,n,k \in \mathbf{N}, a_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n)$，记 $G = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}$，则有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^m \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^m + (n^m - n)G^m \qquad (\alpha)$$

证明 当 $n=1$ 时式(α)显然成立. 当 $n>1$ 时，我们固定 n，对 m 施行数学归纳法.

(1) 当 $m=1$ 时，式(α)成立；

当 $n \geqslant 2, m=2$ 时，记 $\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n}$ 为 $\sum$，$\prod\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n}$ 为 $\prod$，那么

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum a_i a_j \qquad ①$$

又

$$2\sum a_i a_j \geqslant 2C_n^2(\prod a_i a_j)^{1/C_n^2} = n(n-1)(\prod_{i=1}^{n} a_i^{n-1})^{1/C_n^2}(\text{因 } 2C_n^2/n = n-1) =$$

$$n(n-1)(\prod_{i=1}^{n} a_i^{n-1})^{2/[n(n-1)]} = (n^2-n)G^2 \Rightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + (n^2-n)G^2 \qquad ②$$

即当 $m=2$ 时式(α)成立，等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(2) 假设当 $m=k$ 时，式(α)成立，即

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^k \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^k + (n^k - n)G^k \qquad ③$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

那么当 $m=k+1$ 时，应用式③有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{k+1} = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^k \cdot (\sum_{i=1}^{n} a_i) \geqslant [\sum_{i=1}^{n} a_i^k + (n^k-n)G^k](\sum_{i=1}^{n} a_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1} + (n^k-n)G^k(\sum_{i=1}^{n} a_i) + M \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1} + (n^k - n) G^k \cdot (nG) + M =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1} + (n^{k+1} - n^2) G^{k+1} + M \quad ④$$

其中

$$M = (\sum_{i=1}^{n} a_i^k)(\sum_{i=1}^{n} a_i) - \sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i^k S_i (约定\ a_0 = 1) \quad ⑤$$

$$S_i = a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n (1 \leqslant i \leqslant n) \geqslant$$
$$(n-1)(a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)^{1/(n-1)} =$$
$$(n-1)\left(\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} = (n-1)\left(\frac{G^n}{a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow$$
$$M = \sum_{i=1}^{n} a_i^k S_i \geqslant (n-1) G^{\frac{n}{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{k-\frac{1}{n-1}}\right) \geqslant$$
$$n(n-1) G^{\frac{n}{n-1}} \left(\prod_{i=1}^{n} a^{k-\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$
$$n(n-1) G^{\frac{n}{n-1}} \cdot G^{k-\frac{1}{n-1}} = n(n-1) G^{k+1} (代入式④) \Rightarrow$$
$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{k+1} \geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1} + (n^{k+1} - n^2) G^{k+1} + n(n-1) G^{k+1} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{k+1} + (n^{k+1} - n) G^{k+1} \quad ⑥$$

即当 $m = k + 1$ 时式(α)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

综合(1)和(2)知,对任意 $m \in \mathbf{N}$,式(α)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

书[2]介绍了陈计、王振老师的研究成果(见书[2]第157页),即从指数方面将引理1推广为:

引理2 设 $x_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,n), r \in \mathbf{R}, r \geqslant n/(n-1)(2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,则

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^r \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^r + (n^r - n) G^r \quad (\beta)$$

其中 $G = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}$.

其实,引理2还可以再以系数方面推广为:

引理3 设 $m, n \in \mathbf{N}, \lambda_i \in \mathbf{N}, a_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$,记 $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \in \mathbf{N}, G = (\prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i})^{1/S}$,则

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i)^r \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + (S^r - S) G^r \quad (\gamma)$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

当 $\lambda_i = 1(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时,$S = n$,式(γ)化为式(α).

证明 记 $P_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$,则 P_n 中有 λ_1 个 a_1,λ_2 个 a_2,$\cdots$,λ_n 个 a_n,共有 $S = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 个正数,排列为集合

$$P_n = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$$

应用引理 2 有 $r \geqslant S(S-1)$,且

$$G = (\prod_{i=1}^{S} b_i)^{1/S}$$

$$(\sum_{i=1}^{s} b_i)^r \geqslant \sum_{i=1}^{s} b_i^r + (S^r - S)G^r \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i)^r \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^r + (S^r - S)G^r$$

等号成立仅当 $\qquad b_1 = b_2 = \cdots = b_s \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

引理 4 设 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 或 $\alpha = 1$,$x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$,$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geqslant n^{\frac{1}{\alpha}} - 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+x_i)^\alpha} \geqslant \frac{n}{(1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^\alpha} \tag{φ}$$

证明见书[1]第 652 页.

10 综合推广

现在,我们应用上述引理建立式(A)的两个非常漂亮的综合推广.

推广 14 设 $3 \leqslant n \in \mathbf{N}$(元数),$r \geqslant s/(s-1)$(指数),$k_i \in \mathbf{N}$(权系数),$\lambda_i \in \mathbf{R}^+$(参数).记 $S = \sum_{i=1}^{n}k_i \in \mathbf{N}$,$\lambda = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i k_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,$G = (\prod_{i=1}^{n} a_i^{k_i})^{1/s}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i a_i^{1+\frac{1}{r-1}}}{\sqrt[r-1]{a_i^r + \lambda_i G^r}} \geqslant \begin{cases} 1, 0 < \lambda \leqslant S^{r-1} - 1 \\ \dfrac{S}{\sqrt[r-1]{1+\lambda}}, \lambda \geqslant S^{r-1} - 1 \end{cases} \tag{O}$$

证明 根据加权不等式,记式(O)左边为 $P_n(\lambda, k)$ 及 $t = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}k_i a_i^r \geqslant G^r$,则

$$P_n(\lambda,k) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(k_i a_i)^{1+\frac{1}{r-1}}}{(k_i a_i^r + k_i\lambda_i G^r)^{1/(r-1)}}(\text{应用权方和不等式}) \geqslant$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n}k_i a_i)^{1+\frac{1}{r-1}}}{[\sum_{i=1}^{n}(k_i a_i^r + k_i\lambda_i G^r)]^{1/(r-1)}} =$$

$$\left[\frac{(\sum_{i=1}^{n}k_i a_i)^r}{\sum_{i=1}^{n}k_i a_i^r + G^r\sum_{i=1}^{n}k_i\lambda_i}\right]^{\frac{1}{r-1}} = \left[\frac{(\sum_{i=1}^{n}k_i a_i)^r}{St + S\lambda G^r}\right]^{\frac{1}{r-1}}(\text{应用引理 3}) \geqslant$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i^r + (S^r - S)G^r}{St + S\lambda G^r}\right]^{\frac{1}{r-1}} = \left[\frac{t + (S^{r-1} - 1)G^r}{t + \lambda G^r}\right]^{\frac{1}{r-1}} \qquad ①$$

(1) 当 $0 < \lambda \leqslant S^{r-1} - 1$ 时,显然有

$$P_n(\lambda, k) \geqslant 1$$

(2) 当 $\lambda \geqslant S^{r-1} - 1$ 时,我们只须证

$$\left[\frac{t + (S^{r-1} - 1)G^r}{t + \lambda G^r}\right]^{\frac{1}{r-1}} \geqslant \frac{S}{\sqrt[r-1]{1 + \lambda}} \Leftrightarrow \qquad ②$$

$$(1 + \lambda)[t + (S^{r-1} - 1)G^r] \geqslant S^{r-1}(t + \lambda G^r) \Leftrightarrow$$

$$(1 + \lambda)t + (1 + \lambda)(S^{r-1} - 1)G^r \geqslant tS^{r-1} + \lambda S^{r-1}G^r \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + 1 - S^{r-1})t - (\lambda + 1 - S^{r-1})G^r \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + 1 - S^{r-1})(t - G^r) \geqslant 0 \qquad ③$$

式③显然成立,从而式②成立,因此式(O)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. 式(O)还可以再加强为

推广 15 设 $a_i > 0, \lambda_i > 0. k_i \in \mathbf{N}(1 \leqslant i \leqslant n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N}), \theta \geqslant 2$,记 $S = \sum_{i=1}^{n} k_i$, $G = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}, \lambda = (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{k_i})^{\frac{1}{S}} \geqslant S^{\theta} - 1$,满足 $\prod_{i=1}^{n} a_i^{s - nk_i} = 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i a_i}{\sqrt[\theta]{a_i^{\theta} + \lambda_i G^{\theta}}} \geqslant \frac{S}{\sqrt[\theta]{1 + \lambda}} \qquad (P)$$

证明 设 $\theta = 1/\alpha \geqslant 2, \prod_{i=1}^{n} x_i = 1, \lambda' = (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)^{1/n} \geqslant n^{\theta} - 1$,则

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda' \geqslant n^{\theta} - 1$$

应用引理 4 有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[\theta]{1 + \lambda_i x_i}} \geqslant \frac{n}{\sqrt[\theta]{1 + \lambda'}} \qquad ④$$

现设 $k_i \in \mathbf{N}, S = \sum_{i=1}^{n} k_i$,利用引理 2 的推广技巧有

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} = 1$$

$$\lambda = (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{k_i})^{1/S} \geqslant S^{\theta} - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\sqrt[\theta]{1 + \lambda_i x_i}} \geqslant \frac{S}{\sqrt[\theta]{1 + \lambda}} \qquad ⑤$$

令

$$x_i = \left(\frac{G}{a_i}\right)^{\theta}, 1 \leqslant i \leqslant n$$

于是有

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}=1 \Rightarrow \left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{G}{a_i}\right)^{k_i}\right]^{\theta}=1 \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{S}{n}} \div \prod_{i=1}^{n} a_i^{k_i}=1 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i^{S-nk_i}=1$$

式 ⑤ 化为式(P)，等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

11　配对推广

在上一节的引理 4 中，取 $\alpha=1$，并设 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，作置换 $x_i \to (n-1)x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 立刻得到一个漂亮的推论：

推论　设 $x_i>0(1 \leqslant i \leqslant n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 且 $\prod_{i=1}^{n} x_i=1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(n-1)x_i} \geqslant 1 \tag{a}$$

取 $n=3$ 时，我们在本文开头应用它给出了式(A)的新证明.

式(a)的配对式便是

引理 5　设 $x_i>0(1 \leqslant i \leqslant n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 且 $\prod_{i=1}^{n} x_i=1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1+x_i} \leqslant 1 \tag{b}$$

当取 $n=3$ 时，我们第 3 节中应用它建立了式(A)最漂亮的配对式(A_7)，并完善了式(A).

从外形上看，(a)，(b)两式确实大同小异，非常相似，恰如一对“双胞胎”. 式(b)最早出现在朱华伟与钱展望的《数学奥林匹克试题集》中，其证法新异别致，颇具特色. 为了不分散精力，我们将它的证明留在下一节，而仿照前面引理 3 的推广技巧，将它推广成：

引理 6　设 $x_i>0, k_i \in \mathbf{N}(1 \leqslant i \leqslant n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$，且满足条件 $\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{S-1+x_i} \leqslant 1 \tag{c}$$

其中

$$S=\sum_{i=1}^{n} k_i \in \mathbf{N}$$

应用式(c)可将式(A)的配对式(A_7)推广为：

推广 16　设 $3 \leqslant n \in \mathbf{N}, 2 \leqslant m \in \mathbf{N}, k_i \in \mathbf{N}, a_i>0, \lambda_i>0, \theta \geqslant 1$，且满足 $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{k_i}=1$. 记 $S=\sum_{i=1}^{n} k_i$，定义 $a_{n+i} \equiv a_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，满足 $G_i=(a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{i+m})^{\frac{1}{m}} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{G_i}{n}\right)^{k_i}=1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i a_i}{\sqrt[\theta]{S^{\theta-1}\left[(S-1)a_i^{\theta}+\lambda_i G_i^{\theta}\right]}} \leqslant 1 \tag{Q}$$

当取 $n=3,k_1=k_2=k_3=1,S=3$ 时,式(Q)化为式(A_7)的等价形式.

证明 令 $x_i=(G_i/a_i)^{\theta}(1\leqslant i\leqslant n)$,有 $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i x_i)^{k_i}=(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{k_i})(\prod_{i=1}^{n}x_i^{k_i})=1$.再记 $y_i=(S-1+\lambda_i x_i)^{-1}(1\leqslant i\leqslant n)$,应用引理6有

$$\sum_{i=1}^{n}k_i y_i\leqslant 1 \tag{①}$$

注意到

$$\theta\geqslant 1\Leftrightarrow 0<\frac{1}{\theta}\leqslant 1(\text{应用加权幂平均不等式})\Rightarrow\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}k_i y_i^{1/\theta}}{S}\right)^{\theta}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}k_i y_i}{S}\leqslant\frac{1}{S}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\sqrt[\theta]{y_i}\leqslant\sqrt[\theta]{S^{\theta-1}}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\sqrt[\theta]{S-1+\lambda_i x_i}}\leqslant\sqrt[\theta]{S^{\theta-1}}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i a_i}{\sqrt[\theta]{(S-1)a_i^{\theta}+\lambda_i G_i^{\theta}}}\leqslant\sqrt[\theta]{S^{\theta-1}}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i a_i}{\sqrt[\theta]{S^{\theta-1}[(S-1)a_i^{\theta}+\lambda_i G_i^{\theta}]}}\leqslant 1$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 及 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$.

如果我们仔细推敲引理5,我们发现式(Q)还有一个"伙伴":

推广17 设 $a_i>0,\lambda_i>0,t_i>0(1\leqslant i\leqslant n;3\leqslant n\in\mathbf{N})$,且 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\theta>1$,即 $t=(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\frac{\theta}{\theta-1}})^{\frac{\theta-1}{\theta}}$,$G_i=(a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{i+m})^{1/m}(2\leqslant m\leqslant n)$ 定义 $a_{n+i}\equiv a_i(1\leqslant i\leqslant n)$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i a_i}{\sqrt[\theta]{(n-1)a_i^{\theta}+\lambda_i G_i^{\theta}}}\leqslant t^{\frac{\theta-1}{\theta}} \tag{R}$$

当取 $n=3,t_1=t_2=t_3,\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,式(R)等价于式(A_7).

仔细观察(Q)和(R)两式的"容颜",我们发现,它俩只有一点点细微的"区别",真是一对"双胞胎".

证明 令 $x_i=(\frac{G_i}{a_i})^{\theta}$,则有

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)\cdot(\prod_{i=1}^{n}x_i)=1$$

记 $y_i=(n-1+\lambda_i x_i)^{-1}(1\leqslant i\leqslant n)$,应用引理5有

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant 1 \tag{②}$$

设 $\frac{1}{\theta}=\alpha\in(0,1)$(因 $\theta>1$),应用赫尔特不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}t_i y_i^{\alpha}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}y_i)^{\alpha}\cdot(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\frac{1}{1-\alpha}})^{1-\alpha}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\frac{1}{1-\alpha}})^{1-\alpha}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{(n-1+\lambda_i x_i)^{\alpha}}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\frac{1}{1-\alpha}})^{1-\alpha}\Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i a_i}{\sqrt[\theta]{(n-1)a_i^{\theta}+\lambda_i G_i^{\theta}}}\leqslant t^{\frac{\theta-1}{\theta}}$$
等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 及 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1\cdot t_1=t_2=\cdots=t_n$.

推广 16 和推广 17 中的基本元数 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 只有一组.如果我们应用赫尔特不等式,可轻松地将它们推广到 k 组基本元数 $\{a_{ij}\}$ 的高度:

推广 18 设元数 $3\leqslant n\in\mathbf{N}$,组数 $k\in\mathbf{N},2\leqslant m\in\mathbf{N},a_{ij}>0$;系数 $k_i\in\mathbf{N}$,参数 $\lambda_i>0$,指数 $\theta\geqslant 1,\alpha_j\in(0,1)$,且 $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j=1,\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{k_i}=1$.记 $S=\sum_{i=1}^{n}k_i$,定义 $a_{nj+i}\equiv a_i$,$G_{ij}=(a_{ij+1}a_{ij+2}\cdots a_{ij+m})^{1/m}(1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant k)$ 满足 $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{G_{ij}}{a_{ij}}\right)^{k_i}=1$.

记 $e_{ij}=\frac{a_{ij}}{\sqrt[\theta]{S^{\theta-1}[(S-1)a_{ij}^{\theta}+\lambda_i G_{ij}^{\theta}]}}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant k)$,则有
$$\sum_{i=1}^{n}k_i(\prod_{j=1}^{k}e_{ij})^{\alpha_j}\leqslant 1\tag{S}$$
同理,式(R)也有类似的再度推广形式.

12 尾声悠扬

(1)将上节中的式(a)和式(b)"珠联璧合",就可统一成一个有趣的结论:

设正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=1(2\leqslant n\in\mathbf{N})$,则有
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)\lambda_i}\geqslant 1\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+\lambda_i}\tag{d}$$
显然,当 $n=2$ 时,$\lambda_1\lambda_2=1$,式(d)化为等式
$$\frac{1}{1+\lambda_1}+\frac{1}{1+\lambda_2}=1$$
因此式(d)等号成立的条件是:$n=2$,或当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1(3\leqslant n\in\mathbf{N})$.

(d)可以加权推广为:

设 $\lambda_i>0,k_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{k_i}=1$,记 $S=\sum_{i=1}^{n}k_i$,则
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{1+(S-1)\lambda_i}\geqslant 1\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{S-1+\lambda_i}\tag{e}$$
(2)我们知道,式(e)成立的先决条件是式(d)成立,而式(d)成立的条件之一是:

设正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,则
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+\lambda_i}\leqslant 1\tag{b'}$$

让我们先欣赏朱、钱二位老师的绝妙证明.

证法 1 我们令

$$\begin{cases}\lambda_i = e^{x_i}, x_i \in \mathbf{R} \\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 k 个数大于等于 $n-1$.则

(1) 若 $k \geqslant 2$,有

$$T_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+\lambda_i} \leqslant \frac{k}{n-1+(n-1)} + \frac{n-k}{n-1} = \frac{2n-k}{2n-2} \leqslant \frac{2n-2}{2n-2} = 1$$

(2) 若 $k=0$,则对任意 $1 \leqslant i,j \leqslant n$ 有

$$\lambda_i\lambda_j \leqslant (n-1)^2 \Rightarrow e^{(x_1+x_2)/2} \leqslant n-1$$

记

$$f(x) = \frac{1}{n-1+e^x} \Leftrightarrow \quad ①$$

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Leftrightarrow \quad ②$$

$$\frac{1}{n-1+e^{x_1}} + \frac{1}{n-1+e^{x_2}} \leqslant \frac{2}{n-1+e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}} \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{\frac{x_1}{2}} - e^{\frac{x_2}{2}}\right)^2\left[(n-1) - e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\right] \geqslant 0$$

可见式 ① 成立,$f(x)$ 是上凸函数.根据琴生不等式,有

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant nf\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{n}{n-1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}} = \frac{n}{n-1+e^0} = 1$$

(3) 若 $k=1$,不妨设 $\lambda \geqslant n-1$.根据琴生不等式有

$$T_n \leqslant \frac{1}{n-1+\lambda_1} + \frac{n-1}{n-1+\sqrt[n-1]{\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}} = \frac{1}{n-1+\lambda_1} + \frac{n-1}{n-1+\lambda_1^{1/(1-n)}} = T \quad ③$$

因为

$$T \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n-1+\lambda_1} \leqslant \frac{\lambda^{1/(1-n)}}{n-1+\lambda_1^{1/(1-n)}} \Leftrightarrow n-1+\lambda_1 \geqslant (n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + 1 \Leftrightarrow$$

$$(n-2)+\lambda_1 \geqslant (n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} \quad ④$$

设 $\lambda_1 = t^{n-1}$,式 ④ 化为

$n-2+t^{n-1}-(n-1)t \geqslant 0 \Leftrightarrow (t^{n-1}-1)-(n-1)(t-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$(t-1)[t^{n-2}+\cdots+t+1-(n-1)] \geqslant 0$(注意 $t = \lambda_1^{1/(n-1)} \geqslant (n-1)^{1/(n-1)} > 1$)$\Leftrightarrow$

$(t-1)[(n-1)-(n-1)] = 0$

即式 ④ 成立.

综合上述,恒有 $T_n \leqslant 1$,等号成立仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$.

下面我们给出式(b′) 的另一证明.

证法 2 (1) 当 $n=2,3$ 时,我以前已证.

(2) 当 $n\geqslant 4$ 时,设

$$T_n=Q_n/P_n \tag{⑤}$$

记从 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中每次取出 i 个数的积之和为 $S_i(1\leqslant i\leqslant n)$,则 S_i 中共有 C_n^i 项,且 $S_0=1,S_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=1$.

应用平均值不等式有

$$S_i=\sum\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\cdots\lambda_{k_i}\geqslant C_n^i(\prod\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\cdots\lambda_{k_i})^{1/C_n^i}=$$

$$C_n^i(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{i/C_n^i}=C_n^i$$

$$P_n=\prod_{i=1}^{n}(n-1+\lambda_i)=(n-1)^n+1+\sum_{i=1}^{n-1}(n-1)^{n-i}\cdot S_i \tag{⑥}$$

$$Q_n=\sum_{i=1}^{n}[(n-1+\lambda_1)\cdots(n-1+\lambda_{i-1})(n-1+\lambda_{i+1})\cdots(n-1+\lambda_n)](\text{约定 }\lambda_0=1)=$$

$$n(n-1)^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}t_iS_i \tag{⑦}$$

其中系数

$$t_i=(n-1)^{n-i+1}(nC_{n-1}^i/C_n^i) \tag{⑧}$$

设

$$P_n-Q_n=R_n-[(n-1)^{n-1}-1]\Rightarrow \tag{⑨}$$

$$R_n=\sum_{i=1}^{n-1}[(n-1)^{n-i}-t_i]S_i\geqslant \tag{⑩}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[(n-1)^{n-i}-t_i]C_n^i=\sum_{i=1}^{n-1}\{(n-1)^{n-1-i}\cdot[(n-1)C_n^i-nC_{n-1}^i]\}=$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\{(n-1)^{n-1-i}[(n-1)C_n^i-(n-i)C_n^i]\}=\sum_{i=1}^{n-1}[(i-1)C_n^i(n-1)^{n-1-i}]\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[(n-2)(n-1)^{n-1-i}]=[(n-1)-1]\sum_{i=1}^{n-1}(n-1)^{n-1-i}=(n-1)^{n-1}-1\Rightarrow$$

$$R_n\geqslant(n-1)^{n-1}-1\Rightarrow P_n\geqslant Q_n\Rightarrow T_n\leqslant 1$$

等号成立仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$.

这样,我们证实了式(b′)成立,从而证实了式(e)也成立.

(3) 对于条件 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=1$,我们发现,比如当 $n=2k(k\in\mathbf{N})$ 为偶数时,可以取 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=r>0,\lambda_{k+1}=\cdots=\lambda_{2k}=\frac{1}{r}>0$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}=\frac{n}{2}(r+\frac{1}{r})$$

如果 $n=2k+1$ 为奇数时,可以取

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_k=r>0,\lambda_{k+1}=1,\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_{2k}=\frac{1}{r}$$

则有 $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i} = \frac{n-1}{2}(r+\frac{1}{r})+1$$

这一信息暗示我们，如果将式(b′)中的已知条件 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 1$，改变为 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}$ 后，式(b′)还成立吗?如果成立，这一现象岂不更有趣吗?

证明 我们记

$$S = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\Rightarrow S^2 = (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}) \geqslant n^2\Rightarrow S \geqslant n \tag{11}$$

如果

$$T_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+\lambda_i} > 1 \tag{12}$$

由

$$\sum_{i=1}^{n}(n-1+\lambda_i)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+\lambda_i} \geqslant n^2\Rightarrow T_n \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(n-1+\lambda_i)} = \frac{n^2}{n^2-n+S} \tag{13}$$

由式⑪和式⑬知，应有

$$\frac{n^2}{n^2-n+S} > 1\Rightarrow S \leqslant n$$

这与式⑪相矛盾. 因此假设 $T_n > 1$ 不成立，从而式(b′)成立，等号成立仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$.

(4) 最后，我们将式(A)的第5个配对式(A_5)作几个推广.

推广19 设 $a,b,c>0$，正参数 p,q,r 满足 $pqr = m^3 > 1$；且使 $pbc-a^2, qca-b^2, rab-c^2$ 均为正数，λ,μ,v 为正系数，则

$$\frac{(\mu+v)a}{\sqrt{pbc-a^2}} + \frac{(v+\lambda)b}{\sqrt{qca-b^2}} + \frac{(\lambda+\mu)c}{\sqrt{rab-c^2}} \geqslant 2\left(\sqrt{\frac{3(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)}{m-1}}\right) \tag{$A_5^{[1]}$}$$

证明 我们令

$$(x,y,z) = \left(\frac{a}{\sqrt{pbc-a^2}},\frac{b}{\sqrt{qca-b^2}},\frac{c}{\sqrt{rab-c^2}}\right)(G = \sqrt[3]{xyz})\Rightarrow$$

$$(\frac{1}{x_2}+1)(\frac{1}{y^2}+1)(\frac{1}{z^2}+1) = (p\frac{bc}{a^2})(q\frac{ca}{b^2})(r\frac{ab}{c^2}) = m^3\Rightarrow$$

$$m^3 \geqslant (\frac{1}{G^2}+1)^3\Rightarrow m \geqslant \frac{1}{G^2}+1\Rightarrow G^2 \geqslant \frac{1}{m-1}\Rightarrow$$

$$\sum\frac{(\mu+v)a}{\sqrt{pbc-a^2}} = \sum(\mu+v)x(\text{应用杨克昌不等式}) \geqslant$$

$$2\sqrt{(\sum\mu v)(\sum yz)} \geqslant 2[3(\sum\mu v)(\prod yz)^{1/3}]^{\frac{1}{2}} =$$

$$2[3(\sum\mu v)(\prod x)^{2/3}]^{1/2} \geqslant 2[3(\sum\mu v)/(m-1)]^{1/2}$$

等号成立仅当 $a=b=c, p=q=r$，及 $\lambda=\mu=v=m>1$.

$(A_5^{[1]})$ 式的配对形式是：

推广 20 设 $a,b,c>0,p,q,r$ 为正参数，λ,μ,v 为正系数. 记 $S=\lambda+\mu+v$，满足 $m=(p^{\lambda}q^{\mu}v^{r})^{1/S}>1,(a^{\lambda}b^{\mu}c^{v})^3=(abc)^S$，且使 $pbc-a^2,qca-b^2,rab-c^2$ 均为正数，则有

$$\frac{\lambda a}{\sqrt{pbc-a^2}}+\frac{\mu b}{\sqrt{qca-b^2}}+\frac{vc}{\sqrt{rab-c^2}}\geqslant\frac{\lambda+\mu+v}{\sqrt{m-1}} \qquad (A_5^{[2]})$$

证明 记号 x,y,z 同上. 再记

$$G=(x^{\lambda}y^{\mu}z^{v})^{1/S}$$

于是有

$$\frac{1}{x^2}+1=p\frac{bc}{a^2}\Rightarrow p^{\lambda}(\frac{bc}{a^2})^{\lambda}=(\frac{1}{x^2}+1)^{\lambda}\Rightarrow(\prod p^{\lambda})\prod(\frac{bc}{a^2})^{\lambda}=\prod(\frac{1}{x^2}+1)^{\lambda}\Rightarrow$$

$$m=\prod(\frac{1}{x^2}+1)^{\frac{\lambda}{S}}(\text{应用赫尔特不等式})\geqslant\frac{1}{G^2}+1\Rightarrow$$

$$G\geqslant\frac{1}{\sqrt{m-1}}\Rightarrow\sum\frac{\lambda a}{\sqrt{pbc-a^2}}=\sum\lambda x(\text{应用加权不等式})\geqslant$$

$$S(\prod x^{\lambda})^{1/S}=SG\geqslant\frac{\lambda+\mu+v}{\sqrt{m-1}}$$

等号成立仅当 $a=b=c,p=q=r=m>1$.

(5) 上面的推广 19 和推广 20，还可以再从三个基本元数 a,b,c 推广到 n 个基本元数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的情形：

推广 21 设 $a_i>0,p_i>0,\lambda_i>0$，记 $S_i=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)-\lambda_i,m=(\prod_{i=1}^{n}p_i)^{1/n}>1$，且使 $p_iG_i-a_i^{n-1}>0(1\leqslant i\leqslant n;3\leqslant n\in\mathbf{N})$，其中 $G_i=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i},\lambda=(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i})$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_ia_i}{\sqrt[n-1]{p_iG_i-a_i^{n-1}}}\geqslant2\sqrt{nC_n^2[\frac{\lambda}{n(m-1)}]^{\frac{2}{n-1}}} \qquad (A_5^{[3]})$$

当 $n=3$ 时，式 $(A_5^{[3]})$ 等价于式 $(A_5^{[1]})$.

相应地，推广 21 可以推广为：

推广 22 设 $a_i>0,p_i>0,\lambda_i>0$，记 $S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，且使

$$m=(\prod_{i=1}^{n}p_i^{\lambda_i})^{1/S}>1(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i})^n=(\prod_{i=1}^{n}a_i)^Sp_iG_i>a_i^{n-1}$$

其中 $G_i=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}(1\leqslant i\leqslant n,3\leqslant n\in\mathbf{N})$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_ia_i}{\sqrt[n-1]{p_iG_i-a_i^{n-1}}}\geqslant\frac{S}{\sqrt[n-1]{m-1}} \qquad (A_5^{[4]})$$

(6) 我们在第 4 节中的加权推广中，虽然建立了式(A) 的三个加权推广形式，但应用

杨克昌不等式建立形如推广 19 中的式($A_5^{[1]}$)一直是我们的期望,而至今却尚未建立起来.

首先,杨克昌不等式指的是:

杨克昌不等式 设 λ,μ,v 和 x,y,z 均为正数,则

$$(\mu+v)x+(v+\lambda)y+(\lambda+\mu)z\geqslant 2\sqrt{(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)(yz+zx+xy)} \quad (*)$$

等号成立仅当 $\lambda/x=\mu/y=v/z$.

略证 应用柯西不等式有

$$\sum\lambda x+2\sqrt{(\sum\mu v)(\sum yz)}=$$

$$\sum\lambda x+\sqrt{(\sum 2\mu v)(\sum 2yz)}\leqslant$$

$$[(\sum\lambda^2+\sum 2\mu v)(\sum x^2+\sum 2yz)]^{\frac{1}{2}}=(\sum\lambda)(\sum x)\Rightarrow$$

$$(\sum\lambda)(\sum x)-\sum\lambda x\geqslant 2\sqrt{(\sum\mu v)(\sum yz)}\Rightarrow$$

$$\sum(\mu+v)x\geqslant 2\sqrt{(\sum\mu v)(\sum yz)}$$

等号成立仅当 $\dfrac{\lambda}{x}=\dfrac{\mu}{y}=\dfrac{v}{z}=\left(\dfrac{\sum 2\mu v}{\sum 2yz}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\dfrac{\lambda}{x}=\dfrac{\mu}{y}=\dfrac{v}{z}$

其实,式(*)还有变形、加强和推广.

为了应用式(*)来建立式(A)的加权推广,笔者曾颇觉“踏破铁鞋无觅处”,“山重水复疑无路”,失败了几次,到今天终于“云开雾散见日出”,“柳暗花明又一村”,这充分表明“数学诗文巧相通”“文章本天成,妙手偶得之”.

推广 23 设正参数 p,q,r 满足 $pqr\geqslant 1$. λ,μ,v 为正系数,指数 $2\leqslant m\in\mathbf{N}$,记 $S=3^m-1$,$\theta=\dfrac{1}{S}\sum_{i=1}^{m}i2^iC_m^i>1$;元数 a,b,c 满足

$$\left[p^{\frac{1}{\theta}}-\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right)^{\frac{m}{\theta}}\right]\left[q^{\frac{1}{\theta}}-\left(\frac{b}{\sqrt{ca}}\right)^{\frac{m}{\theta}}\right]\left[r^{\frac{1}{\theta}}-\left(\frac{c}{\sqrt{ab}}\right)^{\frac{m}{\theta}}\right]\geqslant 0 \quad ⑭$$

则有

$$P_\lambda(m)\equiv\frac{(\mu+v)a}{\sqrt[m]{a^m+Sp(\sqrt{bc})^m}}+\frac{(v+\lambda)b}{\sqrt[m]{b^m+Sq(\sqrt{ca})^m}}+\frac{(\lambda+\mu)c}{\sqrt[m]{c^m+Sr(\sqrt{ab})^m}}\geqslant 2\left(\frac{\mu v+v\lambda+\lambda\mu}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (T)$$

当取 $m=2$ 时,$\theta=\dfrac{3}{2}$. 式 ⑭ 化为

$$\prod[p^{\frac{2}{3}}-(\frac{a^2}{bc})^{\frac{2}{3}}]\geqslant 0\Rightarrow\prod\left(p^{\frac{1}{3}}-\frac{a}{G}\right)\geqslant 0$$

其中 $G=\sqrt[3]{abc}$.

再取 $p=q=r=1$ 时,上式化为

$$(G-a)(G-b)(G-c)\geqslant 0 \tag{15}$$

如当取 $a=3^3,b=2^3,c=1^3$ 时,$G=6$.此时式⑮显然成立.这说明满足条件式⑮的元数 a,b,c 是存在的.而此时式(T)化为纯粹的加权推广

$$P_\lambda\equiv\frac{(\mu+v)a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{(v+\lambda)b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{(\lambda+\mu)c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 2\left(\frac{\mu v+v\lambda+\lambda\mu}{3}\right)^{1/2} \tag{T'}$$

证明 (1)先证明结论:

正数 x,y,z 满足条件

$$xyz\geqslant 1,(x-1)(y-1)(z-1)\geqslant 0 \tag{16}$$

则有不等式

$$\frac{1}{(1+2y)(1+2z)}+\frac{1}{(1+2z)(1+2x)}+\frac{1}{(1+2x)(1+2y)}\geqslant\frac{1}{3} \tag{17}$$

因为式⑰等价于

$$3\sum(1+2x)\geqslant\prod(1+2x)\Leftrightarrow 3(3+2\sum x)\geqslant 1+2\sum x+4\sum yz+8xyz\Leftrightarrow 9+6\sum x\geqslant$$
$$1+2\sum x+4\sum yz+8\Leftrightarrow\sum x-\sum yz\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$xyz-\sum yz+\sum x-1\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(x-1)(y-1)(z-1)\geqslant 0$$

由式⑯知,式⑰成立(其实,应用式⑰又可以推出式⑯,即在条件 $xyz=1$ 下,式⑯与式⑰等价,可以相互推出).

(2)对于 $2\leqslant m\in\mathbf{N}$,我们应用二项式定理,设

$$(1+2x)^m=1+t \tag{18}$$

其中 $t=\sum_{i=1}^{m}C_m^i(2x)^i=\sum_{i=1}^{m}(2^iC_m^i)x^i,S=\sum_{i=1}^{m}2^iC_m^i=3^m-1=(1+2)^m-1$

注意到 $$\theta=\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{m}i2^iC_m^i>1$$

应用加权不等式,有

$$t\geqslant S\Big(\prod_{i=1}^{m}x^{i2^iC_m^i}\Big)^{1/S}=Sx^\theta\Rightarrow 1+2x=\sqrt[m]{1+t}\geqslant\sqrt[m]{1+Sx^\theta}\Rightarrow$$

$$\text{同理}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt[m]{1+Sx^\theta}}\geqslant\frac{1}{1+2x}\\&\frac{1}{\sqrt[m]{1+Sy^\theta}}\geqslant\frac{1}{1+2y}\\&\frac{1}{\sqrt[m]{1+Sz^\theta}}\geqslant\frac{1}{1+2z}\end{aligned}\right\}\Rightarrow T_\lambda^{(m)}=\sum\frac{1}{\sqrt[m]{(1+Sy^\theta)(1+Sz^\theta)}}\geqslant$$

$$\sum\frac{1}{(1+2y)(1+2z)}\geqslant\frac{1}{3}\Rightarrow \tag{19}$$

$$P_\lambda^{(m)}=\sum\frac{(\mu+v)}{\sqrt[m]{1+Sx^\theta}}(\text{应用杨克昌不等式})\geqslant$$

$$2\sqrt{\left(\sum\mu v\right)T_{\lambda}^{(m)}} \geqslant 2\left(\frac{\sum\mu v}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ⑳$$

在式 ⑳ 中令

$$(x^{\theta},y^{\theta},z^{\theta}) = \left(p\left(\frac{\sqrt{bc}}{a}\right)^{m},q\left(\frac{\sqrt{ca}}{b}\right)^{m},r\left(\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)^{m}\right) \Rightarrow (x,y,z) =$$

$$\left(p^{\frac{1}{\theta}}\left(\frac{\sqrt{bc}}{a}\right)^{\frac{m}{\theta}},q^{\frac{1}{\theta}}\left(\frac{\sqrt{ca}}{b}\right)^{\frac{m}{\theta}},r^{\frac{1}{\theta}}\left(\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)^{\frac{m}{\theta}}\right) \quad ㉑$$

即得式(T),且式 ㉑ 代入条件式

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geqslant 0$$

即得条件式 ⑭,等号成立仅当

$$\begin{cases} x = y = z = 1 \\ \lambda = \mu = v \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu = v \\ \dfrac{p}{a^{3m/2}} = \dfrac{q}{b^{3m/2}} = \dfrac{r}{c^{3m/2}} \\ pqr = 1 \end{cases} \quad ㉒$$

抛砖引玉　开花结果

——一道 IMO 妙题所引发的数学文化

邓寿才

（一）　外森比克不等式

1　介　绍

当你翻开《历届 IMO 试题集》(刘培杰主编) 第 29 页时，一道 IMO 妙题立刻映入你的眼帘：

题目　已知 a,b,c 是三角形三边的长度，T 是该三角形的面积，求证

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}T \tag{A}$$

并指出在什么条件下等号成立.

接着，此书一气呵成地给出了式(A) 的 26 种优美的证法，随即介绍了式(A) 的一个推广 —— 匹多(D. Pedoe) 不等式的 6 种漂亮的证法.

早在 1919 年，国外的几何学家外森比克(R. Weizenböck) 就首次提出并证明了只涉及三角形边长与面积的不等式(A).

由于式(A) 形式简洁，对称而优美，且便于记忆，它表明任意一个三角形的三边的平方和不小于其面积的 $4\sqrt{3}$ 倍，因此历来为人们所重视，并被初数界称之为外森比克不等式. 人们一方面不断寻求它的新证明，一方面又不断探求它的加强和推广. 有趣的是，在 1961 年举办的第 3 届 IMO 时，波兰提供了式(A)，作为本届 IMO 的第 2 题.

关于式(A) 的一系列研究结论，它们个个美妙有趣，在初数界“浪迹江湖”，“散居四海”. 笔者对式(A) 也“情有独钟”，“偏爱有加”，多想将它们“招换回家”，“欢聚一堂”，闪现光采.

首先申明，由于笔者是业余数学爱好者，缺乏专业水平，再加目前在外打工，因此资料不全，当介绍到别人的研究结论时，凭记忆尽力标明作者姓名，忘记了的用(∗) 符号标明，本人的结论用(△) 符号标明，因此若有标错了的结论，请广大读者和老师们见谅，

并指正.

2 加 强

如果应用余弦定理,可将式(A)"化妆"成为等价形式

$$bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C \geqslant 2\sqrt{3}\Delta \quad ①$$

其中 $\Delta \equiv T$.

式 ① 又可"打扮"成一个意义等价的三角不等式

$$\cot A + \cot B + \cot C \geqslant \sqrt{3} \quad ②$$

此外,如果应用三角不等式

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{9}{4} \quad ③$$

又可将式(A)完善成一个双面不等式

$$9R^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad ④$$

其中,R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

另一方面,尽管式(A)优美有趣,但它不够强.首先,著名的等周不等式

$$a + b + c \geqslant (2\sqrt[4]{27})\sqrt{\Delta} \quad ⑤$$

就比式(A)强.但是,式 ⑤ 又可加强为

$$bc + ca + ab \geqslant 4\sqrt{3}\triangle \quad ⑥$$

从结构上,式 ⑥ 可视为式(A)的一个配对式,而它又可以加强成著名的玻利亚(Pólya) - 舍贵(Szegö)不等式

$$abc \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{3}{2}} \quad ⑦$$

可见,式 ⑦ 够强的了.但是,它并非最强,它还有如下三个加强

$$abc/(a + b + c) \geqslant \frac{4}{9}\sqrt{3}\Delta \quad ⑧$$

$$(abc)^2/(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant \frac{16}{9}\Delta^2 \quad ⑨$$

$$(abc) \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\sum(a - b)^2(a + b - c) \quad ⑩$$

式 ⑨ 和式 ⑩ 是两个不分大小的并行结果,它又比式 ⑧ 强,因此,上述一系列不等式可串联成一条"金项链"

$$9\Delta^2 \geqslant \sum a^2 \geqslant \frac{1}{3}(\sum a)^2 \geqslant \sum bc \geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}} \geqslant 9\left(\frac{abc}{\sum a}\right) \geqslant \frac{3\sqrt{3}\,abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad (B)$$

根据不等式的递推性,我们只须证明式 ⑨ 和式 ⑩ 即可.

式 ⑨ 证明:应用三角不等式

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2=9\left(\frac{abc}{4\Delta}\right)^2\Rightarrow\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geqslant\frac{4}{3}\Delta$$

式 ⑩ 的证明:

$$\sum a^2(b+c-a)\geqslant 3\left[\prod a^2(b+c-a)\right]^{1/3}=3\left(abc\cdot\frac{abc}{a+b+c}\cdot 16\Delta^2\right)\geqslant$$

$$3\left[\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}\Delta\right)\cdot 16\Delta^2\right]^{\frac{1}{3}}=3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow$$

$$abc=\frac{1}{3}\sum a^2(b+c-a)+\frac{1}{6}\sum(a-b)^2(a+b-c)\geqslant$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}\sum(a-b)^2(a+b-c)$$

当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,前面所有的三角形不等式取等号.

式(A) 还有一个漂亮的加强是

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3(1+K)}\Delta \tag{C}$$

其中

$$K=\frac{1}{6}\sum\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 0$$

证明 由于

$$\sin B\sin C=\frac{1}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\leqslant\frac{1}{2}(1+\cos A)=(\cos\frac{A}{2})^2\Rightarrow$$

$$(\cos\frac{A}{2})^2\geqslant\sin B\sin C\Rightarrow\sin A\geqslant(\sin B\sin C)\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a^2\geqslant 4\Delta\tan\frac{A}{2} \\ 4R^2\sin^2 A\geqslant 8R^2(\prod\sin A)\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\Rightarrow \text{同理}\begin{cases} b^2\geqslant 4\Delta\tan\frac{B}{2} \\ c^2\geqslant 4\Delta\tan\frac{C}{2}\end{cases}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum a^2\geqslant 4\Delta\sum\tan\frac{A}{2} \tag{11}$$

又

$$(\sum\tan\frac{A}{2})^2=\sum(\tan\frac{A}{2})^2+2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=$$

$$3\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\left[\sum(\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2})-2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right]=$$

$$3+\frac{1}{2}\sum(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2})^2\Rightarrow\sum\tan\frac{A}{2}=\sqrt{3(1+K)}\Rightarrow$$

$$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3(1+K)}\Delta$$

即式(C)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

式(A)还有一个最漂亮的推广便是

$$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta + \sum (b-c)^2$$

这将在下一篇中介绍.

如果我们记

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{1}{2}\sum (b^2-c^2)^2 \geqslant 0 \\ Q_2 = (\sum a)\sum (b+c-a)(b-c)^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

和 $Q = Q_1 + Q_2 \geqslant 0$,还可建立一个漂亮的双面不等式

$$4\sqrt{3}\Delta + \frac{Q}{8\sqrt{3}\Delta} \geqslant \sum bc \geqslant 4\sqrt{3}\Delta + \frac{Q}{2\sum bc} \tag{D}$$

3 推 广

(1)在研究不等式的推广时,不仅要用到平均值不等式、柯西不等式、赫尔特不等式、加权不等式、切比雪夫不等式,还要应用

三角母不等式 对于任意 $\triangle ABC$ 与任意实数 x,y,z,有不等式

$$2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C \leqslant x^2+y^2+z^2 \tag{θ_1}$$

等号成立仅当

$$x\csc A = y\csc B = z\csc C$$

当 $xyz > 0$ 时,式(θ_1)化为

$$\lambda\cos A + \mu\cos B + v\cos C \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\mu v}{\lambda} + \frac{v\lambda}{\mu} + \frac{\lambda\mu}{v}\right) \tag{θ_2}$$

其中

$$(\lambda,\mu,v) = (\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$$

如果 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,在式(θ_1)中令 $(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C)$ 得

$$-\sum 2yz\cos 2A \leqslant \sum x^2 \Rightarrow \sum 2yz(2\sin^2 A - 1) \leqslant \sum x^2 \Rightarrow 4\sum yz\sin^2 A \leqslant (x+y+z)^2 \tag{θ_3}$$

等号成立仅当

$$x/\sin 2A = y/\sin 2B = z/\sin 2C$$

还有一个应用广泛的重要不等式便是

杨克昌不等式 设 x,y,z 为任意正数,实数 α,β,γ 中任意两数之和非负,则有

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \geqslant (\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)(2yz+2zx+2xy-x^2-y^2-z^2) \tag{θ_4}$$

等号成立仅当

$$(\beta+\gamma)/x = (\gamma+\alpha)/y = (\alpha+\beta)/z$$

式(θ_4)的等价形式便是第29届IMO预选题:

设 a_1,a_2,a_3 为任意正数,b_1,b_2,b_3 三个实数里任意两个之和非负,则有

$$\begin{aligned}&[(b_2+b_3)a_1+(b_3+b_1)a_2+(b_1+b_2)a_3]^2 \geqslant \\ &4(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)(b_2b_3+b_3b_1+b_1b_2)\end{aligned} \tag{θ_5}$$

等号成立仅当 $$b_1/a_1 = b_2/a_2 = b_3/a_3$$

其实,在式(θ_5)中令

$$\begin{cases} b_2 + b_3 = 2x \\ b_3 + b_1 = 2y \\ b_1 + b_2 = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = y + z - x \\ b_2 = z + x - y \\ b_3 = x + y - z \end{cases} \Rightarrow \sum b_2 b_3 = \sum (z + x - y)(x + y - z) =$$

$$\left. \begin{matrix} 2\sum yz - \sum x^2 \Rightarrow \sum b_2 b_3 = 2\sum yz - \sum x^2 \\ \text{令}(a_1, a_2, a_3) = (\alpha, \beta, \gamma) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$[\sum (b_2 + b_3) a_1]^2 \geqslant 4(\sum \beta\gamma)(2\sum yz - \sum x^2) \Rightarrow$$

$$(\sum \alpha x)^2 \geqslant 4(\sum \beta\gamma)(2\sum yz - \sum x^2)$$

(2) 虽然,应用"波 - 舍"不等式

$$abc \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{3}{2}}$$

可先将式(A)推广为

推广 1(△) 设 λ, μ, v 为正数,$\triangle A_iB_iC_i(1 \leqslant i \leqslant n, n \in \mathbf{N})$ 的边长和面积分别为 a_i, b_i, c_i, Δ_i,指数 $K > 0$,则有不等式

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^K + \mu\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^K + v\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^K \geqslant \sqrt{3}\delta\left(\prod_{i=1}^{n} \Delta_i\right)^{\frac{K}{2}} \tag{E}$$

其中

$$\delta = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{\frac{nK}{2}} (2\sum \mu v - \sum \lambda^2) \tag{①}$$

略证 记 $m = 2\sum \mu v - \sum \lambda^2$,有

$$\sum \lambda\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^K \geqslant \left[m\sum\left(\prod_{i=1}^{n} b_i c_i\right)^K\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \left[3m\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{2K}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[3m\left(\prod_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^{\frac{2K}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\left[3m\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{nK}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\delta\left(\prod_{i=1}^{n} \Delta_i\right)^{\frac{K}{2}}$$

等号成立仅当 $\triangle A_iB_iC_i$ 为正三角形,且 $\lambda = \mu = v$.

(3) 从推广 1 有推论

$$(\mu + v)a^2 + (v + \lambda)b^2 + (\lambda + \mu)c^2 \geqslant 8\sqrt{(\mu v + v\lambda + \lambda\mu)}\Delta \tag{②}$$

$$(\mu + v)a_1a_2 + (v + \lambda)b_1b_2 + (\lambda + \mu)c_1c_2 \geqslant 8\sqrt{(\mu v + v\lambda + \lambda\mu)\Delta_1\Delta_2} \tag{③}$$

进一步地,我们有

$$a^2 \geqslant 4\Delta\tan\frac{A}{2} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \lambda a^2\cot\frac{A}{2} \geqslant 4\lambda\Delta \\ \text{同理}\begin{cases} \mu b^2\cot\frac{B}{2} \geqslant 4\mu\Delta \\ vc^2\cot\frac{C}{2} \geqslant 4v\Delta \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum \lambda a^2\cot\frac{A}{2} \geqslant 4(\lambda + \mu + v)\Delta \tag{④}$$

上面的式②、③、④式可视为式(A)的加权推广,等号成立的条件均为:

$\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\lambda = \mu = v$.

这个条件要求太苛刻,不尽人意,为追求式(A)更好的加权推广,人们经过了不懈的努力.首先我们建立如下推广式:

推广2 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,则对任意正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 有

$$\lambda_1 bc + \lambda_2 ca + \lambda_3 ab \geqslant 4\sqrt{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1}\cdot\Delta \tag{F}$$

等号成立仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$,$\triangle ABC$ 为正三角形.

如果应用公式 $\Delta = abc/(4R)$,可将上式化为一个漂亮的几何不等式

$$\frac{\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_2}{b} + \frac{\lambda_3}{c} \geqslant \frac{\sqrt{\delta}}{R}$$

其中

$$\delta = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

证明 由于

$$1 - 2\sin A\sin B = 1 + \cos(A + B) - \cos(A - B) = 1 - \cos(A - B) - \cos C \geqslant - \cos C \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - 2\sin A\sin B \geqslant - \cos C \\ \text{同理}\begin{cases} 1 - 2\sin C\sin A \geqslant - \cos B \\ 1 - 2\sin B\sin C \geqslant - \cos A \end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left(\sum\lambda_1 bc\right)^2 - 16\left(\sum\lambda_2\lambda_3\right)\Delta^2 =$$

$$\sum(\lambda_1 bc)^2 + 2\sum(\lambda_2 ca)(\lambda_3 ab)(1 - 2\sin B\sin C) =$$

$$\sum(\lambda_1 bc)^2 - 2\sum(\lambda_2 ca)(\lambda_3 ab)\cos A(\text{应用三角母不等式}) \geqslant 0\Rightarrow$$

$$\left(\sum\lambda_1 bc\right)^2 \geqslant 16\left(\sum\lambda_2\lambda_3\right)\Delta^2\Rightarrow$$

$$\sum\lambda_1 bc \geqslant 4\sqrt{\sum\lambda_2\lambda_3}\cdot\Delta$$

即式(F)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1 bc}{\sin A} = \dfrac{\lambda_2 ca}{\sin B} = \dfrac{\lambda_3 ab}{\sin C} \\ \angle A = \angle B = \angle C \end{cases}$$

即 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

(4)1965年,Oppenheim 建立了式(A)的加权推广:

推广3 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中至少有两个正数,且满足条件 $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0$,并证 $\delta = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$,则

$$\lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2 \geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta \tag{G}$$

等号成立仅当

$$\frac{a^2}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{b^2}{\lambda_3 + \lambda_1} = \frac{c^2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{⑤}$$

关于式(G),至少有6种漂亮的证法,限于篇幅,现选其一.

证明 首先,由已知可推得

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0, \lambda_2 + \lambda_3 > 0, \lambda_3 + \lambda_1 > 0$$

否则,不妨设 $\lambda_1+\lambda_2\leqslant 0$.因 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中至少有两个正数,则 λ_1,λ_2 一正一负,即 $\lambda_1\lambda_2<0$,且 $\lambda_3>0$,故 $\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)\leqslant 0$,因而

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=\lambda_1\lambda_2+\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)<0$$

这与已知矛盾,所以 $\lambda_1+\lambda_2>0$,同理 $\lambda_3+\lambda_1>0,\lambda_2+\lambda_3>0$.

其次,从

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1>0\Rightarrow(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)>\lambda_3^2$$

令
$$\cos\theta=\frac{\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)}}\Rightarrow\sin\theta=\frac{t}{\sqrt{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)}}$$

其中
$$t=\sqrt{\delta}=\sqrt{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1},\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$$

由
$$\begin{cases}1\geqslant\cos(C-\theta)=\cos C\cos\theta+\sin C\sin\theta\\2abc\sin C=4\Delta,2ab\cos C=a^2+b^2-c^2\end{cases}\Rightarrow$$
$$2\sqrt{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)}\,ab\geqslant\lambda_3(a^2+b^2-c^2)+4t\Delta\Rightarrow$$
$$\lambda_1a^2+\lambda_2b^2+\lambda_3c^2\geqslant 4t\Delta+(\sqrt{\lambda_3+\lambda_1}\,a-\sqrt{\lambda_2+\lambda_3}\,b)^2\geqslant$$
$$4t\Delta=4\sqrt{\delta}\Delta$$

即式(G)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}\angle C=\theta=\arccos\left[\dfrac{\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)}}\right]\\\sqrt{\lambda_3+\lambda_1}\,a=\sqrt{\lambda_2+\lambda_3}\,b\end{cases}\Rightarrow\frac{a^2}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{b^2}{\lambda_3+\lambda_1}=\frac{c^2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

如果我们记 $P=\lambda_1a^2+\lambda_2b^2+\lambda_3c^2$.

$$\begin{cases}Q_1=(\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}\,b-\sqrt{\lambda_3+\lambda_1}\,c)^2\geqslant 0\\Q_2=(\sqrt{\lambda_2+\lambda_3}\,c-\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}\,a)^2\geqslant 0\\Q_3=(\sqrt{\lambda_3+\lambda_1}\,a-\sqrt{\lambda_2+\lambda_3}\,b)^2\geqslant 0\end{cases}$$

那么,从上述证法,有

$$\begin{cases}P\geqslant 4t\Delta+Q_1\\P\geqslant 4t\Delta+Q_2\Rightarrow P\geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta+Q\\P\geqslant 4t\Delta+Q_3\end{cases}\tag{H}$$

其中 $Q=\frac{1}{3}(Q_1+Q_2+Q_3)\geqslant 0$,等号成立的条件仍然是式⑤.

很明显,式(H)即为式(G)的加强.

(5)式(G)是式(A)的加权推广,而式(A)只涉及一个三角形的边长和面积.在20世纪90年代,我国的李世杰老师将式(G)从一个三角形推广到了两个三角形的情形.

推广4(李世杰)　设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是任意三个正数,$\triangle A_1B_1C_1$ 的三边长为 a_1,b_1,c_1,面积为 Δ_1;$\triangle A_2B_2C_2$ 的三边长为 a_2,b_2,c_2,面积为 Δ_2,则有

$$\lambda_1a_1a_2+\lambda_2b_1b_2+\lambda_3c_1c_2\geqslant 4\sqrt{(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\Delta_1\Delta_2}\tag{I}$$

等号成立仅当 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$,且

$$\frac{a_1}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{b_1^2}{\lambda_3+\lambda_1}=\frac{c_1^2}{\lambda_1+\lambda_2} \quad ⑥$$

显然,当 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$ 时,式(Ⅰ)化为式(H),此时系数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的限制条件可放宽为式(H)的情形.

证明 记

$$\begin{cases} A'=\pi-(A_1+A_2) \\ B'=\pi-(B_1+B_2) \Rightarrow A'+B'+C'=3\pi-\sum A_1-\sum A_2=\pi\Rightarrow \\ C'=\pi-(C_1+C_2) \end{cases}$$

$$1-2\sin A_1\sin A_2=1+\cos(A_1+A_2)-\cos(A_1-A_2)\geqslant\cos(A_1+A_2)=-\cos A'\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-2\sin A_1\sin A_2\geqslant-\cos A' \\ \text{同理}\begin{cases}1-2\sin B_1\sin B_2\geqslant-\cos B' \\ 1-2\sin C_1\sin C_2\geqslant-\cos C'\end{cases} \\ \text{证}(x,y,z)=(\lambda_1a_1a_2,\lambda_2b_1b_2,\lambda_3c_1c_2)(x,y,z>0) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$M=(\sum\lambda_1a_1a_2)^2-16(\sum\lambda_1\lambda_2)\triangle_1\triangle_2=(x+y+z)^2-4\sum yz\sin A_1\sin A_2=$$

$$\sum x^2+2\sum yz(1-2\sin A_1\sin A_2)\geqslant\sum x^2-2\sum yz\cos A'\geqslant$$

$$0(\text{应用三角母不等式})\Rightarrow\sum\lambda_1a_1a_2\geqslant4\sqrt{(\sum\lambda_1\lambda_2)\Delta_1\Delta_2}$$

即式(I)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases} A_1-A_2=B_1-B_2=C_1-C_2=0 \\ x:y:z=\sin A':\sin B':\sin C' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2 \\ x:y:z=\sin 2A_1:\sin 2B_1:\sin 2C_1 \end{cases}\Rightarrow\frac{\sin 2A_1}{\lambda_1a_1^2}=\frac{\sin 2B_1}{\lambda_1b_1^2}=\frac{\sin 2C_1}{\lambda_3c_1^2}\Rightarrow$$

$$\lambda_1\tan A_1=\lambda_2\tan B_1=\lambda_3\tan C_1\Rightarrow$$

$$\frac{a_1^2}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{b_1^2}{\lambda_3+\lambda_1}=\frac{c_1^2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(6) 前面的(G)、(H)、(I)三个加权推广式,堪入的是一组系数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,其实,我们可以堪入双组系数,使之更美更妙:

推广5(△) 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边长为 a_1,b_1,c_1,面积为 Δ_1;$\triangle A_2B_2C_2$ 的三边长为 a_2,b_2,c_2,面积为 Δ_2;x,y,z,μ,v,ω 为任意正数,则

$$\frac{x^2}{\mu}a_1a_2+\frac{y^2}{v}b_1b_2+\frac{z^2}{\omega}c_1c_2\geqslant48\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \quad (J)$$

其中

$$\delta=\frac{yz+zx+xy}{\sqrt{v\omega+\omega\mu+\mu v}} \quad ⑦$$

等号成立仅当 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$,且

$$x:y:z=\mu:v:\omega=\cot A_1:\cot B_1:\cot C_1 \quad ⑧$$

显然,当$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{v}=\frac{z}{\omega}$时,式(J)与式(I)等价.

证明　我们记式(J)左边为P,在式(I)中取

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\left(\frac{x^2}{\mu},\frac{y^2}{v},\frac{z^2}{\omega}\right)\Rightarrow P\geqslant 4\sqrt{t}\cdot\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \quad ⑨$$

其中

$$t=\frac{x^2y^2}{\mu v}+\frac{y^2z^2}{v\omega}+\frac{z^2x^2}{\omega\mu}\Rightarrow(\mu v+v\omega+\omega\mu)t\geqslant(xy+yz+zx)^2\text{(应用柯西不等式)}\Rightarrow$$

$$t\geqslant\frac{(xy+yz+zx)^2}{\mu v+v\omega+\omega\mu}=\delta^2\Rightarrow P\geqslant 4\delta\sqrt{\Delta_1\Delta_2}$$

即式(J)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2\\ \frac{x^2}{\mu}:\frac{y^2}{v}:\frac{z^2}{\omega}=\cot A_1:\cot B_1:\cot C_1\\ \frac{xy}{\mu v}=\frac{yz}{v\omega}=\frac{zx}{\mu\omega}\end{cases}\Rightarrow x:y:z=\mu:v:\omega=\cot A_1:\cot B_1:\cot C_1$$

(7) 无独有偶,式(I)还有一个漂亮的"配偶":

推广6($\triangle$)　设$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$的三边长和面积分别为a_1,b_1,c_1,Δ_1和a_2,b_2,c_2,Δ_2;x,y,z为任意正数,则

$$\frac{xa_1a_2}{y+z}+\frac{yb_1b_2}{z+x}+\frac{zc_1c_2}{x+y}\geqslant 2\sqrt{3\Delta_1\Delta_2} \quad (K)$$

等号成立仅当$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$均为正三角形,且$x=y=z$.

证明　记$\alpha=\prod(x+y),\beta=\sum xy(x+y)$,有

$$\beta=\sum xy(x+y)\geqslant 2\sum(xy)^{3/2}\geqslant 6[\prod(xy)^{3/2}]^{1/3}=6xyz\Rightarrow 2xyz\leqslant\frac{1}{3}\beta\Rightarrow$$

$$\alpha=\prod(x+y)=\sum xy(x+y)+2xyz=\beta+2xyz\leqslant\beta+\frac{1}{3}\beta=\frac{4}{3}\beta\Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{2}\geqslant\frac{3}{4}$$

记式(K)左边为T,在式(I)中令

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right)\Rightarrow T\geqslant 4\sqrt{(\sum\lambda_2\lambda_3)\Delta_1\Delta_2}=$$

$$4\sqrt{\sum\left(\frac{x}{y+z}\cdot\frac{y}{z+x}\right)\cdot\Delta_1\Delta_2}=$$

$$4\sqrt{\frac{\sum xy(x+y)}{\prod(x+y)}\cdot\Delta_1\Delta_2}=$$

$$4\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\Delta_1\Delta_2}\geqslant 4\sqrt{\frac{3}{4}\Delta_1\Delta_2}\Rightarrow T\geqslant 2\sqrt{3\Delta_1\Delta_2}$$

等号成立的条件易得.

(8) 我们知道,在式(A)的几个加强式中,结构最紧凑的当为著名的"波-舍"不等式

$$abc \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{3}{2}} \tag{⑩}$$

由于外形结构太紧凑，因此式 ⑩ 没有加权推广，却有指数推广：

推广 7(△) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，面积为 Δ；指数 $\alpha,\beta,\gamma \in (0,1)$，且满足 $\alpha+\beta+\gamma=2$，则

$$a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \geqslant 12\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\cdot\Delta \tag{L}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}$.

其实，当 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}$ 时，式(L) 化为式 ⑩.

证明 首先易得

$$\sum(1-\beta)(1-\gamma) \leqslant \frac{1}{3}\left[\sum(1-\alpha)\right]^2 = \frac{1}{3}\left(3-\sum\alpha\right)^2 = \frac{1}{3}(3-2)^2 = \frac{1}{3}$$

应用三角不等式

$$\sum yz\sin^2 A \leqslant \frac{1}{4}\left(\sum x\right)^2 \Rightarrow \sum yza^2 \leqslant R^2\left(\sum x\right)^2 = \left(\frac{abc}{4\triangle}\right)^2\left(\sum x\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x+y+z)^2(abc)^2 \geqslant 16xyz\Delta^2\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right) \tag{⑪}$$

令

$$\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right) = (1-\alpha,1-\beta,1-\gamma) \Rightarrow \sum\frac{1}{x} = \sum(1-\alpha) = 3-\sum\alpha = 3-2 = 1$$

在式 ⑪ 中应用加权不等式，有

$$\left(\sum x\right)^2(abc)^2 \geqslant 16xyz\Delta^2\cdot\sum(1-\alpha)a^2 \geqslant 16xyz\Delta^2\left(\prod a^{2(1-\alpha)}\right) =$$

$$16xyz\Delta^2(a^{1-\alpha}b^{1-\beta}c^{1-\gamma})^2 \Rightarrow a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \geqslant \frac{4\Delta\sqrt{xyz}}{\sum x} =$$

$$\frac{4\Delta\sqrt{\prod(1-\alpha)}}{\sum(1-\beta)(1-\gamma)} \geqslant 12\sqrt{\prod(1-\alpha)}\Delta$$

即式(L) 成立，等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}$.

由于正弦和不等式

$$\sin A+\sin B+\sin C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

有多个加权推广(有的还是双重系数)，因此，利用这些加权推广，我们又可建立一系列类似于式(K) 的指数推广.

推广 7 中的式(L) 虽然结构对称简洁，但美中不足的在等号成立的条件里，将 $\triangle ABC$ 与指数 α,β,γ“分居”了. 其实，我们可以建立更好的

推广 8(△) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，面积为 Δ，正数 $x,y,z \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$，且满足 $x+y+z=1$，则

$$a^x b^y c^z \geqslant 2\,\frac{p}{q}\sqrt{\Delta} \tag{L'}$$

其中

$$\begin{cases} p = \sqrt{x^x y^y z^z} \\ q = \sqrt[4]{(1-2x)^{1-2x}\cdot(1-2y)^{1-2y}\cdot(1-2z)^{1-2z}} \end{cases} \tag{12}$$

等号成立仅当

$$\frac{a}{\sqrt{x(1-2x)}} = \frac{b}{\sqrt{y(1-2y)}} = \frac{c}{\sqrt{z(1-2z)}} \tag{13}$$

证明 （ⅰ）由于$\sum(\pi-2A)=\pi$,应用三角母不等式有

$$2\sum yz\cos(\pi-2A) \leqslant \sum x^2 \Rightarrow 4\sum yz\sin^2 A \leqslant (\sum x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\sum yza^2 \leqslant R^2 = \left(\frac{abc}{4\Delta}\right)^2 \tag{14}$$

（ⅱ）式 ⑭ 等号成立仅当

$$\frac{\sin(\pi-2A)}{x} = \frac{\sin(\pi-2B)}{y} = \frac{\sin(\pi-2C)}{z} \Rightarrow \frac{\sin 2A}{x} = \frac{\sin 2B}{y} = \frac{\sin 2C}{z}$$

（证 $m = R^2\cos A\cos B\cos C$）$\Rightarrow$

$$\frac{x(y+z-x)}{ma^2} = \frac{y(z+x-y)}{mb^2} = \frac{z(x+y-z)}{mc^2} \Rightarrow \tag{15}$$

$$\frac{x(1-2x)}{a^2} = \frac{y(1-2y)}{b^2} = \frac{z(1-2z)}{c^2}$$

（ⅲ）注意到$\sum(1-2x)=1$,在式 ⑭ 中应用加权不等式有

$$\left(\frac{abc}{4\Delta}\right)^2 \geqslant \sum yza^2 = xyz\sum\left[(1-2x)\frac{a^2}{x(1-2x)}\right] \geqslant xyz\prod\left[\frac{a^2}{x(1-2x)}\right]^{1-2x} =$$

$$\frac{xyz}{\prod[x(1-2x)]^{1-2x}}(abc)^2(a^x b^y c^z)^{-4} \Rightarrow (a^x b^y c^z)^4 \geqslant$$

$$\frac{(x^x y^y z^z)^2}{\prod(1-2x)^{1-2x}}(4\Delta)^2 \Rightarrow a^x b^y c^z \geqslant 2\,\frac{p}{q}\sqrt{\Delta}$$

因此式(L′)成立,等号成立的条件是式 ⑮,即为式 ④.

从外形结构上看,式(L′)比式(L)复杂,略显庞大,但等号成立的条件式 ⑬ 中,$\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 与指数 x,y,z“捆绑”在一起“永不分离一家亲”,我们追求的就是这种数学境界.

特别地,当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时,$p/q = 1/\sqrt[4]{3}$,式(L′)化为

$$(abc)^{1/3} \geqslant \left(\frac{4\triangle}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow abc \geqslant \left(\frac{4\triangle}{\sqrt{3}}\right)^{3/2}$$

这就是“波 - 舍”不等式.

4 多边形推广

在推广 3 中的式(G) 里,如果我们设

$$\begin{cases}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\cot\alpha_1,\cot\alpha_2,\cot\alpha_3)\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in(0,\pi),\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi\end{cases}\Rightarrow\delta=\lambda_1\lambda_2+\lambda_3\lambda_2+\lambda_3\lambda_1=1\Rightarrow \tag{G'}$$

$$\lambda_1a^2+\lambda_2b^2+\lambda_3c^2\geqslant4\sqrt{\delta}\Delta=4\Delta\Rightarrow a^2\cot\alpha_1+b^2\cot\alpha_2+c^2\cot\alpha_3\geqslant4\Delta$$

式(G′) 既是式(G) 的推论,又是它的等价形式.

在20世纪90年代,我国的杨学枝老师将式(G′) 推广到了任意凸 n 边形,从而推广了式(G):

推广 9(杨学枝) 设平面凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各边长为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,面积为 Δ;$\alpha_i\in(0,\pi)(1\leqslant i\leqslant n)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\pi$,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cot\alpha_i\geqslant4\Delta \tag{M}$$

等号成立仅当此 n 边形内接于圆(设半径为 R),且

$$\frac{a_1}{\sin\alpha_1}=\frac{a_2}{\sin\alpha_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin\alpha_n}=2R \tag{①}$$

证明式(M) 必须应用第 29 届 IMO 的一道备选题(蒙古提供):

设正数 α_i 和实数 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n;3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=\pi$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin\alpha_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i \tag{②}$$

(M) 式的外观优雅,结构对称简洁,便于记忆,令人惊叹!请欣赏杨学枝老师那令人拍案叫绝的证明.

证明 由于平面凸 n 边形中,当边长不变时,以其内接于圆时的面积为最大,因此我们只要证明式(M) 中的 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于圆时的情况即可.

设 a_i 边的对应的圆心角为 $2\gamma_i$,并令

$$\beta_i=2\gamma_i-\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\beta_i=\sum_{i=1}^{n}(2\gamma_i-\alpha_i)=2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi-\pi=\pi$$

代入式 ② 得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(2\gamma_i-\alpha_i)}{\sin\alpha_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\cos2\gamma_i\cos\alpha_i+\sin2\gamma_i\sin\alpha_i}{\sin\alpha_i}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos2\gamma_i\cot\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\sin2\gamma_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\cos2\gamma_i)\cot\alpha_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sin2\gamma_i\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\gamma_i\cot\alpha_i\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin 2\gamma_i\\ a_i=2R\sin\gamma_i\cdot\Delta=\frac{1}{2}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin 2\gamma_i\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cot\alpha_i\geqslant 4\Delta$$

即式(M)成立,等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin(2\gamma_1-\alpha_1)}{\sin\alpha_1}=\cdots=\frac{\sin(2\gamma_n-\alpha_n)}{\sin\alpha_n}\\ \frac{\sin\gamma_1\cos(\gamma_1-\alpha_1)}{\sin\alpha_1}=\cdots=\frac{\sin\gamma_n\cos(\gamma_n-\alpha_n)}{\sin\alpha_n}\end{array}\right.\\ \frac{\sin(\gamma_1-\alpha_1)\cos\gamma_1}{\sin\alpha_1}=\cdots=\frac{\sin(\gamma_n-\alpha_n)\cos\gamma_n}{\sin\alpha_n}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\tan(\gamma_1-\alpha_1)}{\tan\gamma_1}=\cdots=\frac{\tan(\gamma_n-\alpha_n)}{\tan\gamma_n}\Rightarrow$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_1}=\cdots=\frac{\sin\gamma_n}{\sin\alpha_n}\Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{\sin\alpha_1}=\frac{a_2}{\sin\alpha_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin\alpha_n}=2R$$

如果我们在式(M)中取

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\frac{\pi}{n}\Rightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant 4\Delta\tan\frac{\pi}{n} \tag{③}$$

式③的加强便是著名而重要的多边形等周不等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 2\sqrt{n\Delta\tan\frac{\pi}{n}} \tag{④}$$

应用式④和幂平均不等式,立刻就可将式③从指数方面推广为:

推广 10(!) 设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,面积是 Δ,常数 $m\geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^m\geqslant n\left(\sqrt{\frac{4\Delta\tan\frac{\pi}{n}}{n}}\right)^m \tag{N}$$

等号成立仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形.

在本篇的最后,我们补充:

(1) 如果设正数 λ,μ,v 满足 $\delta=2\sum\mu v-\sum\lambda^2>0$,则应用海伦公式和杨克昌不等式,有结论

$$\lambda(b^2+c^2-a^2)+\mu(c^2+a^2-b^2)+v(a^2+b^2-c^2)\geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta \tag{O}$$

等号成立仅当

$$\lambda/a^2=\mu/b^2=v/c^2$$

(2) 推广 3 中的式(G)可以完善成

$$\{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)[16\Delta^2+\sum(b^2-c^2)^2]\}^{\frac{1}{2}}\geqslant \lambda_1a^2+\lambda_2b^2+\lambda_3c^2\geqslant 4\sqrt{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\cdot\Delta \tag{P}$$

其中,式(P)左边等号成立仅当

$$\lambda/a^2=\mu/b^2=v/c^2$$

右边等号成立仅当

$$\frac{a^2}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{b^2}{\lambda_3+\lambda_1}=\frac{c^2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(二) 费恩斯列尔 - 哈德格维尔不等式

1 简 介

外森比克不等式

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \tag{A}$$

最美观的加强是

$$bc+ca+ab\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad ①$$

最紧凑的加强是“波 - 舍”不等式

$$abc\geqslant\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle\right)^{\frac{3}{2}} \quad ②$$

但式(A)还有一个非常漂亮迷人的加强是

费恩斯列尔 - 哈德格维尔不等式 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2 \tag{Q}$$

式(Q)便是著名的费恩斯列尔(Finsler)和哈德格维尔(Hadwiger)两人在1938年建立的,而在1983年才被我国的王玉怀老师首次介绍给我国的读者,并引起了人们广泛深入的研究.

由于式(Q)天生“爱美”,喜欢“梳妆打扮”成多种“发型”:

$$2(bc+ca+ab)-(a^2+b^2+c^2)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad ③$$

$$\prod(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sum\sqrt{a})\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad ④$$

$$(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad ⑤$$

$$\sum a(b+c-a)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad ⑥$$

$$\sum(b+c-a)(c+a-b)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \quad ⑦$$

$$\sum bc\sin^2\frac{A}{2}\geqslant\sqrt{3}\Delta \quad ⑧$$

$$(abc)^2(\prod\sin\frac{A}{2})(\sum\cos^2\frac{A}{2})\geqslant 4\sqrt{3}\Delta^3 \quad ⑨$$

$$\sqrt{3}S \leqslant 4R + r \qquad ⑩$$

(Colombier - Doucet 不等式),其中 S,R,r 分别表示 $\triangle ABC$ 的半周长、外接圆半径、内切圆半径.

而且,还可证明,式(Q)又等价于三角不等式

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3} \qquad ⑪$$

可见,式(Q)不仅"如花似玉","貌若天仙",还居然有9种变换外形,好像孙悟空在变换,这在众多的几何不等式中,是少见的.这就是式(Q)与众不同,别具一格的地方.

式(Q)不仅变换多端,而且证法多样,今选其一.

证明 应用式(Q)的等价变换式

$$\sum(b+c-a)(c+a-b) \geqslant \sqrt{3(\sum a)\prod(b+c-a)} \qquad ⑫$$

设

$$\begin{cases} x = b+c-a > 0 \\ y = c+a-b > 0 \\ z = a+b-c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (y+z)/2 \\ b = (z+x)/2 \\ c = (x+y)/2 \\ \sum a = \sum x \end{cases} \Rightarrow \text{式⑫} \Leftrightarrow \sum yz \geqslant \sqrt{3xyz\sum x} \Leftrightarrow$$

$$(\sum yz)^2 \geqslant 3xyz\sum x \Leftrightarrow 2\sum y^2z^2 \geqslant 2\sum x^2yz \Leftrightarrow$$

$$\sum x^2(y-z)^2 \geqslant 0$$

因此式⑫成立,从而式(Q)成立,等号成立仅当 $x=y=z \Rightarrow \triangle ABC$ 为正三角形.

为了后面的研究方便,我们还要认识一个用途重要的引理.

引理 设 $\triangle ABC$ 的边长与内角分别是 a,b,c 和 A,B,C,半周长为 p,面积为 Δ,证

$$\begin{cases} a' = \sqrt{2a(p-a)} \\ b' = \sqrt{2b(p-b)} \\ c' = \sqrt{2c(p-c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2} \\ B' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2} \\ C' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2} \end{cases}$$

则 $\triangle A'B'C'$ 的三边长为 a',b',c',面积 $\Delta' = \Delta$.

该引理的用途在于:

如果有三角恒等式或不等式

$$S(A,B,C) \geqslant 0 \Leftrightarrow S(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})$$

如果有涉及三角形边长和面积的几何不等式,则有

$$f(a,b,c,\Delta) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(a',b',c',\Delta) \geqslant 0$$

据此引理,还有结论

$$\frac{a'\sin\frac{A}{2}}{a}=\frac{b'\sin\frac{B}{2}}{b}=\frac{c'\sin\frac{C}{2}}{c} \tag{13}$$

特别地,应用引理,在 $\triangle A'B'C'$ 中应用式(A)有

$$a'^2+b'^2+c'^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta'\Rightarrow\sum 2a(p-a)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta\Rightarrow$$

$$\sum a(b+c-a)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta\Rightarrow\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta+\sum(b-c)^2$$

如此轻松地推导出了式(Q).

2 加强与完善

虽然式(Q)是式(A)的一个漂亮加强式,但它却"自强不息",还有一系列的加强形式:

式(Q)的第一个加强是

$$\sum a^2\geqslant 4\Delta\left(\sum\tan\frac{\pi-A}{4}\right)-\sum(b-c)^2 \tag{Q_1}$$

略证 在 $\triangle A'B'C'$ 中应用前面的引理有

$$\sum a'^2\geqslant 4\Delta'\sum\tan\frac{A'}{2}\Rightarrow\sum(\sqrt{2a(p-a)})^2\geqslant 4\Delta\sum\tan\left(\frac{\pi-A}{4}\right)\Rightarrow$$

$$\sum a^2\geqslant 4\Delta\left(\sum\tan\frac{\pi-A}{4}\right)+\sum(b-c)^2$$

由于 $f(x)=\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内为凸函数,由颜生不等式有

$$\sum\tan\left(\frac{\pi-A}{4}\right)\geqslant 3\tan\left[\frac{\sum(\pi-A)}{12}\right]=3\tan\left(\frac{3\pi-\sum A}{12}\right)=$$

$$3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

因此,式(Q_1)是式(Q)的一个加强.

式(Q)的第二个加强式是

$$abc(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\geqslant\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^3 \tag{Q_2}$$

式(Q)的第三个加强式是

$$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}(1+K)^{1/6}+Q+\sum(b-c)^2 \tag{Q_3}$$

其中

$$\begin{cases}K=\dfrac{\sum(b-c)^2}{(\sum a)^2}\\ Q=\dfrac{1}{2}(\sum x)\sum(y-z)^2\end{cases},\quad\begin{cases}x^3=a(b+c-a)\\ y^3=b(c+a-b)\\ z^3=c(a+b-c)\end{cases}$$

证明 应用式(Q_2)有

$$3xyz=3[abc\prod(b+c-a)]^{1/3}=3\left(\frac{abc}{a+b+c}\cdot 16\Delta^2\right)^{1/3}=$$

$$3\left(\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c}\cdot 16\Delta^2\right)^{\frac{1}{3}}\geqslant$$

$$3\left(\frac{4}{3}\Delta\cdot 16\Delta^2\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$4\sqrt{3}\Delta\cdot\left[\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}\right]^{\frac{1}{6}}=$$

$$4\sqrt{3}(1+K)^{1/6}\Rightarrow\sum x^3=3xyz+(\sum x)(\sum x^2-\sum yz)=3xyz+Q\Rightarrow$$

$$\sum x^3\geqslant 4\sqrt{3}\Delta(1+K)^{1/6}+Q\Rightarrow$$

$$\sum a(b+c-a)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta(1+K)^{1/6}+Q\Rightarrow$$

$$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta(1+K)^{1/6}+Q+\sum(b-c)^2$$

式(Q)的第四个加强式为

$$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta+\sum(b-c)^2+M \tag{Q_4}$$

其中

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$M=\frac{2\sum(p-a)^2(b-c)^2}{\sum a(p-a)}$$

证明 记

$$N=\sum a^2-\sum(c-b)^2=2\sum a(p-a)=4\sum(p-a)(p-b)\Rightarrow$$

$$N^2=16\sum(p-a)^2(p-b)^2+32p\prod(p-a)\Rightarrow$$

$$N^2-48\Delta^2=16[\sum(p-a)^2(p-b)^2-p\prod(p-a)]=$$

$$16[\sum(p-a)^2(p-b)^2-\sum(p-a)\prod(p-a)]=$$

$$16[\sum(p-a)^2(p-b)^2-\sum(p-a)^2(p-b)(p-c)]=$$

$$8\sum\{(p-a)^2[(p-b)^2-2(p-b)(p-c)+(p-c)^2]\}=$$

$$8\sum(p-a)^2(b-c)^2\Rightarrow$$

$$(N+4\sqrt{3}\Delta)(N-4\sqrt{3}\Delta)=8\sum(p-a)^2(b-c)^2\Rightarrow$$

$$N-4\sqrt{3}\Delta=\frac{8\sum(p-a)^2(b-c)^2}{N+4\sqrt{3}\Delta}\geqslant$$

$$\frac{8\sum(p-a)^2(b-c)^2}{N+N}=M\Rightarrow$$

$$N\geqslant 4\sqrt{3}\Delta+M$$

1954年，加拿大几何学家贝蒂(S. Beatty)改进了式(Q)，建立了一个双面不等式

$$\frac{(K-H)^2}{12} \geqslant \Delta^2 \geqslant \frac{(K-H)(3K-5H)}{12} \tag{Q_5}$$

其中
$$H = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2), K = bc+ca+ab$$

1957 年,另一名加拿大几何学家富鲁歇(R. Frucht) 加强了式(Q_5)

$$\frac{p(p-q)^2(p+2q)}{27} \geqslant \Delta^2 \geqslant \frac{p(p+q)^2(p-2q)}{27} \tag{Q_6}$$

其中
$$p = \frac{1}{2}(a+b+c), q = \left[\frac{1}{2}\sum(b-c)^2\right]^2$$

式(Q_5) 与式(Q_6) 虽然出自名家,与众不同,标新立异,但证明却比较复杂,也不便于记忆.

现在,我们建立一个绝妙的完善式:

完善(△) 在 $\triangle ABC$ 中,设 $Q = \sum(b-c)^2$,则有

$$3Q + 4\sqrt{3}\Delta \geqslant a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta + Q \tag{Q'}$$

证明 我们只须证明式(Q′) 的左边即可. 设 $x, y, z > 0$,且

$$\begin{cases} a = y^2+z^2 \\ b = z^2+x^2 \\ c = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = (xyz)\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ Q = \sum(y^2-z^2)^2 \end{cases}$$

于是,式(Q′) 化为

$$\begin{gathered} 3\sum(y^2-z^2)^2 + 4xyz\sqrt{3\sum x^2} \geqslant \sum(y^2+z^2)^2 \Leftrightarrow \\ 2\sum y^2z^2 - \sum x^4 \leqslant xyz\sqrt{3\sum x^2} \Leftrightarrow St \leqslant xyz\sqrt{3\sum x^2} \end{gathered} \tag{①}$$

其中

$$\begin{cases} S = \sum x \leqslant \sqrt{3\sum x^2} \\ t = \prod(y+z-x) \end{cases} \tag{②}$$

因此,欲证式 ①,只须证

$$t = \prod(y+z-x) \leqslant xyz \tag{③}$$

而式③ 正是一道许多数奥资料上都有的题目(证明简单),因此式① 成立,从而等号成立仅当

$$x = y = z \Rightarrow a = b = c$$

由于式(Q)“天生丽质”,自然有“如意配对”式:

配对(△) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c,面积为 Δ,则有

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4\Delta} + \sum\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 \tag{Q''}$$

证明 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,有

$$\sum\frac{1}{bc} = \frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{3\sqrt{3}R}{abc} = \frac{3\sqrt{3}}{4\Delta} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4\Delta} - \sum\frac{1}{bc} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\sum \frac{1}{a^2} \leqslant \sum \frac{1}{a^2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\Delta} - \sum \frac{1}{bc}\right) =$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\Delta} + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4\Delta} + \sum\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$$

即式(Q″)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

3 参数推广

如果从参数方面去考虑,那么式(Q)还有两个漂亮的参数推广.

推广 10(△) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为任意正数,则

$$\sum a^2 \geqslant mk\Delta + \sum(b-c)^2 \tag{R}$$

其中

$$\begin{cases} m = 4\sqrt[3]{9}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{-1/6} \\ k = \left(\dfrac{\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

显然,当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 时,$mk = 4\sqrt{3}$,式(R)化为式(Q).

证明 应用柯西不等式有

$$\sum \lambda_1 a \leqslant \sqrt{(\sum \lambda_1^2)(\sum a^2)} \leqslant \sqrt{9R^2 \sum \lambda_1^2} = 3\left(\frac{abc}{4\Delta}\right)\sqrt{\sum \lambda_1^2} \Rightarrow$$

$$\frac{abc}{\sum \lambda_1 a} \geqslant \frac{4\Delta}{3\sqrt{\sum \lambda_1^2}} \tag{①}$$

于是 $N = \sum a^2 - \sum(b-c)^2 = \sum a(b+c-a) \geqslant$

$$3[\prod a(b+c-a)]^{\frac{1}{3}} =$$

$$3(16\Delta^2 \cdot \frac{abc}{\sum a})^{\frac{1}{3}} =$$

$$3\left(16\Delta^2 \cdot \frac{abc}{\sum \lambda_1 a} \cdot \frac{\sum \lambda_1 a}{\sum a}\right)^{1/3} \geqslant 3\left(16\Delta^2 \cdot \frac{4\Delta}{3\sqrt{\sum \lambda_1^2}} \cdot \frac{\sum \lambda_1 a}{\sum a}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$mk\Delta \Rightarrow \sum a^2 \geqslant mk\Delta + \sum(b-c)^2$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

在 20 世纪 90 年代,有人建立了更好的参数推广:

推广 11(!) 设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长,Δ 为其面积,R,r 分别是它的外接圆半径和内切圆半径,正数 x,y 满足 $5x > 7y > 0$,则有

$$\sum a^2 \geqslant K\Delta + \sum(b-c)^2 \tag{S}$$

其中

$$K = \frac{4}{3}\left[\frac{7x+y}{x-y} + \left(\frac{10x-14y}{x-y}\right) \cdot \frac{R}{r}\right]^{\frac{1}{2}}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

其实,应用欧拉不等式有

$$\left.\begin{aligned}R&\geqslant 2r\\5x&>7y\end{aligned}\right\}\Rightarrow K\geqslant\frac{4}{3}\left[\frac{7x+y+2(10x-14y)}{x-y}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{27}=4\sqrt{3}$$

因此,式(S) 不仅是式(Q) 的参数推广,它还是式(Q) 的一个加强.

4　多边形推广

和式(A) 一样,式(Q) 也能推广到多边形中去,为此,我们先将式(Q) 推广到双圆四边形的情形.

推广 12(!)　设双圆四边形 $ABCD$ 的边长为 a,b,c,d.面积为 Δ,则

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 4\Delta+Q \tag{T}$$

其中

$$Q=\sum(a-b)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2 \tag{①}$$

显然,式(T) 的外观结构与式(Q) 一致.

证明　由于 $ABCD$ 为双圆四边形,则

$$p=b+d=a+c=\frac{1}{2}(a+b+c+d)\Rightarrow(a,b,c,d)=(p-c,p-d,p-a,p-b)$$

$$\Delta=\sqrt{abcd},d^2=(a+c-b)^2=a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc$$

这样,式(T) 化为

$$\begin{aligned}&2a^2+2b^2+2c^2+2ac-2ab-2bc\geqslant 4\Delta+2(a-b)+2(b-c)^2\Leftrightarrow\\&ab+bc+ca\geqslant 2\Delta+b^2\end{aligned} \tag{②}$$

但

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=b(a+c)+ac=b(b+d)+ac=b^2+bd+ac\geqslant\\&b^2+2\sqrt{abcd}=b^2+2\Delta\end{aligned}$$

即式 ② 成立,从而式(T) 成立.等号成立仅当

$$\left.\begin{aligned}b+d&=a+c\\bd&=ac\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=b=c=d$$

即 $ABCD$ 为正方形.

式(Q) 的多边形推广便是:

推广 13(!)　设平面凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$,面积为 Δ,指数 $1\leqslant m\in\mathbf{N}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{2m}\geqslant n\left(\frac{4\Delta\tan\frac{\pi}{2}}{n}\right)^m+\frac{Q}{(n-2)^2} \tag{U}$$

其中

$$Q=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i^m-a_j^m)^2 \tag{③}$$

等号成立仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形,其中当 $n=3$ 时,必须 $m=1$,其余当 $n\geqslant 4$ 时,$m\geqslant 1$.

下面,我们只须证明当 $n \geqslant 4, m \geqslant 1$ 时的情况.

证明 我们简记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\sum$,应用式(A)的多边形推广式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant n\left(\frac{4\Delta\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^{m/2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{2m} + 2\sum a_i^m a_j^m \geqslant n^2\left(\dfrac{4\Delta\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m \\ (n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{2m} - 2\sum a_i^m a_j^m = Q\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{2m} \geqslant n^2\left(\frac{4\Delta\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m + Q \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{2m} \geqslant n\left(\frac{4\Delta\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m + \frac{Q}{n} \quad ④$$

由于 $n \geqslant 4 \Rightarrow (n-2)^2 - n = (n-1)(n-4) \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{(n-2)^2} \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{2m} \geqslant n\left(\frac{4\Delta\tan\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m + \frac{Q}{(n-2)^2}$$

等号成立仅当 $Q = 0 \Rightarrow A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形.

5 引 申

众所周知,如果 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c,则易推得以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为三边长可构成三角形,设其面积分别为 Δ, Δ_1,那么由海伦公式知

$$16\Delta_1^2 = 2\sum(\sqrt{bc})^2 - \sum(\sqrt{a})^4 = 2\sum bc - \sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta \Rightarrow$$

$$\Delta_1 \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\Delta\right)^{1/2} \text{ 或 } \Delta_1^2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\Delta$$

这一结论启发我们进一步思考:如果以 $\sqrt[2^n]{a}, \sqrt[2^n]{b}, \sqrt[2^n]{c}$ 为边的 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积 Δ_n 与 Δ 满足什么不等式关系呢?为此,我们约定 $\Delta_0 = \Delta$,由

$$\Delta_1^2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}\Delta_0$$

暗示我们有递推关系

$$\Delta_n^2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\Delta_{n-1}, n = 1, 2, \cdots \quad ①$$

$$\Delta_1^2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\Delta$$

$$\Delta_2^4 \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\Delta_1\right)^2 \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3\Delta$$

因此有

$$\Delta_3^8 \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\Delta_2\right)^4 \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^7\Delta \quad ②$$

……

$$(\Delta_n)^{2^n} \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{2^n-1} \cdot \Delta$$

故得

$$\Delta_n \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{1/2^n} \tag{③}$$

这确实是一个有趣的结果,并且,它还可以推广成:

推广 14(!)　设 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边长为 a_1,a_2,a_3,面积为 Δ;则以 $a_1^\theta,a_2^\theta,a_3^\theta$ 为边可作面积为 $\triangle_\theta$ 的三角形(约定 $\Delta_1=\Delta$),则有关系式

$$\Delta_\theta \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^\theta \tag{V}$$

证明　我们只须证当 $0<\theta<1$ 时即可.

$$0<\theta<1 \Rightarrow \frac{1}{\theta}>1 \Rightarrow (a_1^\theta+a_2^\theta)^{1/\theta} > (a_1^\theta)^{\frac{1}{\theta}}+(a_2^\theta)^{\frac{1}{\theta}} = a_1+a_2>a_3 \Rightarrow a_1^\theta+a_2^\theta>a_3^\theta$$

同理可得 $a_2^\theta+a_3^\theta>a_1^\theta,a_3^\theta+a_1^\theta>a_2^\theta$,故以 $a_1^\theta,a_2^\theta,a_3^\theta$ 为边可以构成三角形.

设 $f_\theta(a_1,a_2,a_3)=\Delta_\theta-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^\theta$,应用海伦(Heron)公式计算得

$$f_\theta(1,1,1)=0, f_\theta(1,1,0)=0$$

$$f_\theta(2,1,1)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2+2^{2+2\theta}}-\sqrt{2^\theta\cdot 3^{1+\theta}}\right)$$

由于

$$2+2^{2+2\theta} \geqslant 2^\theta\cdot 3^{1+\theta} \Leftrightarrow \frac{2}{6^\theta}+4\left(\frac{2}{3}\right)^\theta \geqslant 3$$

但

$$0<\theta<1 \Rightarrow \frac{2}{6^\theta}+4\left(\frac{2}{3}\right)^\theta > \frac{2}{6}+4\times\frac{2}{3}=3 \Rightarrow f_\theta(2,1,1)>0$$

由 Stolarsky 定理知,对任意 $\theta\in(0,1)$ 有

$$f_\theta(a_1,a_2,a_3)\geqslant 0 \Rightarrow \Delta_\theta \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^\theta$$

等号成立仅当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

6　加权推广

式(Q)至少有三个加权推广,个个漂亮.

推广 15(!)　设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,正数 x,y,z 满足关系

$$\delta=2(yz+zx+xy)-x^2-y^2-z^2>0$$

则

$$xa^2+yb^2+zc^2 \geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta+Q \tag{W}$$

其中

$$Q=x(b-c)^2+y(c-a)^2+z(a-b)^2 \tag{①}$$

等号成立仅当

$$\frac{a(b+c-a)}{x}=\frac{b(c+a-b)}{y}=\frac{c(a+b-c)}{z} \quad ②$$

或

$$x(\sec\frac{A}{2})^2=y(\sec\frac{B}{2})^2=z(\sec\frac{C}{2})^2 \quad ③$$

可见式(W)不仅外观优美,且等号成立的条件也漂亮,显然,当 $x=y=z$ 时,它立刻化为式(Q),自然,语法也迷人.

证法1 应用余弦定理有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b-c)^2+2bc(1-\cos A)=$$
$$(b-c)^2+4(\frac{1}{2}bc\sin A)\left(\frac{1-\cos A}{\sin A}\right)=(b-c)^2+4\Delta\tan\frac{A}{2}\Rightarrow$$
$$\text{同理}\left\{\begin{aligned}xa^2&=x(b-c)^2+4\Delta x\tan\frac{A}{2}\\ yb^2&=y(c-a)^2+4\Delta y\tan\frac{B}{2}\\ zc^2&=z(a-b)^2+4\Delta z\tan\frac{C}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\sum xa^2=Q+4\Delta\sum x\tan\frac{A}{2}(\text{应用杨克昌不等式})\geqslant$$
$$4\sqrt{\delta\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}\Delta+Q=$$
$$4\sqrt{\delta}\Delta+Q\Rightarrow\sum xa^2\geqslant4\sqrt{\delta}\Delta+Q$$

等号成立仅当

$$\frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{x}=\frac{\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}}{y}=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{z}\Rightarrow$$
$$\frac{\sin(\frac{B}{2}+\frac{C}{2})}{x\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin(\frac{C}{2}+\frac{A}{2})}{y\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}{z\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\Rightarrow$$
$$\frac{(\cos\frac{A}{2})^2}{x\prod\cos\frac{A}{2}}=\frac{(\cos\frac{B}{2})^2}{y\prod\cos\frac{B}{2}}=\frac{(\cos\frac{C}{2})^2}{z\prod\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow$$
$$x(\sec\frac{A}{2})^2=y(\sec\frac{B}{2})^2=z(\sec\frac{C}{2})^2$$

证法2 设

$$\left\{\begin{aligned}\alpha&=a^2-(b-c)^2\\ \beta&=b^2-(c-a)^2\\ \gamma&=c^2-(a-b)^2\end{aligned}\right.\Rightarrow\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=\sum[b^2-(c-a)^2][c^2-(a-b)^2]=$$

$$\prod(b+c-a)(b+c-a)=$$
$$\prod(b+c-a)(a+b+c)=16\Delta^2\Rightarrow$$
$$\sum\beta\gamma=16\Delta^2\Rightarrow x\alpha+y\beta+z\gamma\geqslant$$
$$4\sqrt{\delta\sum\beta\gamma}\text{(应用杨克昌不等式)}=4\sqrt{\delta}\Delta\Rightarrow$$
$$\sum x[a^2-(b-c)^2]\geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta\Rightarrow$$
$$\sum xa^2\geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta+\sum x(b-c)^2$$

等号成立仅当

$$\frac{x}{\beta+\gamma}=\frac{y}{\gamma+\alpha}=\frac{z}{\alpha+\beta}\Rightarrow\frac{2a(b+c-a)}{x}=\frac{2b(c+a-b)}{y}=\frac{2c(a+b-c)}{z}$$

式(Q)的第二个加权推广是:

推广16(!) 设$\triangle ABC$的三边长为a,b,c,面积为Δ,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$中至少有两个正数,满足$t=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1>0$,则

$$\lambda_1a(b+c-a)+\lambda_2b(c+a-b)+\lambda_3c(a+b-c)\geqslant 4\sqrt{t}\Delta \tag{W}$$

等号成立仅当

$$\lambda_1(b+c-a)=\lambda_2(c+a-b)=\lambda_3(a+b-c) \tag{④}$$

或

$$\lambda_1\cot\frac{A}{2}=\lambda_2\cot\frac{B}{2}=\lambda_3\cot\frac{C}{2} \tag{⑤}$$

式(V)与式(W)相比较,共同点是两者都美妙,不同点是结构相异,等号成立的条件也不同.

证明 作代换

$$\begin{cases}b+c-a=2x>0\\c+a-b=2y>0\\a+b-c=2z>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=y+z\\b=z+x\\c=x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=2(x+y+z)\\\Delta=\sqrt{xyz(x+y+z)}\end{cases}$$

我们再作代换

$$\begin{cases}K_1=yz\\K_2=zx\\K_3=xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K_2+K_3=x(y+z)\\K_3+K_1=y(z+x)\\K_1+K_2=z(x+y)\end{cases}\Rightarrow K_1K_2+K_2K_3+K_3K_1=xyz(x+y+z)=\Delta^2$$

代入杨克昌不等式

$$\lambda_1(K_2+K_3)+\lambda_2(K_3+K_1)+\lambda_3(K_1+K_2)\geqslant$$
$$2[(K_1K_2+K_2K_3+K_3K_1)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)]^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$$
$$\sum\lambda_1x(y+z)\geqslant 2\sqrt{t\Delta^2}\Leftrightarrow$$
$$\sum\lambda_1a(b+c-a)\geqslant\sqrt{t}\Delta\cdot 4$$

等号成立仅当

$$K_1/\lambda_1 = K_2/\lambda_2 = K_3/\lambda_3 \Rightarrow yz/\lambda_1 = zx/\lambda_2 = xy/\lambda_3 \Rightarrow$$
$$x\lambda_1 = y\lambda_2 = z\lambda_3 \Rightarrow \lambda_1(b+c-a) = \lambda_2(c+a-b) = \lambda_3(a+b-c) \Rightarrow$$
$$\lambda_1 \cot\frac{A}{2} = \lambda_2 \cot\frac{B}{2} = \lambda_3 \cot\frac{C}{2}$$

其实,适当地将式(W)变形即为

$$\sum \lambda_1 a^2 \geqslant 4\sqrt{t}\Delta + \sum(\lambda_2 b - \lambda_3 c)(b-c) \tag{W'}$$

如果我们仿照推广 6 中式(K)的技巧,可得式(Q)的第三个加权推广

推广 17(!) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,λ,μ,v 为任意正数,则

$$\frac{\lambda}{\mu+v}a(b+c-a) + \frac{\mu}{v+\lambda}b(c+a-b) + \frac{v}{\lambda+\mu}c(a+b-c) \geqslant 2\sqrt{3}\Delta \tag{X}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\lambda = \mu = v$.

下面我们用另一种技巧证明上式.

证明 记式(X)左边为 P,且 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

$$\begin{cases}(p_a,p_b,p_c) = (p-a,p-b,p-c)\\(x,y,z) = (\mu+v,v+\lambda,\lambda+\mu)\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}P = \sum\left(\frac{y+z-x}{2x}ap_a\right) =$$
$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{z}{y}bp_b + \frac{y}{z}cp_c\right) - \frac{1}{2}\sum ap_a \geqslant \sum\sqrt{bcp_bp_c} - \frac{1}{2}\sum p_bp_c \geqslant$$
$$\left(\sum\sec\frac{A}{2} - \sum\tan\frac{A}{2}\right)\Delta = \Delta\sum\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} - \tan\frac{A}{2}\right) =$$
$$\Delta\sum\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right) = \Delta\sum\frac{\left(\sin\frac{A}{4} - \cos\frac{A}{4}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{4}\right)^2 - \left(\sin\frac{A}{4}\right)^2} =$$
$$\Delta\sum\left(\frac{\cos\frac{A}{4} - \sin\frac{A}{4}}{\cos\frac{A}{4} + \sin\frac{A}{4}}\right) = \Delta\sum\left(\frac{1-\tan\frac{A}{4}}{1+\tan\frac{A}{4}}\right) = \Delta\sum\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) \geqslant$$
$$3\Delta\tan\left[\frac{1}{3}\sum\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)\right] = 3\Delta\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\Delta \Rightarrow$$
$$P \geqslant 2\sqrt{3}\Delta$$

等号成立仅当 $\lambda = \mu = v$,且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

7 指数推广

在 20 世纪 90 年代,李晓亮将式(Q)从指数方便漂亮推广成:

推广 18(李晓亮) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,实数 $k \geqslant 2$,则

$$a^k + b^k + c^k \geqslant 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{k/2} + Q_k \tag{Y}$$

其中

$$Q_k = |b-c|^k + |c-a|^k + |a-b|^k \tag{1}$$

显然,当 $k=2$ 时,上式化为式(Q).

证法 1 在式(W′)

$$\sum \lambda_1 a^2 \geqslant 4\sqrt{\sum \lambda_2\lambda_3}\Delta + A \tag{2}$$

其中

$$A = \sum (\lambda_2 b - \lambda_3 c)(b-c) \tag{3}$$

令 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (a^{k-2}, b^{b-2}, c^{k-2})$,并应用"波 - 舍"不等式有

$$\sum \lambda_2\lambda_3 = \sum (bc)^{k-2} \geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}(k-2)} \geqslant 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{k-2}$$

于是式②结合得

$$\sum a^k \geqslant 4\sqrt{3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{k-2}} \cdot \Delta + A = 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{k}{2}} + A \tag{4}$$

因此

$$A = \sum (\lambda_2 b - \lambda_3 c)(b-c) = \sum (b^{k-1} - c^{k-1})(b-c) \tag{5}$$

若 $b \geqslant c$,令 $l = b - c \geqslant 0$,有 $k-1 \geqslant 1$.

$$(b^{k-1} - c^{k-1})(b-c) = [(c+l)^{k-1} - c^{k-1}]l \geqslant [(c^{k-1} + l^{k-1}) - c^{k-1}]l = l^{k-1} \cdot l = l^k = (b-c)^k$$

若 $b \leqslant c$,有

$(b^{k-1} - c^{k-1})(b-c) = (c^{k-1} - b^{k-1})(c-b) \geqslant (c-b)^k$

$$\left.\begin{array}{l}\text{因此恒有}(b^{k-1} - c^{k-1})(b-c) \geqslant |b-c|^k \\ \text{同理}\begin{cases}(c^{k-1} - a^{k-1})(c-a) \geqslant |c-a|^k \\ (a^{k-1} - b^{k-1})(a-b) \geqslant |a-b|^k\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow A \geqslant \sum |b-c|^k \Rightarrow$$

$$\sum a^k \geqslant 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{k}{2}} + \sum |b-c|^k$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证法 2 利用推广 15 的式(W)

$$\sum x[a^2 - (b-c)^2] \geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta \tag{6}$$

其中

$$\delta = 2\sum yz - \sum x^2 = \sum (y+z-x)(z+x-y) \tag{7}$$

$$\text{令}\begin{cases}2x = b^{k-2} + c^{k-2} \\ 2y = c^{k-2} + a^{k-2} \\ 2z = a^{k-2} + b^{k-2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y+z-x = a^{k-2} \\ z+x-y = b^{k-2} \\ x+y-z = c^{k-2}\end{cases} \Rightarrow \delta = \sum (bc)^{k-2} \geqslant$$

$$3(abc)^{\frac{2}{3}(k-2)}\geqslant 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{k-2} \quad ⑧$$

注意到

$$\sum x[a^2-(b-c)^2]=\sum a^k+A$$

其中

$$A=\sum(b^{k-1}-c^{k-1})(b-c)$$

这样,式⑥转化为

$$\sum a^k\geqslant 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^k+A \quad ⑨$$

以上步骤同证法 1.

从外观上看,式(Y)非常难,但上面两种证法却巧妙代换,克服了困难.其实,还有简洁轻松的证法.

证法 3 设 $2m=k\geqslant 2\Rightarrow m\geqslant 1$.从推广 15 的证法 1 有

$$a^2=4\Delta\tan\frac{A}{2}+(b-c)^2\Rightarrow a^{2m}=\left[4\Delta\tan\frac{A}{2}+(b-c)^2\right]^m\geqslant$$

$$\left(4\Delta\tan\frac{A}{2}\right)^m+(b-c)^{2m}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}a^{2m}\geqslant\left(4\Delta\tan\frac{A}{2}\right)^m+|b-c|^{2m}\\ \text{同理}\begin{cases}b^{2m}\geqslant\left(4\Delta\tan\frac{B}{2}\right)^m+|c-a|^{2m}\\ c^{2m}\geqslant\left(4\Delta\tan\frac{C}{2}\right)^m+|a-b|^{2m}\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum a^{2m}\geqslant t(4\Delta)^m+\sum|b-c|^{2m} \quad ⑩$$

其中

$$t=\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^m\geqslant 3\left(\frac{\sum\tan\frac{A}{2}}{3}\right)^m\geqslant 3\left(\frac{\sqrt{3\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}}{3}\right)^m=3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^m\Rightarrow$$

$$\sum a^{2m}\geqslant 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^m+\sum|b-c|^{2m}\Rightarrow$$

$$\sum a^k\geqslant 3\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{k}{2}}+\sum|b-c|^k$$

如果我们在式(Y)中取 $k=4$,立刻得到一个漂亮的推论

$$a^4+b^4+c^4\geqslant 16\Delta^2+(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4 \quad ⑪$$

式⑪又可以再加强为

$$a^4+b^4+c^4\geqslant 16\Delta^2+a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \quad ⑫$$

8 综合推广

我们在前面建立了式(Q)的加权推广和指数推广.如果应用赫尔特不等式,又可从元数(三角形个数)方面建立式(Q)的元数推广,如果我们能建立包含权系数、指数、元数在内的综合推广,使它们“三国归晋”,“一统天下”吗?这显然超难了.但是,只要我们有信心,有技巧,定会“狭路相逢,勇者为胜”,“智取华山”.

推广 19(Δ) 设 $1 \leqslant n \in \mathbf{N}, 1 \leqslant i \leqslant n$.所有的$\{\triangle A_iB_iC_i\}$的对应角的大小同序,三边长为 a_i, b_i, c_i,面积为 Δ_i;指数 $\theta_i \in (0,1](1 \leqslant i \leqslant n)$,且$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1$,记 $\theta = \min(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$,$m$ 满足 $m\theta \geqslant 1$,正系数 λ, μ, v 满足

$$\delta = 2(\mu v + v\lambda + \lambda\mu) - \lambda^2 - \mu^2 - v^2 > 0$$

则有

$$\sum \lambda\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\theta_i}\Big)^{2m} \geqslant \sqrt{3^{1-m} \cdot \delta}\Big[\prod_{i=1}^{n}(4\Delta i)^{\theta_i}\Big]^m + \sum \lambda\Big(\prod_{i=1}^{n} |b_i - c_i|^{\theta_i}\Big)^{2m} \qquad (Z)$$

特别地,当 $n = 1$ 时,$\theta_1 = 1, m \geqslant 1$,记 $k = 2m$,我们得到式(Y)的加权推广

$$\sum \lambda a^k = \sqrt{3\delta}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{k}{2}} + \sum \lambda |b - c|^k \qquad ①$$

略证 调动一切“积极因素”有 $m \geqslant 1$.

$$a_i^2 = (b_i - c_2)^2 + 4\Delta_i\tan\frac{A_i}{2} \Rightarrow a_i^{2m} = \left[(b_i - c_i)^2 + 4\Delta_i\tan\frac{A_i}{2}\right]^m \geqslant$$

$$|b_i - c_i|^{2m} + \left(4\Delta_i\tan\frac{A_i}{2}\right)^m \Rightarrow \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\theta_i}\Big)^{2m} \geqslant$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left[|b_i - c_i|^{2m} + \left(4\Delta_i\tan\frac{A_i}{2}\right)^m\right]^{\theta_i}(\text{应用赫尔特不等式}) \geqslant$$

$$\Big(\prod_{i=1}^{n}|b_i - c_i|^{\theta_i}\Big)^{2m} + \left[\prod_{i=1}^{n}\left(4\Delta_i\tan\frac{A_i}{2}\right)^{\theta_i}\right]^m \Rightarrow$$

$$\lambda\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\theta_i}\Big)^{2m} \geqslant \lambda\left[\prod_{i=1}^{n}\left(4\Delta_i\tan\frac{A_i}{2}\right)^{\theta_i}\right]^m + \lambda\Big(\prod_{i=1}^{n}|b_i - c_i|^{\theta_i}\Big)^{2m} \qquad ②$$

同理可得

$$\mu\Big(\prod_{i=1}^{n} b_i^{\theta_i}\Big)^{2m} \geqslant \mu\left[\prod_{i=1}^{n}\left(4\Delta_i\tan\frac{B_i}{2}\right)^{\theta_i}\right]^m + \mu\Big(\prod_{i=1}^{n}|c_i - a_i|^{\theta_i}\Big)^{2m} \qquad ③$$

$$v\Big(\prod_{i=1}^{n} c_i^{\theta_i}\Big)^{2m} \geqslant v\left[\prod_{i=1}^{n}\left(4\Delta_i\tan\frac{C_i}{2}\right)^{\theta_i}\right]^m + v\Big(\prod_{i=1}^{n}|a_i - b_i|^{\theta_i}\Big)^{2m} \qquad ④$$

记

$$T_n(\lambda) = \sum \lambda\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\theta_i}\Big)^{2m} - \sum \lambda\Big(\prod_{i=1}^{n}|b_i - c_i|^{\theta_i}\Big)^{2m}$$

② + ③ + ④,有

$$T_n(\lambda) \geqslant x\left[\prod_{i=1}^{n}(4\Delta_i)^{\theta_i}\right]^m \qquad ⑤$$

其中

$$x = \sum \lambda \prod_{i=1}^{n} \left(\tan \frac{A_i}{2}\right)^{m\theta_i} \geqslant \sqrt{\delta t} \quad ⑥$$

（应用杨克昌不等式）其中

$$t = \sum \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\tan \frac{B_i}{2}\right)^{m\theta_i} \left(\prod_{i=1}^{n} \tan \frac{C_i}{2}\right)^{m\theta_i} \right] = \sum \prod_{i=1}^{n} \left(\tan \frac{B_i}{2} \tan \frac{C_i}{2}\right)^{m\theta_i}$$

（应用切比雪夫不等式）$\geqslant$

$$3\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\sum \left(\tan \frac{B_i}{2} \tan \frac{C_i}{2}\right)^{m\theta_i}}{3} \right]$$（应用幂平均不等式）$\geqslant$

$$3\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\sum \tan \frac{B_i}{2} \tan \frac{C_i}{2}}{3} \right)^{m\theta_i} = 3\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{m\theta_i} = 3\left(\frac{1}{3^m}\right)^{\sum_{i=1}^{n} \theta_i} = \frac{3}{3^m} \Rightarrow$$

$$t \geqslant 3^{1-m} \Rightarrow x \geqslant \sqrt{3^{1-m} \cdot \delta} \Rightarrow T_n(\lambda) \geqslant \sqrt{3^{1-m} \cdot \delta} \cdot \left[\prod_{i=1}^{n} (4\Delta_i)^{\theta_i} \right]^m$$

即式(Z)成立. 等号成立的条件为 $n = 1$ 和 $n > 1$ 及 $m = 1$ 和 $m > 1$ 两种情形.

（三） 匹多不等式

1 配 对

在刘培杰老师主编的《历届IMO试题集》第38页，精辟地介绍并证明（用6种证明）非常著名的匹多了不等式.

匹多不等式 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，面积为 Δ：$\triangle A'B'C'$ 的三边长为 a',b',c'，面积为 Δ'，则有

$$H \equiv a'^2(b^2 + c^2 - a^2) + b'^2(c^2 + a^2 - b^2) + c'^2(a^2 + b^2 - c^2) \geqslant 16\Delta\Delta' \quad \text{(a)}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

不言而喻，式(a)的外观优美对称，自然不会“孤单寂寞，独守空房”，它至少有两个漂亮的配对式（字母意义同上）.

第一个配对式是：

$$P \equiv a'^2[a^2 - (b - c)^2] + b'^2[b^2 - (c - a)^2] + c'^2[c^2 - (a - b)^2] \geqslant 16\Delta\Delta' \quad (\text{a}_1)$$

等号成立仅当
$$a' \sec \frac{A}{2} = b' \sec \frac{B}{2} = c' \sec \frac{C}{2}$$

与式(a)相对比，式(a_1)等号成立的条件可谓别具一格，数学，就是如此奇妙！

式(a_1)的证明很简单.

证明 在上一部分的推广15里，我们有

$$x[a^2 - (b - c)^2] + y[b^2 - (c - a)^2] + z[c^2 - (a - b)^2] \geqslant 4\sqrt{\delta}\Delta \quad ①$$

其中

$$\delta = 2(yz + zx + xy) - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \quad ②$$

等号成立仅当

$$x\left(\sec\frac{A}{2}\right)^2 = y\left(\sec\frac{B}{2}\right)^2 = z\left(\sec\frac{C}{2}\right)^2 \quad ③$$

应用海伦公式,取 $x = a'^2, y = b'^2, z = c'^2$ 得

$$\delta = 2\sum b'^2c'^2 = \sum a'^4 = 16\Delta'^2$$

代入式 ① 即得式(a_1),等号成立仅当

$$a'^2\left(\sec\frac{A}{2}\right)^2 = b'^2\left(\sec\frac{B}{2}\right)^2 = c'^2\left(\sec\frac{C}{2}\right)^2 \Rightarrow a'\sec\frac{A}{2} = b'\sec\frac{B}{2} = c'\sec\frac{C}{2}$$

也可以表示为

$$a'^2 : b'^2 : c'^2 = a(b + c - a) : b(c + a - b) : c(a + b - c) \quad ④$$

式(a) 的第二个配对式便是

$$\sum a'(b' + c' - a')(b^2 + c^2 - a^2) \geqslant 16\Delta\Delta' \quad (a_2)$$

等号成立仅当

$$\cot A\cot\frac{A'}{2} = \cot B\cot\frac{B'}{2} = \cot C\cot\frac{C'}{2} \quad ⑤$$

证明 我们令

$$\begin{cases}\lambda_1 = b^2 + c^2 - a^2\\ \lambda_2 = c^2 + a^2 - b^2\\ \lambda_3 = a^2 + b^2 - c^2\end{cases} \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 2\sum b^2c^2 - \sum a^4 = 16\Delta^2$$

且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中至少有两个为正数(当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时,有一个为负数).

应用上部分推广 16 中的结论有

$$\sum \lambda_1 a'(b' + c' - a') \geqslant 4\sqrt{\sum \lambda_1\lambda_2}\Delta' \Rightarrow \sum a'(b' + c' - a')(b^2 + c^2 - a^2) \geqslant 16\Delta\Delta'$$

等号成立的条件是

$$\lambda_1\cot\frac{A'}{2} = \lambda_2\cot\frac{B'}{2} = \lambda_3\cot\frac{C'}{2} \Rightarrow 2bc\cos A\cot\frac{A'}{2} = 2ca\cos B\cot\frac{B'}{2} = 2ab\cos C\cot\frac{C'}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\cos A}{a}\cot\frac{A'}{2} = \frac{\cos B}{b}\cot\frac{B'}{2} = \frac{\cos C}{c}\cot\frac{C'}{2} \Rightarrow$$

$$\cot A\cot\frac{A'}{2} = \cot B\cot\frac{B'}{2} = \cot C\cot\frac{C'}{2}$$

2 加强与完善

每当一个优美的不等式被人们深深地喜爱时,人们总想把它进行改进和加强,使它更美妙,更迷人.

1973 年,美国杜克大学教授 L. Carlitz 首次讨论了将 Pedoe 不等式(a) 加强为

$$H \geqslant 8(\Delta^2 + \Delta'^2) \quad (?)$$

的可能性.

其实,如果保持 $\triangle ABC$ 的状态不变,则面积 Δ 为常数,而把 $\triangle A'B'C'$ 的多边缩小同一倍数 $\lambda>0$,得出另一个 $\triangle A''B''C''$,显然它的面积为 $\lambda^2\Delta'$,对 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A''B''C''$,应用上式有

$$\lambda^2 H \geqslant 8(\Delta^2+\lambda^4\Delta'^2) \qquad ①$$

令 $\lambda\to 0$,这时式 ① 化为 $0\geqslant 8\Delta^2$.这样就会产生矛盾.这说明式 ① 不能普遍成立.况且,式(?) 等号成立的条件只能是 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,而不是 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

后来,人们通过不懈的努力,建立了式(a) 的三种加强形式:

$$H\geqslant 8\left(\frac{K_2}{K_1}\Delta^2+\frac{K_1}{K_2}\Delta'^2\right) \qquad ②$$

$$H\geqslant 16\Delta\Delta'+Q,Q\geqslant 0 \qquad ③$$

$$H\geqslant 8\left(\frac{M_2}{M_1}+\frac{M_1}{M_2}\right)\Delta\Delta' \qquad ④$$

其中 K_1,K_2,M_1,M_2,Q 均为正数,以上三式等号成立的条件仍然是 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,达到了加强式(a) 的目的.

其实,这三种加强形式均可统一成式 ③,因为通过配方便知道了.并且,据笔者初探,人们建立的许多加强并非最强,许多都可以再进行加强.如果我们归纳统计起来,约有二十个之多,简直百花开放,五彩缤纷.

限于篇幅,我们只介绍几个加强(字母意义同前,不再重复):

第一个是"彭 - 常"不等式

$$H\geqslant 8\left(\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{a^2+b^2+c^2}\Delta^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{a'^2+b'^2+c'^2}\Delta'^2\right) \qquad (a_3)$$

等号成立仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

式(a_3)是我国的常庚哲、彭家贵老师在1979年建立的,由于它有漂亮的外观,对称的结构,被国外的数学同行美称为优美的"彭 - 常"不等式.

更令人赞叹不已的是,在难忘的1993年,我国的冷岗松、唐立华老师又将式(a_3)从参数方便推广为

$$H\geqslant 8\left(\frac{xa'^2+yb'^2+zc'^2}{xa^2+yb^2+zc^2}\Delta^2+\frac{xa^2+yb^2+zc^2}{xa'^2+yb'^2+zc'^2}\Delta'^2\right) \qquad (a_4)$$

其中 x,y,z 为任意正数,且等号成立仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

这一重要发现真是美妙无穷.

证明 因 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则(a_4) 等价于

$$H(\sum xa^2)(\sum xa'^2)\geqslant 8(\sum xa'^2)^2\Delta^2+8(\sum xa^2)^2\Delta'^2 \qquad ①$$

记

$$D_a=a^2a'^2H-8(a'^4\Delta^2+a^4\Delta'^2)$$

$$T_a=(b^2c'^2+b'^2c^2)H-16(b'^2c'^2\Delta^2+b^2c^2\Delta'^2)$$

D_b,D_c,T_b,T_c 的意义类似(只换字母).

易证 $D_a\geqslant 0,D_b\geqslant 0,D_c\geqslant 0$,应用平均值不等式,并注意到 $H>0$,可得

$$T_c = (a^2b'^2 + a'^2b^2)H - 16(a'^2b'^2\Delta^2 + a^2b^2\Delta'^2) =$$
$$2aba'b'\left[H - 8\left(\frac{a'b'}{ab}\Delta^2 + \frac{ab}{a'b'}\Delta'^2\right)\right] \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$T_c \geqslant 0$$

同理 $T_a \geqslant 0, T_b \geqslant 0$.

又式 ① 展开整理便是

$$D_ax^2 + D_by^2 + D_cz^2 + T_ayz + T_bzx + T_cxy \geqslant 0 \qquad ②$$

式 ② 显然成立,等号成立仅当

$$\left.\begin{matrix} D_a = D_b = D_c = 0 \\ T_a = T_b = T_c = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

显然,当 $x = y = z$ 时,式(a_4) 化为式(a_3).

无独有偶,式(a_4) 还有两个"如花似玉" 的配对式

$$H \geqslant 8\left(\frac{\sum xa'b'}{\sum xab}\Delta^2 + \frac{\sum xab}{\sum xa'b'}\Delta'^2\right) \qquad (a_5)$$

$$H \geqslant 8\left[\left(\frac{\sum xa'}{\sum xa}\right)^2\Delta^2 + \left(\frac{\sum xa}{\sum xa'}\right)^2\Delta'^2\right] \qquad (a_6)$$

且等号成立的条件不变.

在这 3 个加强式中,分别对 x, y, z 取值.我们又可得到一系列的分式型加强式,如

$$H \geqslant 8\left(\frac{r'^3}{r^2}\Delta^2 + \frac{r^2}{r'^2}\Delta'^2\right)$$

$$H \geqslant 8\left(\frac{R'r'}{Rr}\Delta^2 + \frac{Rr}{Rr}\Delta'^2\right)$$

$$H \geqslant 8\left(\frac{\sum \sin A}{\sum \sin A'} + \frac{\sum \sin A'}{\sum \sin A}\right)\Delta\Delta'$$

$$\sum \cot A' \geqslant (\cot B + \cot C) \geqslant \frac{\sum \sin A}{\sum \sin A'} + \frac{\sum \sin A'}{\sum \sin A}$$

瞧!这些结论多么奇趣美妙!

以上(a_4)、(a_5)、(a_6) 中虽然定义 $x, y, z > 0$,但只要不同时为 0,也是允许的.

令人欣喜的是,我国的安振平老师在 1991 年建立了第一个匹多恒等式

$$H = 8\left(\frac{S'}{S}\Delta^2 + \frac{S}{S'}\Delta'^2\right) + \frac{\sum (a^2s' - a'^2s)^2}{ss'} \qquad (a_7)$$

其中

$$s = a^2 + b^2 + c^2, s' = a'^2 + b'^2 + c'^2$$

利用恒等式(a_7) 不仅可以导出一些加强式,也可导出式(a) 的完善式

$$H \leqslant 8\left(\frac{s'}{s}\Delta^2 + \frac{s}{s'}\Delta'^2\right) + \frac{\sum (a^2s' - a'^2s)^2}{(\sum aa')^2} \qquad (a_8)$$

且等号成立的条件仍然是 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

进一步,安振平老师又建立了

$$E \equiv \sum a'(p'-a')(p-b)(p-c) \geqslant 2\Delta\Delta' \qquad (a_9)$$

将式(a_9)变形即得

$$H \geqslant 16\Delta\Delta' + Q \qquad (a_{10})$$

其中

$$Q = abc\sum(b+c-a)\left(\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right)^2 \geqslant 0$$

而且,式(a_{10})至少有 3 种证法.今选其一.

证明 设 x,y,z 均为正数,且 x',y',z' 也均为正数,令

$$\begin{cases}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(yz,zx,xy)\\(K_1,K_2,K_3)=(y'z',z'x',x'y')\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=xyz(x+y+z)\\K_1K_2+K_2K_3+K_3K_1=x'y'z(x'+y'+z')\end{cases}\Rightarrow$$

$$[\sum K_1(\lambda_2+\lambda_3)]^2 \geqslant$$

$$4(\sum K_2K_3)(\sum \lambda_2\lambda_3)(\text{杨克昌不等式})\Leftrightarrow$$

$$\sum xy'z'(y+z) \geqslant 2[(xyz\sum x)(x'y'z'\sum x')]^{\frac{1}{2}}$$

等号成立仅当

$$\frac{\lambda_1}{K_1}=\frac{\lambda_2}{K_2}=\frac{\lambda_3}{K_3}\Rightarrow\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z} \qquad ③$$

在式 ① 中取 $x=p-a,x'=p'-a'$ 等,并注意到 $y+z=2p-b-c=a$ 及 $x+y+z=3p-a-b-c=\frac{1}{2}(a+b+c)=p$ 等,得到

$$E \equiv \sum a'(p'-a')(p-b)(p-c) \geqslant 2\Delta\Delta'$$

又根据恒等式

$$\left.\begin{aligned}H &\equiv 8E+Q\\E &\geqslant 2\Delta\Delta'\end{aligned}\right\}\Rightarrow H \geqslant 16\Delta\Delta'+Q$$

等号成立的条件易推之.

在式(Q)的一系列加强式中,不带分母的首推程龙老师建立的最简妙

$$H \geqslant 16\Delta\Delta' + \frac{2}{3}\sum(ab'-a'b)^2 \qquad (a_{11})$$

证法 1 记

$$K = 4aba'b'-(a^2+b^2-c^2)(a'^2+b'^2-c'^2)\Rightarrow K^2-(16\Delta\Delta')^2=$$

$$4[ab(a'^2+b'^2-c'^2)-a'b'(a^2+b^2-c^2)]^2 \geqslant 0\Rightarrow$$

$$K^2 \geqslant (16\Delta\Delta')^2\Rightarrow K \geqslant 16\Delta\Delta'\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&H \geqslant 16\Delta\Delta'+2(ab'-a'b)^2\\&\text{同理}\begin{cases}H \geqslant 16\Delta\Delta'+2(bc'-b'c)^2\\H \geqslant 16\Delta\Delta'+2(ca'-c'a)^2\end{cases}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$3H \geqslant 3\times16\Delta\Delta'+2\sum(ab'-a'b)^2\Rightarrow$$

$$H \geqslant 16\Delta\Delta' + \frac{2}{3}\sum(ab' - a'b)^2$$

等号成立仅当 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

证法 2 由于

$\cos(C - C') \leqslant 1 \Rightarrow \cos C\cos C' + \sin C\sin C' \leqslant 1 \Rightarrow$

$$16\Delta\Delta' + (a^2 + b^2 - c^2)(a'^2 + b'^2 - c'^2) \leqslant 4aba'b' \Rightarrow K \geqslant 16\Delta\Delta'$$

以下过程同证法 1.

最奇妙的加强式,是陈计老师建立的

$$H \geqslant 8\left(\lambda\Delta'^2 + \frac{\Delta^2}{\lambda}\right) \qquad (a_{12})$$

其中

$$\max\left\{\frac{a^2}{a'^2}, \frac{b^2}{b'^2}, \frac{c^2}{c'^2}\right\} \geqslant \lambda \geqslant \min\left\{\frac{a^2}{a'^2}, \frac{b^2}{b'^2}, \frac{c^2}{c'^2}\right\}$$

此外,如果应用 Bottema 不等式,还可得到完善式

$$6(3RR')^2 - 16\Delta\Delta' \geqslant H \geqslant 16\Delta\Delta' \qquad (a_{13})$$

3 等价形式

对于两个命题,如果命题 A 与命题 B 具有相互推出关系 $A \Leftrightarrow B$,那么,在数学意义上,命题 A 与命题 B 是等价的,它们只是文字叙述或表达式不同罢了.

1963 年,Oppenheim 建立了匹多不等式的等价命题.

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边长为 a_1, a_2, a_3,面积为 Δa;$\triangle B_1B_2B_3$ 的三边长为 b_1, b_2, b_3,面积为 Δb;$\triangle C_1C_2C_3$ 的三边长为 c_1, c_2, c_3,面积为 Δc,且满足条件

$$c_i = \sqrt{\frac{a_i^2 + b_i^2}{2}}, i = 1,2,3$$

则有不等式

$$\Delta c \geqslant \frac{\Delta a + \Delta c}{2} \qquad (b)$$

等号成立仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$.

据笔者初探,此等价命题可以推广为:

推广 1($\triangle$) 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边长为 a_1, a_2, a_3,面积为 Δa;$\triangle B_1B_2B_3$ 的三边长为 b_1, b_2, b_3,面积为 Δb;$\triangle C_1C_2C_3$ 的三边长为 c_1, c_2, c_3,面积为 Δc,且满足条件

$$c_i = \sqrt{\frac{x_na_i^2 + x_{n+1}b_i^2}{r}}, i = 1,2,3 \qquad ①$$

则有不等式

$$\Delta c \geqslant \frac{x_n\Delta a + x_{n+1}\Delta b}{r} \qquad (c)$$

其中

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{②}$$

$(n\in\mathbf{N})$ 为斐波那契数列,且式(c)等号成立仅当 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$.

证明 我们只须对 $r=1$ 时的情况证明即可,为此,我们分三步证明.

(1)我们先证明以 c_1,c_2,c_3 为边可以构成三角形,为此只须证明 $c_1<c_2+c_3$ 即可,其余 $c_2<c_3+c_1,c_3<c_1+c_2$ 同理可证.

$$\begin{cases}a_1<a_2+a_3\\ b_1<b_2+b_3\end{cases}\Rightarrow x_na_1^2+x_{n+1}b_1^2<x_n(a_2+a_3)^2+x_{n+1}(b_2+b_3)^2=$$

$$(x_na_2^2+x_{n+1}b_2^2)+(x_na_3^2+x_{n+1}b_3^2)+2(x_na_2a_3+x_{n+1}b_2b_3)=$$

$$c_2^2+c_3^2+2(\sqrt{x_n}a_2\cdot\sqrt{x_n}a_3+\sqrt{x_{n+1}}b_2\cdot\sqrt{x_{n+1}}b_3)\leqslant$$

$$c_2^2+c_3^2+2[(x_na_2^2+x_{n+1}b_2^2)(x_na_3^2+x_{n+1}b_3^2)]^{\frac{1}{2}}=$$

$$c_2^2+c_3^2+2c_2c_3=(c_2+c_3)^2\Rightarrow c_1^2<(c_2+c_3)^2\Rightarrow c_1<c_2+c_3$$

(2)求数列的通项;以

$$c_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2},i=1,2,3$$

为边可以构成三角形,那么以

$$[(a_i^2+b_i^2)+b_i^2]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a_i^2+2b_i^2},i=1,2,3$$

为边也可以构成三角形.同样,以

$$[(a_i^2+2b_i^2)+(a_i^2+b_i^2)]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2a_i^2+3b_i^2},i=1,2,3$$

为边可以构成三角形.

如此继续下去,以

$$c_i=\sqrt{x_na_i^2+x_{n+1}b_i^2},i=1,2,3$$

为边可以构成面积为 Δc 的三角形.

显然数列 $\{x_n\}$ 有递推关系

$$\begin{cases}x_1=x_2=1\\ x_{n+2}=x_{n+1}+x_n\end{cases},n=1,2,\cdots\Rightarrow x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],n=1,2,\cdots$$

(3)由海伦公式,有

$$16\Delta_c^2=(\sum c_i^2)^2-2\sum c_i^4=[\sum(x_na_i^2+x_{n+1}b_i^2)]^2-2\sum(x_na_i^2+x_{n+1}b_i^2)^2=$$

$$(x_n\sum a_i^2+x_{n+1}\sum b_i^2)^2-2\sum(x_n^2a_i^4+2x_nx_{n+1}a_i^2b_i^2+x_{n+1}^2b_i^4)=$$

$$x_n^2(\sum a_i^2)^2+2x_nx_{n+1}(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)+x_{n+1}^2(\sum b_i^2)^2-2x_n^2\sum a_i^4-$$

$$2x_{n+1}^2\sum b_i^4-4x_nx_{n+1}\sum a_i^2b_i^2=x_n^2[(\sum a_i^2)^2-2\sum a_i^4]+$$

$$x_{n+1}^2[(\sum b_i^2)^2-2\sum b_i^4]+2x_nx_{n+1}[(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)-2\sum a_i^2b_i^2]=$$

$$16x_n^2\Delta_a^2+16x_{n+1}^2\Delta_b^2+2x_nx_{n+1}H\geqslant$$

$$16(x_n^2\Delta_a^2 + x_{n+1}^2\Delta_b^2 + 2x_nx_{n+1}\Delta_a\Delta_b) = 16(x_n\Delta_a + x_{n+1}\Delta_b)^2 \Rightarrow$$
$$\Delta_c \geqslant x_n\Delta_a + x_{n+1}\Delta_b$$

等号成立仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$.

从上述证明,我们知道

$$H \geqslant 16\Delta_a\Delta_b \Leftrightarrow \Delta_c \geqslant x_n\Delta_a + x_{n+1}\Delta_b$$

而且,式(c) 还可以推广到四边形中去.

4 指数推广

根据我们在前面建立的结论,冷岗松老师在上世纪就建立了式(a) 的指数推广:

推广 2(冷岗松) 设 $\triangle A'B'C'$ 的三边长为 a', b', c',面积为 Δ';$\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c,面积为 Δ;指数 $\alpha, \beta \in [0,1]$,记

$$H(\alpha,\beta) \equiv a'^{2\alpha}(b^{2\beta} + c^{2\beta} - a^{2\beta}) + b'^{2\alpha}(c'^{2\beta} + a^{2\beta} - b^{2\beta}) + c'^{2\alpha}(a^{2\beta} + b^{2\beta} - c^{2\beta})$$

则

$$H(\alpha,\beta) \geqslant \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha+\beta-2} \cdot 16\Delta'^{\alpha} \cdot \Delta^{\beta} \tag{d}$$

并约 $H(1,1) \equiv H, H(0,0) \equiv 3$.

显然,式(d) 等号成立仅当:

当 $\alpha = \beta = 1$ 时,$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.其它情形为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 为正三角形.

证明 由于以 $a'^{\alpha}, b'^{\alpha}, c'^{\alpha}$ 为边可以构成面积为Δ'_{α} 的三角形;以 $a^{\beta}, b^{\beta}, c^{\beta}$ 为边可构成面积为 Δ_{β} 的三角形,则有

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{4\Delta'}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha} \\ \Delta_{\beta} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{\beta} \end{cases} \Rightarrow H(\alpha,\beta) \geqslant 16\Delta'_{\alpha} \cdot \Delta_{\beta} \geqslant 3\left(\frac{4\Delta'}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{\beta}$$

此即为式(d).

5 参数推广

我们可以从参数方面将式(a) 推广为:

推广 3 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c,面积为 Δ;$\triangle A'B'C'$ 的三边长为 a', b', c',面积为 Δ';参数 $\lambda, \mu \geqslant 1, x, y, z \leqslant 1$,则

$$H' = a'^2(\lambda b^2 + \mu c^2 - xa^2) + b'^2(\lambda c^2 + \mu a^2 - yb^2) + c'^2(\lambda a^2 + \mu b^2 - zc^2) \geqslant 16(1 + m + n)\Delta\Delta' \tag{e}$$

其中
$$\begin{cases} m = 2\sqrt{(\lambda - 1)(\mu - 1)} \geqslant 0 \\ n = \sqrt[3]{(1 - x)(1 - y)(1 - z)} \geqslant 0 \end{cases}$$

略证 注意应用式(a).

$$H' = H + \sum a'^2[(\lambda-1)b^2+(\mu-1)c^2] + \sum(1-x)(aa')^2 \geqslant$$
$$H + \sum(ma'^2bc) + 3[\prod(1-x)(aa')^2]^{\frac{1}{3}} \geqslant$$
$$H + m(\sum a'^2bc) + 3n[\prod(aa')^2]^{\frac{1}{3}} \geqslant$$
$$16\triangle\triangle' + 16m\Delta\Delta' + 16n\Delta\Delta' \Rightarrow$$
$$H' \geqslant 16(1+m+n)\Delta\Delta'$$

为了向式(a)的加权推广靠近,我们先建立两个相关结论:

结论1($\triangle'$) 设$\triangle ABC$的三边长为a,b,c,面积为Δ;$\triangle ABC$的三边长为a',b',c',面积为Δ',正数$\lambda,\mu,v\in(0,1)$,且$\lambda+\mu+v\leqslant 1$,则

$$T_\lambda \equiv \lambda a'^2(b^2+c^2-a^2)^2 + \mu b'^2(a^2+b^2-c^2)^2 + vc'^2(a^2+b^2-c^2)^2 \geqslant 64\Delta^2\Delta'\cdot\sqrt{\lambda\mu v} \tag{1}$$

略证 应用杨克昌不等式有

$$T_\lambda = \sum\lambda a'^2(b^2+c^2-a^2)^2 = 16\Delta^2\sum(a'^2\cdot\lambda\cot^2 A) \geqslant 16\Delta'\cdot\sqrt{xy} \tag{2}$$

其中
$$\begin{cases} x = 2\sum(b'c')^2 - \sum a'^4 = 16\Delta'^2 \\ y = \sum\mu v(\cot B\cot c)^2 \end{cases}$$

应用柯西不等式有

$$y\left(\sum\frac{1}{\mu v}\right) = \left(\sum\frac{1}{\mu v}\right)\sum\mu v(\cot B\cot C)^2 \geqslant (\sum|\cot B\cot C|)^2 \geqslant$$
$$(\sum\cot B\cot C)^2 = 1 \Rightarrow$$
$$y \geqslant \left(\sum\frac{1}{\mu v}\right)^{-1} = \frac{\lambda\mu v}{\lambda+\mu+v} \geqslant \lambda\mu v \Rightarrow$$
$$T_\lambda \geqslant 16\sqrt{xy}\cdot\Delta^2 \geqslant 64\Delta^2\Delta'\sqrt{y} \geqslant 64\sqrt{\lambda\mu v}\cdot\Delta^2\Delta'$$

结论2 设$\triangle ABC$的三边长为a,b,c,面积为Δ;$\triangle A'B'C'$的三边长为a',b',c',面积为Δ';λ,μ,v为正数,满足

$$p = 2\lambda\mu v(\lambda+\mu+v) - (\mu v)^2 - (v\lambda)^2 - (\lambda\mu)^2 > 0$$

则有

$$P_\lambda \equiv (\mu b'^2+vc'^2)(b^2+c^2-a^2) + (vc'^2+\lambda a'^2)(c^2+a^2-b^2) + (\lambda a'^2+\mu b'^2)(a^2+b^2-c^2) \geqslant t\Delta\Delta' \tag{3}$$

其中
$$t = 32\cdot\sqrt[4]{\frac{p}{3}}$$

略证 应用杨克昌不等式,有

$$P_\lambda = \sum(\mu b'^2+vc'^2)(b^2+c^2-a^2) \geqslant 2\sqrt{xy} \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} x = \sum(\mu b'^2\cdot vc'^2) = \sum\mu v(b'c')^2 \\ y = \sum(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) = 16\Delta^2 \end{cases} \Rightarrow P_\lambda \geqslant 8\sqrt{x}\Delta \tag{5}$$

再次应用杨克昌不等式得

$$x \geqslant \sqrt{pq} \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} p = 2\sum(\mu v \cdot v\lambda) - \sum(\mu v)^2 \\ q = \sum(b'c')^2(c'a')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2\lambda\mu v\sum\lambda - \sum(\mu v)^2 \\ q = (a'b'c')^2\sum a'^2 \geqslant \frac{1}{3}(16\Delta')^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \geqslant 16\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)\Delta' \Rightarrow P_\lambda \geqslant 32\left(\sqrt[4]{\frac{p}{3}}\right)\Delta\Delta'$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 为正三角形，且 $\lambda = \mu = v$.

6 加权推广

在 20 世纪出版的《初等数学论丛(第 8 辑)》中，就有杨克昌老师的重要成果，加权推广了匹多不等式式(a)：

推广 4 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的边长分别是 a,b,c 与 a',b',c'，面积分别为 Δ,Δ'，实数 K_1,K_2,K_3 满足条件

$$K_1 + K_2 + K_3 = \sqrt{-(K_2K_3 + K_3K_1 + K_1K_2)} > 0$$

则

$$W \equiv a'^2(K_1a^2 + K_2b^2 + K_3c^2) + b'^2(K_1b^2 + K_2c^2 + K_3a^2) + c'^2(K_1c^2 + K_2a^2 + K_3b^3) \geqslant 16(K_1 + K_2 + K_3)\Delta\Delta' \tag{f}$$

等号成立仅当

$$\frac{a'^2}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{b'^2}{\lambda_3 + \lambda_1} = \frac{c'^2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

其中

$$\begin{cases} \lambda_1 = K_1a^2 + K_2b^2 + K_3c^2 \\ \lambda_2 = K_1b^2 + K_2c^2 + K_3a^2 \\ \lambda_3 = K_1c^2 + K_2a^2 + K_3b^2 \end{cases}$$

可见，式(f)的外形结构与众不同，别具一格，且权系数 K_1,K_2,K_3 所满足的条件也出人意料.

证明 (ⅰ)首先证明 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中至少有两个正数(略).

(ⅱ)由于

$$\sum K_1 = \sqrt{-\sum K_2K_3} > 0 \Rightarrow (\sum K_1)^2 = -\sum K_2K_3 \Rightarrow \sum K_1^2 + \sum K_2K_3 = -2\sum K_2K_3 \Rightarrow$$

$$\sum \lambda_2\lambda_3 = \sum(K_1b^2 + K_2c^2 + K_3a^2)(K_1c^2 + K_2a^2 + K_3b^2) =$$

$$(\sum K_1^2 + \sum K_2K_3)\sum b^2c^2 + (\sum K_2K_3)\sum a^4 =$$

$$-(\sum K_2K_3)(2\sum b^2c^2 - \sum a^4) = (\sum K_1)^2 \cdot (4\Delta)^2 > 0 \Rightarrow$$

$$W \equiv \sum a'^2(K_1a^2 + K_2b^2 + K_3c^2) = \sum \lambda_1 a'^2 \geqslant$$

$$\sqrt{(\sum \lambda_2\lambda_3)(2\sum b'^2c'^2 - \sum a'^4)}\text{(应用杨克昌不等式)} =$$

$$4(\sum\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{2}}\cdot\Delta'\geqslant 16(\sum K_1)\Delta\Delta'\Rightarrow$$
$$W\geqslant 16(K_1+K_2+K_3)\Delta\Delta'$$

至今,式(a)的加权推广尚无第二个,故式(f)可堪称人间妙题,稀世珍品.

下面我们再介绍优美的高灵不等式.

如果我们在推广2的式(d)中取 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$,便得到特例

$$a'(b+c-a)+b'(c+a-b)+c'(a+b-c)\geqslant\sqrt{48\Delta\Delta'}\tag{g}$$

当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 时,式(g)化为前面的"费－哈"不等式

$$\sum a(b+c-a)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \tag*{①}$$

因此式(g)是式①的一个推广,而且,式(g)的外观结构与匹多不等式完全一致,它就是著名的高灵不等式.它是我国重庆的高灵老师首先提出的,1983年发表在美国的《数学月刊》上.

为了重在基础,我们先证明高灵不等式.

证法1 记

$$\delta=2(yz+zx+xy)-x^2-y^2-z^2 \tag*{②}$$

在杨克昌不等式

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\geqslant\delta(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) \tag*{③}$$

中取

$$(x,y,z)=(a',b',c')$$

并应用"费－哈"不等式,有

$$\delta=2\sum b'c'-\sum a'^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta' \tag*{④}$$

再取$(\alpha,\beta,\gamma)=(b+c-a,c+a-b,a+b-c)$应用"费－哈"不等式,有

$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=\sum(c+a-b)(a+b-c)\geqslant 4\sqrt{3}\Delta \tag*{⑤}$$

③,④,⑤结合,立即得

$$(\sum\alpha x)^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta\cdot 4\sqrt{3}\Delta'=48\Delta\Delta'\Rightarrow\sum a'(b+c-a)\geqslant\sqrt{48\Delta\Delta'}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 均为正三角形.

证法2 首先注意海伦公式

$$16\Delta^2=(\sum a)\prod(b+c-a) \tag*{⑥}$$

和"波－舍"不等式的加强式

$$\frac{abc}{a+b+c}\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}\Delta \tag*{⑦}$$

并注意到 $T=\sum a'(b+c-a)=\sum a(b'+c'-a')$

有 $T\geqslant 3[\prod a'(b+c-a)]^{1/3}=3[a'b'c'\prod(b+c-a)]^{1/3}\Rightarrow$

$$\left.\begin{cases} T \geqslant 3\left(\dfrac{a'b'c'}{\sum a}\cdot 16\Delta^2\right)^{1/3} \\ \text{同理}: T \geqslant 3\left(\dfrac{abc}{\sum a'}\cdot 16\Delta'^2\right)^{1/3} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$T^2 \geqslant 9\left(\frac{abc}{\sum a}\cdot\frac{a'b'c'}{\sum a'}\cdot(16\Delta\Delta')^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$T^2 \geqslant 9\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\Delta\cdot\frac{4\sqrt{3}}{9}\Delta'\cdot(16\Delta\Delta')^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$T \geqslant \sqrt{48\Delta\Delta'}$$

如果我们在上篇推广 14 的式(V) 中,取 $\theta = \dfrac{1}{2}$,然后再综合前面的加权推广式(f),立即得到高灵不等式的加权推广

$$W' = \sum a'(K_1 a + K_2 b + K_3 c) \geqslant 4(K_1 + K_2 + K_3)\sqrt{3\Delta\Delta'} \tag{h}$$

其实,据笔者初探,高灵不等式(g) 还有一个加权推广:

推广 5(△) 设 $\triangle ABC$ 的三边长是 a,b,c,面积为 Δ;$\triangle A'B'C'$ 的三边长为 a',b',c',面积为 Δ';正数 λ,μ,v 满足条件

$$\delta = 2\lambda\mu v(\lambda+\mu+v) - \lambda^2\mu^2 - \mu^2v^2 - v^2\lambda^2 > 0 \tag{⑧}$$

则

$$T_\lambda \equiv \lambda a'(b+c-a) + \mu b'(c+a-b) + vc'(a+b-c) \geqslant (4\sqrt[4]{3\delta})\cdot\sqrt{\Delta\Delta'} \tag{i}$$

显然,当 $\lambda = \mu = v = 1$ 时,式(i) 化为式(g).

略证 注意到巧妙应用"费 - 哈"不等式和杨克昌不等式,有

$$T_\lambda^2 = [\sum \lambda a'(b+c-a)]^2 \geqslant xy \tag{⑨}$$

其中

$$\begin{cases} x = \sum \mu v(c+a-b)(a+b-c) \\ y = 2\sum b'c' - \sum a'^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta' \end{cases} \tag{⑩}$$

再度应用杨克昌不等式,有

$$x^2 \geqslant mn \tag{⑪}$$

其中

$$m = 2\sum(\mu v)(v\lambda) - \sum(\mu v)^2 = 2\lambda\mu v(\lambda+\mu+v) - \sum(\mu v)^2 \Rightarrow m = \delta$$

$$n = \sum[(c+a-b)(a+b-c)(a+b-c)(b+c-a)] =$$

$$\sum(b+c-a)\prod(b+c-a) =$$

$$(a+b+c)\prod(b+c-a) \Rightarrow n = 16\Delta^2$$

于是

$$T_\lambda^4 \geqslant x^2y^2 \geqslant mn(4\sqrt{3}\Delta')^2 = \delta\cdot 16\Delta^2(4\sqrt{3}\Delta')^2 \Rightarrow$$

$$T_\lambda = \sum \lambda a'(b+c-a) \geqslant (4\sqrt[4]{3\delta})\cdot\sqrt{\Delta\Delta'}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 均为正三角形且 $\lambda = \mu = v$.

现在我们已经知道,匹多不等式有两个配对式,据笔者初探,高灵不等式也有个配对式

$$\frac{a'}{b+c-a}+\frac{b'}{c+a-b}+\frac{c'}{a+b-c}\geqslant 3\sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}} \tag{12}$$

而且,应用三角形等周不等式和"波 - 舍"不等式,式 ① 又可加强为

$$M=\prod\left(\frac{a'}{b+c-a}\right)\geqslant\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{13}$$

利用式 ⑬ 和杨克昌不等式,易将式 ⑫ 推广为

$$T_\alpha\equiv\sum\frac{\lambda a'^{\beta}}{(b+c-a)^{\alpha}}\geqslant K\left(\frac{\Delta'^{\beta}}{\Delta^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

其中

$$K=\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\right)^{\alpha-\beta}\left[3\left(2\sum\mu v-\sum\lambda^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}>0$$

$$T_\lambda\equiv\sum\frac{\lambda a'}{b+c-a}\geqslant(\sqrt[4]{27\varepsilon})\sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}} \tag{15}$$

其中 $\varepsilon=2\lambda\mu v(\lambda+\mu+v)-\sum(\mu v)^2>0,\alpha,\beta,\lambda,\mu,v$ 均为正数.

7　代数推广

从代数意义上讲,匹多不等式可推广为:

推广 6(△)　设两组正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足条件

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\geqslant 2\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2\geqslant 2\sum_{i=1}^n b_i^2$$

则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)-2\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant\sqrt{AB} \tag{j}$$

其中

$$\begin{cases}A=\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)^2-2\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\\ B=\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i\right)^2-2\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\end{cases}$$

等号成立仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

显然,当 $n=3$ 时,作置换

$$\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)\to(a^2,b^2,c^2)\\(b_1,b_2,b_3)\to(a'^2,b'^2,c'^2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=(\sum a^2)^2-2\sum a^4=16\Delta^2\\B=(\sum a'^2)^2-2\sum a'^4=16\Delta'^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$(\sum a^2)(\sum a'^2)-2\sum a^2a'^2\geqslant 16\Delta\Delta'\Rightarrow$$

$$H\equiv\sum a'^2(b^2+c^2-a^2)\geqslant 16\Delta\Delta'$$

因此,式(j) 是式(a) 的代数推广,同时,它也是杨克昌不等式的推广.

证明　应用柯西不等式有

$$\begin{aligned}\sqrt{AB}+2\sum_{i=1}^n a_ib_i&=\sqrt{AB}+\sum_{i=1}^n(\sqrt{2}a_i\cdot\sqrt{2}b_i)\leqslant\\&[A+\sum_{i=1}^n(\sqrt{2}a_i)^2]^{\frac12}[B+\sum_{i=1}^n(\sqrt{2}b_i)^2]^{\frac12}=\\&(A+2\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac12}(B+2\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac12}=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\Rightarrow\\&\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)-2\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant\sqrt{AB}\end{aligned}$$

等号成立仅当 $a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$.

进一步地,如果我们记 $B_i=\sum_{i=1}^n b_i-2b_i$.

式(j) 又可以改写成

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant\sqrt{AB}$$

8　元数推广

外森比克不等式、"波 - 舍" 不等式、"费 - 哈" 不等式,它们均只涉及一个三角形的边长和面积.后来,我们都把它们推广到了多个三角形的情形,那么,对于已经涉及了两个三角形的匹多不等式,也能将它推广到多个三角形中去吗?

为此,我们发现,欲直接推广是不行的,我们得将匹多不等式

$$H\equiv\sum a'^2(b^2+c^2-a^2)\geqslant 16\Delta\Delta'\tag{a}$$

变形为

$$H\equiv(\sum a'^2)(\sum a^2)-2\sum(a'a)^2\geqslant 16\Delta\Delta'\tag{a'}$$

才行.而且,如果我们记 $s=a^2+b^2+c^2,s'=a'^2+b'^2+c'^2$,式(a) 的一个加强便是"彭 - 常" 不等式

$$H\geqslant 8\left(\frac{s'}{s}\Delta^2+\frac{s}{s'}\Delta'^2\right)\tag{*}$$

现在我们高标准要求自已.

推广 7(△)　设 $\triangle A_iB_iC_i$ 的三边长为 a_i,b_i,c_i,面积为 Δi,指数 $\theta_i\in(0,2](1\leqslant i\leqslant$

$n;2 \leqslant n \in \mathbf{N}$),且满足$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 2$,则有

$$H_n \equiv \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)^{\theta_i} - 2\prod_{i=1}^{n}a_i^{2\theta_i} - 2\prod_{i=1}^{n}b_i^{2\theta_i} - 2\prod_{i=1}^{n}c_i^{2\theta_i} \geqslant 8\left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\frac{\Delta i}{S_i}\right)^2 \tag{k}$$

等号成立仅当$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \backsim \triangle A_nB_nC_n$,其中$S_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2$.

如果我们取$n = 2$,有

$$H \equiv H_2 \geqslant 8S_1^{\theta_1}S_2^{\theta_2}\left[\theta_1\left(\frac{\Delta_1}{S_1}\right)^2 + \theta_2\left(\frac{\Delta_2}{S_2}\right)^2\right] = 8\left[\theta_1\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\theta_2}\Delta_1^2 + \theta_2\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\theta_1}\Delta_2^2\right] \tag{①}$$

式①可视为“彭-常”不等式的一个指数推广.这是因为如取$\theta_1 = \theta_2 = 1$时,上式立刻化为“彭-常”不等式

$$H \geqslant 8\left(\frac{S_2}{S_1}\Delta_1^2 + \frac{S_1}{S_2}\Delta_2^2\right)$$

如果应用加权不等式,注意到$\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{2} = 1$,有

$$H_n \geqslant 16\left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{2}\left(\frac{\Delta_i}{S_i}\right)^2 \geqslant \left(16\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta_i}{S_i}\right)^{\theta_i} \Rightarrow H_n \geqslant 16\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i} \tag{②}$$

式②便是匹多不等式的n元推广.

证明 海伦公式化为$S_i^2 - 16\Delta_i^2 = 2\sum a_i^4$.应用赫尔特不等式,有(其中$\theta_i = 2\alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$)

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}S_i^{2\alpha_i} - H_n &= 2\sum\prod_{i=1}^{n}a_i^{2\alpha_i} = 2\prod_{i=1}^{n}a_i^{2\alpha_i} + 2\prod_{i=1}^{n}b_i^{2\alpha_i} + 2\prod_{i=1}^{n}c_i^{2\alpha_i} \leqslant 2\prod_{i=1}^{n}(a_i^4 + b_i^4 + c_i^4)^{\alpha_i} = \\ &\prod_{i=1}^{n}(2a_i^4 + 2b_i^4 + 2c_i^4)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{n}(S_i^2 - 16\Delta_i^2)^{\alpha_i} = \\ &\left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{2\alpha_i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{16\Delta_i^2}{S_i^2}\right)^{\alpha_i} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{2\alpha_i}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(1 - \frac{16\Delta_i^2}{S_i^2}\right) = \\ &\left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{2}\left[1 - 16\left(\frac{\Delta_i}{S_i}\right)^2\right] = \left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{2} - 8\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\frac{\Delta_i}{S_i}\right)^2\right] = \\ &\left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\left[1 - 8\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\frac{\Delta_i}{S_i}\right)^2\right] = \prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i} - 8\left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\frac{\Delta_i}{S_i}\right)^2 \Rightarrow \\ &H_n \geqslant 8\left(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\theta_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\frac{\Delta_i}{S_i}\right)^2\end{aligned}$$

等号成立仅当

$$a_1^2 : b_1^2 : c_1^2 : \Delta_1 = a_2^2 : b_2^2 : c_2^2 : \Delta_2 = \cdots\cdots = a_n^2 : b_n^2 : c_n^2 : \Delta_n \Rightarrow$$
$$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \backsim \triangle A_nB_nC_n$$

9　四边形推广

我们知道,四边形的情况比三角形要复杂,自然,将一个几何不等式推广到四边形往往也随之复杂化.

对于四边形,有用途广泛而重要的:

定理 1(史坦纳)　对给定边长的四边形以有外接圆者的面积为最大.

因此,如果以 a_1,a_2,a_3,a_4 表示四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的边长,F 表示它的面积,p 表示半周长,那么最大面积可由 Brahmgupta 公式表为

$$F=[(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)(p-a_4)]^{1/2} \quad ①$$

特别地,当 $a_4\to 0$ 时,$A_1A_2A_3A_4$ 退化为 $\triangle A_1A_2A_3$,公式 ① 退化为三角形面积公式

$$F=\Delta=[p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)]^{1/2} \quad ②$$

这就是著名的海伦公式.

特别地,将式 ① 展开,可变形为

$$16F^2=(\sum a_i^2)^2+8\prod a_i-2\sum a_i^4,1\leqslant i\leqslant 4 \quad ③$$

有了上述定理和公式 ③,不难将 Oppenhein 不等式从三角形推广到四边形:

设两个圆内接四边形的边长分别为 a_i,b_i,面积分别为 F_1 和 F_2,则以

$$c_i=(a_i^2+b_i^2)^{1/2},i=1,2,3,4$$

为边可以构成四边形,这个四边形的最大面积 F_3 满足不等式

$$F_3\geqslant F_1+F_2 \quad (*)$$

等号成立仅当这两个圆内接四边形相似.

我国的陈计老师利用上述推广,首先将匹多不等式推广到了四边形.

推广 8(陈计)　字母意义同上.

$$h\equiv\sum a_1^2(b_2^2+b_3^2+b_4^2-b_1^2)+4[\prod(a_i^2+b_i^2)]^{\frac{1}{2}}-4\prod a_i-4\prod b_i\geqslant 16F_1F_2 \quad (1)$$

紧接着,陈计老师又建立了:

推广 9(陈计)

$$H\equiv\sum a_1^2(b_2^2+b_3^2+b_4^2-b_1^2)+4\left(\frac{\sum b_i^2}{\sum a_i^2}\prod a_i+\frac{\sum a_i^2}{\sum b_i^2}\prod b_i\right)\geqslant 16F_1F_2 \quad (\mathrm{m})$$

以上两式等号成立仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形.当这两个四边形退化为三角形时,$a_4=0,b_4=0$.(l) 和(m) 两式均退化为匹多不等式

$$\sum b_1^2(a_2^2+a_3^2-a_1^2)\geqslant 16F_1F_2 \quad (\mathrm{a})$$

但是,据笔者初探,上面的式(m) 又可加强成"彭 - 常"不等式的四边形推广

$$H\geqslant 8\left(\frac{S_2}{S_1}F_1^2+\frac{S_1}{S_2}F_2^2\right) \quad (\mathrm{n})$$

其中 H 表达式同式(m)左边，且

$$S_1=[(\sum a_i^2)^2+8\prod a_i]^{\frac{1}{2}},S_2=[(\sum b_i^2)^2+8\prod b_i]^{1/2},i=1,2,3,4$$

证明 (i)我们设

$$\begin{cases}p_1=\sum a_i^2\\p_2=\sum b_i^2\end{cases},\begin{cases}S_1^2=p_1^2+8\prod a_i\\S_2^2=p_2^2+8\prod b_i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16F_1^2=S_1^2-2\sum a_i^4\\16F_2^2=S_2^2-2\sum b_i^4\end{cases}$$

于是

$$S_1S_2=p_1p_2\left[\left(1+\frac{8\prod a_i}{p_1^2}\right)\left(1+\frac{8\prod b_i}{p_2^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant p_1p_2\left[1+4\left(\frac{\prod a_i}{p_1^2}+\frac{\prod b_i}{p_2^2}\right)\right]=$$

$$p_1p_2+4\left(\frac{p_2}{p_1}\prod a_i+\frac{p_1}{p_2}\prod b_i\right)\Rightarrow$$

$$H=p_1p_2-2\sum a_i^2b_i^2+4\left(\frac{p_2}{p_1}\prod a_i+\frac{p_1}{p_2}\prod b_i\right)\geqslant S_1S_2-2\sum a_i^2b_i^2 \tag{④}$$

(ii)又

$$2\sum a_i^2b_i^2\leqslant[(\sum 2a_i^4)(\sum 2b_i^4)]^{\frac{1}{2}}=[(S_1^2-16F_1^2)(S_2^2-16F_2^2)]^{1/2}=$$

$$S_1S_2\left\{\left[1-16\left(\frac{F_1}{S_1}\right)^2\right]\left[1-16\left(\frac{F_2}{S_2}\right)^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$S_1S_2\left\{1-8\left[\left(\frac{F_1}{S_1}\right)^2+\left(\frac{F_2}{S_2}\right)^2\right]\right\}=S_1S_2-8S_1S_2\left[\left(\frac{F_1}{S_1}\right)^2+\left(\frac{F_2}{S_2}\right)^2\right]\Rightarrow$$

$$H\geqslant S_1S_2-2\sum a_i^2b_i^2\geqslant 8S_1S_2\left[\left(\frac{F_1}{S_1}\right)^2+\left(\frac{F_2}{S_2}\right)^2\right]=$$

$$8\left(\frac{S_2}{S_1}F_1^2+\frac{S_1}{S_2}F_2^2\right) \tag{⑤}$$

等号成立仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形.

10 四面体推广

在许多中学数学资料上，都有关于四面体的题目，这是因为三角形是平面多边形的起点，而四面体则是空间多面体的起点.

虽然三角形的面积公式有几个，而海伦公式

$$\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)} \tag{①}$$

却只有一个.

相应地，四面体的体积公式也有几个，但与式①相对比，也只有一个优美的.

定理2 在四面体 $A—BCD$ 中，三组对棱分别是 $a、a',b、b',c、c'$，外接球半径为 R，体积为 V，则有

$$6RV=\sqrt{p(p-aa')(p-bb')(p-cc')} \tag{②}$$

其中 $p=\frac{1}{2}(aa'+bb'+cc')$.

由式②知,必有

$$(p-aa')(p-bb')(p-cc')>0$$

故必有 $$p-aa'>0,p-bb'>0,p-cc'>0$$

如若不然,不妨设

$$\left.\begin{matrix}p-aa'<0\\ p-bb'<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2p-aa'-bb'=cc'<0$$

矛盾,故 $$bb'+cc'>aa',cc'+aa'>bb',aa'+bb'>cc'$$

即任意两组对棱的积之和,大于第三组对棱的积.这充分表明以四面体的三组对棱之积 aa',bb',cc' 可以构成三角形的边,其面积为 $6RV$,于是,我们得到:

结论 在 $\triangle ABC$ 中,若关于 a,b,c,Δ 的关系式为 f,则在四面体 $A—BCD$ 内,关于 $aa',bb',cc',6RV$ 的关系式亦为 f,即有

$$f(a,b,c,\Delta)\equiv f(aa',bb',cc',6RV)$$

这样,我们可迅速将三角形的关系式对应在四面体中.另一方面,由于三角形的海伦公式展开整理即为

$$a^4+b^4+c^4=16\Delta^2+\sum(b^2-c^2)^2 \tag{①'}$$

于是,对应的公式②展开整理为

$$\sum(aa')^4=(24RV)^2+\sum[(bb')^2-(cc')^2]^2 \tag{③}$$

顺便指出:由于

$$(b^2-c^2)^2=(b+c)^2(b-c)^2\geqslant a^2(b-c)^2\Rightarrow\sum a^4\geqslant 16\Delta^2+\sum a^2(b-c)^2 \tag{④}$$

这是我们以前介绍过的结论。

另一方面,在 $\triangle ABC$ 中有重要的"波 - 舍"不等式

$$\Delta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3} \tag{⑤}$$

那么,在四面体中对应地有

$$V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}(aa'bb'cc')^{2/3} \tag{⑥}$$

如果再设四面体 $A—BCD$ 的四面的面积为 S_1,S_2,S_3,S_4,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,则有结论

$$V\leqslant 2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}(S_1S_2S_3S_4)^{3/8} \tag{⑦}$$

$$R\geqslant 3r \tag{⑧}$$

$$V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{27}(2R)^3\Rightarrow\begin{cases}P=\prod(aa')\geqslant 72V^2\\ 6RV\geqslant\frac{9}{\sqrt[6]{3}}V^{\frac{4}{3}}\end{cases} \tag{⑨}$$

有了上述重要的结论,那我们在前面建立的外森比克不等式的加权推广,就可推广

到四面体中了

$$\lambda_1(aa')^2+\lambda_2(bb')^2+\lambda_3(cc')^2\geqslant\frac{36}{\sqrt[6]{3}}\sqrt{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\cdot V^{\frac{4}{3}}\tag{o}$$

更令人惊喜的是,单墫老师建立了式(o)的绝妙配对

$$\lambda_1F_1^2+\lambda_2F_2^2+\lambda_3F_3^2+\lambda_4F_3^2\geqslant\frac{9}{2}[6(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\lambda_1+\lambda_4\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)V^4]^{1/3}\tag{p}$$

于是,陈计先生利用式(p)建立了匹多不等式的四面体推广

$$\sum F_1(S_2+S_3+S_4-S_1)\geqslant 18\sqrt[3]{3}\cdot(V_1V_2)^{2/3}\tag{q}$$

当然,匹多不等式还有一个四面体推广.

$$(a_1a'_1)[(bb')^2+(cc')^2-(aa')^2]+(b_1b'_1)^2[(cc')^2+(aa')^2-(bb')^2]+(c_1c'_1)^2[(aa')^2+(bb')^2-(cc')^2]\geqslant\frac{36^2}{\sqrt[3]{3}}(VV_1)^{4/3}\tag{r}$$

而且,陈计与马援还建立了漂亮的:

设四边形 $A_1-A_2A_3A_4$ 与 $B_1—B_2B_3B_4$ 的棱长分别是 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,6)$,体积分别为 V_1 和 V_2,则当 $\theta\in(0,1]$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{6}a_i^{2\theta}(t-3b_i^{2\theta})\geqslant 18(72V_1V_2)^{2\theta/3}\tag{s}$$

其中 $t=\sum_{j=1}^{6}b_j^{2\theta}$.

限于篇幅,以上为结论的证明略去.

11　四边形不等式

如果说关于三角形的几何不等式丰富多彩,那么关于四边形的几何不等式也五彩缤纷,毫不逊色.为此,我们在本文的最后一节特意简略介绍关于四边形的几何不等式.

定理3(单墫)　设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 中至少有3个正数,且 $\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta>0$,四边形 $ABCD$ 的边长为 a,b,c,d,面积为 F,则有

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\delta d^2\geqslant 4\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}F\tag{t_1}$$

等号成立仅当

$$\frac{a}{\lambda_1}=\frac{b}{\lambda_2}=\frac{c}{\lambda_3}=\frac{d}{\lambda_4}$$

其中

$$\begin{cases}\lambda_1^2=(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)\\\lambda_2^2=(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\gamma+\delta)\\\lambda_3^2=(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\alpha+\beta)\\\lambda_4^2=(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\alpha+\beta)\end{cases}$$

证法1　由史坦纳定理知,我们只须考虑 $ABCD$ 内接于圆的情况即可.此时,$B+D=A+C=\pi$.

我们先证 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 中任意两个数之和为正.由已知它们至少有 3 个为正数,即最多只有一个为负数,不妨依对称性设

$$\left.\begin{array}{l}\beta > 0\\ \alpha < 0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\alpha\beta < 0\\ \text{且 } \alpha+\beta \leqslant 0\end{array}$$

$$t = \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = \alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) < 0$$

这与已知矛盾,因此 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 中任两数之和为正,从而 $\alpha+\beta+\gamma+\delta > 0$,且

$$(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta) = (\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta) +$$
$$(\gamma\delta-\alpha\beta)^2 \Rightarrow (\gamma\delta-\alpha\beta)^2 < u = (\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)$$

再证 $S = \alpha+\beta+\gamma+\delta$,则有

$$(\gamma\delta-\alpha\beta)^2 < u$$

令

$$\theta = \arccos\left(\frac{rS-\alpha\beta}{\sqrt{u}}\right) \in (0,\pi) \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{\lambda s}{u}} \Rightarrow$$

$$1 \geqslant \cos(\theta - B) = \cos\theta\cos B + \sin\theta\sin B \Rightarrow$$

$$2\frac{\sqrt{u}}{S}(ab+cd) \geqslant \left(\frac{\sqrt{u}}{S}\cos\theta\right) - 2(ab+cd)\cos B + \left(\frac{\sqrt{u}}{S}\sin\theta\right)\cdot 2(ab+cd)\sin B =$$

$$\frac{\gamma\delta-\alpha\beta}{S}(a^2+b^2-c^2-d^2) + 4\sqrt{\frac{\lambda}{S}}\cdot F \Rightarrow$$

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \delta d^2 \geqslant 4\left(\sqrt{\frac{\lambda}{S}}\right)F + Q_1 + Q_2 \Rightarrow \tag{t_2}$$

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \delta d^2 \geqslant 4\left(\sqrt{\frac{\lambda}{S}}\right)F \tag{t_3}$$

其中

$$\begin{cases} Q_1 = \left(\sqrt{\dfrac{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}a - \sqrt{\dfrac{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}b\right)^2 \\ Q_2 = \left(\sqrt{\dfrac{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}c - \sqrt{\dfrac{(\delta+\alpha)(\delta+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}d\right)^2 \end{cases}$$

可见,单墫老师的上述绝妙证明,不仅令人惊叹,而且还将式(t_1)加强成了式(t_2).等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{l}\angle B = \theta\\ Q_1 = Q_2 = 0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{\lambda_1} = \frac{b}{\lambda_2} = \frac{c}{\lambda_3} = \frac{d}{\lambda_4}$$

从式(t_3)的外观,使我们想到杨学枝老师建立的推广式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cot\alpha_i \geqslant 4\Delta$$

现在我们取特例 $n = 4$,并作置换

$$(a_1,a_2,a_3,a_4) \to (a,b,c,d) \Rightarrow a^2\cot\alpha_1 + b^2\cot\alpha_2 + c^2\cot\alpha_3 + d^2\cot\alpha_4 \geqslant 4\Delta \tag{t_4}$$

其中

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \pi$$

式(t_4)与式(t_3)等价,但比式(t_3)显得简洁隐含,不便于直接举例应用.下面我们证明式(t_4)与式(t_3)等价.

证法2 由于 $\alpha_i \in (0,\pi)(i=1,2,3,4)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i=\pi$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中至少有3个锐角(因至多只有一个钝角)，于是 $\cot\alpha_1,\cot\alpha_2,\cot\alpha_3,\cot\alpha_4$ 中至少有3个正数，由

$$\alpha_1+\alpha_2=\pi-(\alpha_3+\alpha_4)\Rightarrow\cot(\alpha_1+\alpha_2)=-\cot(\alpha_3+\alpha_4)\Rightarrow\frac{\cot\alpha_1+\cot\alpha_2}{\cot\alpha_1\cot\alpha_2-1}=$$
$$-\frac{\cot\alpha_3+\cot\alpha_4}{\cot\alpha_3\cot\alpha_4-1}\Rightarrow(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)(\cot\alpha_3\cot\alpha_4-1)+$$
$$(\cot\alpha_3+\cot\alpha_4)(\cot\alpha_1\cot\alpha_2-1)=0\Rightarrow$$
$$\sum\cot\alpha_1=\sum\cot\alpha_2\cot\alpha_3\cot\alpha_4 \tag{1}$$

令
$$(\cot\alpha_1,\cot\alpha_2,\cot\alpha_3,\cot\alpha_4)=\left(\frac{\alpha}{t},\frac{\beta}{t},\frac{\gamma}{t},\frac{\delta}{t}\right),t>0$$

由于
$$\sum\cot\alpha_1\geqslant4\cot\left(\frac{\sum\alpha_1}{4}\right)=4\cot\frac{\pi}{4}>0\Rightarrow k=\alpha+\beta+\gamma+\delta>0$$

再设
$$m=\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta$$

式①化为

$$\frac{k}{t}=\frac{m}{t^3}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\delta d^2\geqslant4t=4\sqrt{\frac{m}{k}}=$$
$$4\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\beta\delta\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}\right)$$

等号成立仅当

$$\frac{a}{\sin\alpha_1}=\frac{b}{\sin\alpha_2}=\frac{c}{\sin\alpha_3}=\frac{d}{\sin\alpha_4} \tag{2}$$

顺便指出：在(t_1)中，如果四边形 $ABCD$ 退化为 $\triangle ABC$，则 $d=0,\delta=0$(且 $\alpha,\beta,\gamma>0$) 那么式(t_1)化为

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\geqslant4\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\Delta \tag{3}$$

这一结果虽然新奇，却比我们在前面建立的结果

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\geqslant4\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\Delta \tag{4}$$

要弱，这是因为

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\gamma+\alpha+\beta)\geqslant(\sqrt{\alpha\beta\gamma}+\sqrt{\alpha\beta\gamma}+\sqrt{\alpha\beta\gamma})^2=9\alpha\beta\gamma>\alpha\beta\gamma\Rightarrow$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

在式(t_1)中，如果设 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=4$，那么式$(t_1)$可以简化为

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\delta d^2\geqslant2\sqrt{\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\alpha\beta\delta}\cdot F \tag{t_5}$$

无独有偶，式(t_5)在此条件下有配对式

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\delta d^2\geqslant[16-3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)]F \tag{t_6}$$

如果将式(t_6)加强，即是四边形等同不等式的加权推广：

设凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的边长为 a_1,a_2,a_3,a_4，面积为 F_1，且正数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 满足

条件

$$S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 > 3\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$$
$$S^2 > 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)$$

则

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i \geqslant 2\sqrt{tF_1} \tag{t_7}$$

其中

$$t = S^2 - 3\sum \lambda_i^2$$

等号成立仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形,且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$.

证明 设 $x_i > 0(i = 1,2,3,4)$,且 $S_x = \sum x_i, \lambda = \sum \lambda_i$.并简记 $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4}^{4}$ 为 $\sum^{4}$,应用柯西不等式有

$$\left[\sum x_i a_i + \sqrt{2\sum^4 x_i x_j} \cdot \sqrt{2\sum^4 a_i a_j}\right]^2 \leqslant \left(\sum x_i^2 + 2\sum^4 x_i x_j\right)\left(\sum a_i^2 + 2\sum^4 a_i a_j\right) =$$

$$\left(\sum x_i\right)^2\left(\sum a_i\right)^2 \Rightarrow \left(\sum x_i\right)\left(\sum a_i\right) - \sum x_i a_i \geqslant 2\left[\left(\sum^4 x_i x_j\right)\left(\sum^4 a_i a_j\right)\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\sum (S_x - x_i) a_i \geqslant 2\left[\left(\sum^4 x_i x_j\right)\left(\sum^4 a_i a_j\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{⑤}$$

令 $S_x - x_i = 3\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$,则易推得 $x_i = \lambda - 3\lambda_i$,和

$$\sum^4 x_i x_j = \frac{3}{2}\left(S^2 - 3\sum \lambda_i^2\right) = \frac{3}{2}t \tag{⑥}$$

进一步可推得

$$\sum^4 a_i a_j \geqslant 6\Delta \tag{⑦}$$

⑤,⑥ 和 ⑦ 结合得

$$\sum \lambda_i a_i \geqslant 2\sqrt{t\Delta}$$

即(t_7)式成立.等号成立仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形,且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

如果 $\sum \lambda_i = 4$,应用柯西不等式有

$$\sum \lambda_i a_i^2 = \frac{1}{4}\left(\sum \lambda_i a_i^2\right)\left(\sum \lambda_i\right) \geqslant \frac{1}{4}\left(\sum \lambda_i a_i\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}(2\sqrt{t\Delta})^2 = t\Delta \Rightarrow \sum \lambda_i a_i^2 \geqslant t\Delta \tag{⑧}$$

式 ④ 与(t_6)式等价.

让我们设另一个四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的边长为 b_1, b_2, b_3, b_4,面积为 F_2,我们就会建立一个新的“婀娜苗条”的不等式

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \geqslant 4\sqrt{F_1F_2} \tag{t_8}$$

证明 记 $2S = \sum a_i, 2S' = \sum b_i$,有

$$\begin{aligned}\sum (S - a_i)(S' - b_i) &= \sum (SS' - S'a_i - Sb_i + a_ib_i) = 4SS' - S\sum b_i - S'\sum a_i + \sum a_ib_i = \\ &4SS' - 2SS' - 2S'S + \sum a_ib_i \Rightarrow \sum a_ib_i = \sum (S - a_i)(S' - b_i) \geqslant \\ &4\left[\prod (S - a_i)(S' - b_i)\right]^{\frac{1}{4}} = 4\left[\prod (S - a_i) \cdot \prod (S - b_i)\right]^{\frac{1}{4}} = \\ &4(F_1^2 \cdot F_2^2)^{1/4} \Rightarrow \sum a_ib_i \geqslant 4\sqrt{F_1F_2}\end{aligned}$$

等号成立仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 同为正方形.

最后,我们补充几个美妙的结论,作为本文的结尾,但限于篇幅,证明略去.

(1) 设 λ,μ,v 为正数,则

$$\lambda(ab+cd)+\mu(ac+bd)+v(ad+bc)\geqslant 2\sqrt{3(\lambda\mu+\mu v+v\lambda)}\Delta \qquad (v_1)$$

$$(\sum a)(abc+bcd+cda+dab)\geqslant 16F^2$$

$$\frac{(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}\geqslant F^2 \qquad (v_2)$$

$$(ab+cd)^x(ac+bd)^y(ad+bc)^z\geqslant 2F \qquad (v_3)$$

其中 $x,y,z>0$.且

$$x+y+z=\frac{1}{3}$$

$$4\sqrt{F^3}\leqslant abc+abd+acd+bcd\leqslant 2\sqrt{F}(F+2R^2) \qquad (v_4)$$

以上 a,b,c,d,F 分别是四边形 $ABCD$ 的边长和面积,式(v_4)是冷岗松老师建立的.

(2) 我国已故著名数学家陈景润,于20世纪在一本数学科普小册子上,向广大读者介绍了一道妙题:

$$4(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\geqslant 4\sqrt{3}F \qquad (v_5)$$

等号成立仅当 $\angle B=60°,\angle D=120°$.

上式又可以变形为

$$a^2+b^2+3(c^2+d^2)\geqslant 4\sqrt{3}F+2(a-b)^2+2(c-d)^2$$

(3) 后来,还是高灵老师将上式推广为:

设凸四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的四边长和面积分别为 a,b,c,d,F 及 a',b',c',d',F',则

$$K\equiv 4(ad+bc)(a'd'+b'c')-(a^2-b^2-c^2+d^2)\cdot(a'^2-b'^2-c'^2+d'^2)\geqslant 16F\cdot F' \qquad (v_6)$$

等号成立仅当 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 均内接于圆,且 $\angle B=\angle B'$.

两道几何竞赛题的新证法

武鹏程[①]

1.(1994年国际数学奥林匹克备选题)如图1,直线AB过半圆的圆心O,分别过A,B作圆O的切线,切圆O于D,C.AC与BD交于E.自E作AB的垂线,垂足为F,求证:EF平分$\angle CFD$.

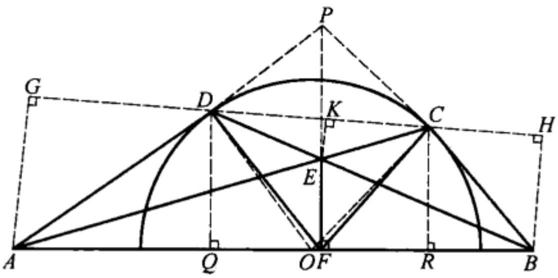


图1

证明 自D,C作AB之垂线,垂足为Q,R,联结CD,自A,E,B作CD的垂线,垂足为G,K,H.联结OC,OD,延长AD,BC交于P.

$$\frac{QF}{QB}=\frac{DE}{BD}=\frac{EK}{BH} \quad ①$$

$$\frac{RF}{RA}=\frac{CE}{AC}=\frac{EK}{AG} \quad ②$$

① ÷ ② 得

$$\frac{QF}{RF}=\frac{AG}{BH}\cdot\frac{QB}{RA}$$

因为
$$\angle GDA=\angle PDC=\angle PCD=\angle HCB$$
$$\angle H=\angle G=90^\circ$$

所以
$$\triangle ADG\backsim\triangle BCH$$

所以
$$\frac{AG}{BH}=\frac{AD}{BC}$$

所以
$$\frac{QF}{RF}=\frac{AD}{BC}\cdot\frac{QB}{RA}$$

① 武汉市第23高级中学。

因为
$$OC^2 = OR \cdot OB$$
$$OD^2 = OQ \cdot OA$$
$$OC = OD$$
所以
$$OR \cdot OB = OQ \cdot OA$$
所以
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OQ}{OR} = \frac{OB + OQ}{OA + OR} = \frac{BQ}{AR}$$
所以
$$\frac{QF}{RF} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{OB}{OA} = \frac{AD}{OA} \cdot \frac{OB}{BC} = \frac{DQ}{OD} \cdot \frac{OC}{RC} = \frac{DQ}{RC}$$
因为
$$\angle DQF = \angle CRF = 90°$$
所以
$$\triangle DQF \backsim \triangle CRF$$
所以
$$\angle DFQ = \angle CFR$$
所以
$$\angle DFE = \angle CFE$$
所以 EF 平分 $\angle CFD$.

此外,张景中院士在其名著《数学杂谈》中用娴熟的基于面积方法的消点法给出本题一种精彩证明,敬录于此,以利妙文共赏(略有改动).

证明 如图 2,设圆 O 半径为 R

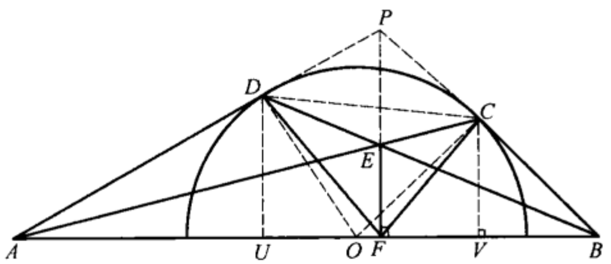


图 2

$$\angle COB = \alpha, \angle AOD = \beta$$
则
$$DU = R\sin\beta, CV = R\sin\alpha$$
$$\frac{VF}{AV} = \frac{CE}{AC} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ACD}}$$
$$\frac{UF}{BU} = \frac{DE}{DB} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle BCD}}$$
于是得到
$$\frac{DU}{CV} \cdot \frac{VF}{UF} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} \cdot \frac{AV}{BU}$$
$$AV = AO + OV = \frac{R}{\cos\beta} + R\cos\alpha = \frac{R(1 + \cos\alpha\cos\beta)}{\cos\beta}$$
$$BU = BO + OU = \frac{R}{\cos\alpha} + R\cos\beta = \frac{R(1 + \cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha}$$
所以
$$\frac{DU}{CV} \cdot \frac{VF}{UF} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} \cdot \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}}$$

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BC\cdot DC}{AD\cdot DC}(\angle PDC=\angle PCD,\angle ADC=\angle BCD)=\frac{BC}{AD}=$$

$$\frac{R\tan\alpha}{R\tan\beta}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

于是
$$\frac{DU}{CV}=\frac{UF}{VF}$$
所以
$$\triangle DUF\backsim\triangle CVF$$

这就证明了结论.

2.(第42届国际数学奥林匹克试题)如图3,在$\triangle ABC$中,AP平分$\angle BAC$交BC于P,BQ平分$\angle ABC$交CA于Q,$\angle BAC=60°$且$AB+BP=AQ+BQ$.问$\triangle ABC$的各角的度数的可能值是多少?

解 设$BC=a,CA=b,AB=c$,易得

$$BP=\frac{ac}{b+c}$$

$$AQ=\frac{bc}{a+c}$$

$$BQ=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]}}{a+c}$$

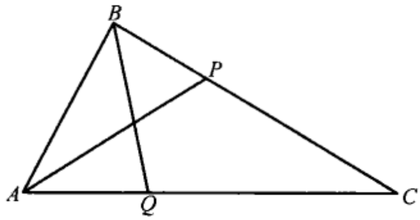


图3

代入已知条件得

$$c+\frac{ac}{b+c}=\frac{bc}{a+c}+\frac{\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]}}{a+c}$$

设
$$(a+c)^2-b^2=t$$
有
$$ct^2-a(b^2+c^2)t+a^2b^2c=0$$
$$(t-ac)(ct-ab^2)=0$$
$$(a+c)[b^2-c(a+c)][b^2-(a^2+ac+c^2)]=0$$

所以

$$b^2=c(a+c) \quad ①$$

或

$$b^2=a^2+ac+c^2 \quad ②$$

若①成立,如图4所示,延长AB至D使$BD=BC=a$,则由①

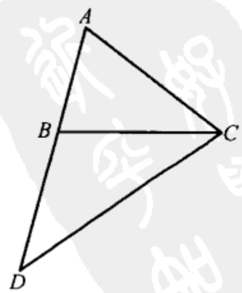


图4

$$\frac{b}{a+c}=\frac{c}{b}$$

即
$$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$$
$$\angle BAC=\angle CAD$$
所以
$$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$$
所以
$$\angle ACB=\angle ADC=\angle BCD$$
所以
$$\angle ABC=2\angle ADC=2\angle ACB$$

因为 $\angle BAC = 60°$,所以 $\angle ABC = 80°$,$\angle ACB = 40°$.

若 ② 成立,则由余弦定理易知

$$\cos\angle ABC = -\frac{1}{2}$$

所以 $\angle ABC = 120°$,所以 $\angle BAC = 60°$,这与三角形内角和为 180°,矛盾,故 $\triangle ABC$ 三内角的所有可能值为 40°,60°,80°.

可以看出,我们在得出 ①、② 时并没有用到 $\angle A = 60°$ 这一条件,因此我们有一般的结论:

在 $\triangle ABC$ 中,AP,BQ 分别是 $\angle BAC$,$\angle ABC$ 的平分线,且有 $AP + BP = AQ + BQ$.

(1) 若 $0 < \angle A < 60°$,则 $\angle B = 120°$ 或 $\angle B = 2\angle C$.

(2) 若 $\angle A \geqslant 60°$,则 $\angle B = 2\angle C$.

当 $\angle B = 120°$ 时,用纯几何法证明 $AP + BP = AQ + BQ$ 是一个不错的平面几何练习题.

最后指出,刘培杰老师在其主编的一本大部头《历届 IMO 试题集》中给出了本问题的 6 种解法,但不包括本文提出的解法.

我们之所以称这里提出的解答为新的,乃因笔者在目前书店中能见到的竞赛类出版物中尚未发现上述证法及解答,或许是笔者孤陋寡闻吧,一点心得,希望不致贻笑大方.

一道第 45 届 IMO 预选题的赏析

邓寿才

1

第 45 届 IMO 有一道奇特的预选题是：

题目　设 $a,b,c>0$，且 $bc+ca+ab=1$，证明：

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leqslant\frac{1}{abc} \tag{A}$$

在有些数奥资料上，可找到与本题已知条件相同的题目，但本题要求证明的结论式(A)却有其独特之处. 从式(A)左边观察，充分应用已知条件，并巧妙结合幂平均不等式，也许可行，于是，便产生了

证法 1　由已知有 $a,b,c>0$，且

$$1=bc+ca+ab\geqslant 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}\Rightarrow\frac{1}{abc}\geqslant 3\sqrt{3} \tag{①}$$

又

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)\Rightarrow$$

$$(bc+ca+ab)^2\geqslant 3abc(a+b+c)\Rightarrow\frac{1}{3abc}\geqslant a+b+c \tag{②}$$

记式(A)左边为 P，应用幂平均不等式有

$$\begin{aligned}(\frac{P}{3})^3&=[\frac{\sum(\frac{1}{a}+6b)^{\frac{1}{3}}}{3}]^3\leqslant\frac{\sum(\frac{1}{a}+6b)}{3}=\\&\frac{1}{3}\sum\frac{1}{a}+2\sum b=\frac{\sum bc}{3abc}+2\sum a=\\&\frac{1}{3abc}+2\sum a\leqslant\frac{1}{3abc}+\frac{2}{3abc}=\\&\frac{1}{abc}=\frac{(abc)^2}{(abc)^3}\leqslant\frac{1}{(3\sqrt{3})^2}\cdot\frac{1}{(abc)^3}=\frac{1}{(3abc)^3}\Rightarrow\\&\frac{P}{3}\leqslant\frac{1}{3abc}\Rightarrow P\leqslant\frac{1}{abc}\end{aligned}$$

即式(A)成立，等号成立仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

本题也可以巧用平均值不等式进行证明.

证法 2 应用前面的 ①,② 两式和平均值不等式有

$$(\sqrt[3]{3\sqrt{3}})\cdot(\sqrt[3]{3\sqrt{3}})\cdot(\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b})\leqslant\frac{1}{3}[3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+(\frac{1}{a}+6b)]\Rightarrow$$

$$\text{同理}\left.\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}+6b}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2}{3}b+\dfrac{1}{9a}\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{b}+6c}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2}{3}c+\dfrac{1}{9b}\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{c}+6a}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{9c}\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$P\leqslant\sum(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}b+\frac{1}{9a})=2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sum a+\frac{1}{9}\sum\frac{1}{a}\leqslant$$

$$\frac{2}{3abc}+\frac{2}{9abc}+\frac{1}{9abc}\Rightarrow P\leqslant\frac{1}{abc}$$

等号成立仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证法 3 将式(A) 两边同乘以 $9\sqrt[3]{abc}$,巧妙变形为

$$\sum 3\cdot\sqrt[3]{3\times 9bc(1+6ab)}\leqslant\frac{9}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \qquad ③$$

记式 ③ 左边为 P',应用平均值不等式有

$$P'\leqslant\sum[3+9bc+(1+6ab)]=12+9\sum bc+6\sum ab=$$
$$12+9+6=27\Rightarrow P'\leqslant 27 \qquad ④$$

而由证法 1 中的式 ① 有

$$3\sqrt{3}\leqslant\frac{1}{abc}\Rightarrow 27\leqslant\frac{9}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\Rightarrow P'\leqslant\frac{9}{\sqrt[3]{(abc)^2}}$$

这表明式 ③ 成立,从而式(A) 成立,等号成立仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

和有些美妙不等式一样,式(A) 也可以完善成一个双向不等式:

完善 设正数 a,b,c 满足 $bc+ca+ab=1$,则有

$$27abc\leqslant P\leqslant 1/(abc) \qquad (B)$$

从外观结构上看,式(B) 既简洁又美观,恰似一只展翅高飞的雄鹰.

证明 记 $t_0=\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{t}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,应用赫尔特不等式有

$$\frac{1}{3}P=\frac{1}{3}\sum\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}\geqslant[(\frac{1}{a}+6b)(\frac{1}{b}+6c)(\frac{1}{c}+6a)]^{\frac{1}{9}}\geqslant$$
$$(\frac{1}{t_0}+6t_0)^{\frac{1}{3}}=(\frac{1}{t_0}+3t_0+3t_0)^{\frac{1}{3}}\geqslant[3(\frac{1}{t_0}\cdot 3t_0\cdot 3t_0)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{3}}=$$

$$3^{\frac{5}{9}} \cdot t_0^{\frac{1}{9}} = 3^{\frac{5}{9}} \cdot t^{\frac{1}{27}} = 3^{\frac{5}{9}} \cdot \frac{t}{t^{\frac{26}{27}}} \geqslant$$

$$3^{\frac{5}{9}} t/(3^{-\frac{13}{9}}) = 9t \Rightarrow P \geqslant 27t = 27abc$$

即式(B)成立,仅当 $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时式(B)左、右两边均取等号.

2

本题的已知条件是 $a,b,c > 0$ 及 $bc + ca + ab = 1$,联想到任意 $\triangle ABC$ 中有众所周知的恒等式

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$$

因此,本题暗示我们,可将它"脱胎换骨"演化成:

对于任意 $\triangle ABC$ 有

$$27\prod\tan\frac{A}{2} \leqslant \sum\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2} + 6\tan\frac{B}{2}} \leqslant \prod\cot\frac{A}{2} \tag{C}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

至今,我们已经习惯了不放过一道好题,从多方位、多角度去欣赏它,探讨它.那么,对于式(A),我们怎样去赏析它呢?首先,我们从系数、指数、参数三个方面去推广它.

推广 1 设指数 $0 < k < 1$,参数 $m > 0$,系数 $\lambda,\mu,v > 0$,元数 $a,b,c > 0$ 满足 $\lambda bc + \mu ca + vab = 1$,则有

$$P_\lambda \equiv \lambda(\frac{1}{a} + mvb)^k + \mu(\frac{1}{b} + m\lambda c)^k + v(\frac{1}{c} + m\mu a)^k \leqslant \frac{M}{abc} \tag{D}$$

其中

$$M = (\frac{m+3}{3})^k(\frac{\lambda+\mu+v}{\sqrt{27\lambda\mu v}})^{1-k} \tag{①}$$

特别地,当 $m = 6, k = \frac{1}{3}, \lambda = \mu = v = 1$ 时

$$M = (\frac{6+3}{3})^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{3}{\sqrt{27}})^{1-\frac{1}{3}} = 1$$

此时式(D)化为式(A).

仅从外观看,式(D)似乎庞大复杂,颇具难度,其实,重在技巧,妙在奇趣.

证明 记 $t = abc, \theta = \sqrt[3]{\lambda\mu v}$.

$$1 = \lambda bc + \mu ca + vab \geqslant 3(\prod\lambda bc)^{\frac{1}{3}} =$$

$$3[\lambda\mu v(abc)^2]^{\frac{1}{3}} = 3(\theta^3 t^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow t \leqslant (3\theta)^{-\frac{3}{2}} \tag{②}$$

应用 3 元对称不等式有

$$l^2 = (\sum\lambda bc)^2 \geqslant 3\sum(\mu ca \cdot vab) =$$

$$3abc\sum\mu va = 3t\sum\mu va \Rightarrow \sum\mu va \leqslant \frac{1}{3t} \quad ③$$

应用式 ②③ 和加权幂平均不等式有

$$(\frac{P_\lambda}{\sum\lambda})^{\frac{1}{k}} = [\frac{\sum\lambda(\frac{1}{a}+mvb)^k}{\sum\lambda}]^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{\sum\lambda(\frac{1}{a}+mvb)}{\sum\lambda} = \frac{\sum\frac{\lambda}{a}+m\sum v\lambda b}{\sum\lambda} =$$

$$(\frac{1}{t}+m\sum\mu va)/(\sum\lambda) \leqslant (\frac{1}{t}+\frac{m}{3t})/(\sum\lambda) = \frac{m+3}{3t\sum\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{P_\lambda}{\sum\lambda} \leqslant (\frac{m+3}{3t\sum\lambda})^k \Rightarrow P_\lambda \leqslant (\frac{m+3}{3})^k \cdot (\sum\lambda)^{1-k} \cdot \frac{t^{1-k}}{t} \leqslant$$

$$(\frac{m+3}{3})^k \cdot (\sum\lambda)^{1-k} \cdot [(3\theta)^{-\frac{3}{2}}]^{l-k}/t =$$

$$(\frac{m+3}{3})^k \cdot (\sum\lambda)^{1-k} \cdot (\sqrt{27\lambda\mu v})^{-(l-k)}/t \Rightarrow$$

$$P_\lambda \leqslant \frac{M}{t}$$

等号成立仅当 $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}, \lambda = \mu = v$(与 m, k 无关).

相应地,前面的完善式(B) 可以完善成推广式:

推广 2 设 $0 < k < 1, m, \lambda, \mu, v > 0, a, b, c > 0$,且满足 $\lambda bc + \mu ca + vab = 1$,则有

$$Nabc \leqslant P_\lambda \leqslant M/(abc) \quad (E)$$

其中

$$N = (\frac{m+3}{3})^k(3\sqrt[3]{\lambda\mu v})^{\frac{k+5}{2}} \quad ④$$

特别地,当取 $m = 6, \lambda = \mu = v = 1$ 时

$$N = 3^k \cdot 3^{\frac{1}{2}(k+5)} = 3^{\frac{1}{2}(3k+5)}$$

再取 $k = \frac{1}{3}$ 得到 $N = 3^3 = 27$,这样式(E) 化为式(B).

证明 仍然记 $t_0 = \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}, \theta = \sqrt[3]{\lambda\mu v}$,并注意应用前面的式 ②③ 和平均值不等式有

$$P_\lambda = \sum\lambda(\frac{1}{a}+mvb)^k \geqslant 3\theta\prod(\frac{1}{a}+mvb)^{\frac{k}{3}} \Rightarrow$$

$$(\frac{P_\lambda}{3\theta})^{\frac{1}{k}} \geqslant \prod(\frac{1}{a}+mvb)^{\frac{1}{3}}(\text{应用赫尔特不等式}) \geqslant \frac{1}{t_0}+m\theta t_0 \Rightarrow$$

$$3t_0(\frac{P_\lambda}{3\theta})^{\frac{1}{k}} \geqslant 3\times 1+m\cdot(3\theta t_0)(\text{应用加权不等式}) \geqslant$$

$$(m+3)[1^3\times(3\theta t_0)^m]^{\frac{1}{m+3}} \Rightarrow$$

$$P_\lambda \geqslant T\cdot t\cdot t^{-(1-e)} \quad ⑤$$

其中

$$T = (\frac{m+3}{3})^k \cdot (3\theta)^{(1+\frac{mk}{m+3})} \qquad ⑥$$

$$o < e = \frac{k(m-3)}{3(m+3)} < 1 \qquad ⑦$$

于是由

$$t \leqslant (3\theta)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow P_\lambda \geqslant (\frac{m+3}{3})^k \cdot (3\theta)^x \cdot (abc) \qquad ⑧$$

其中

$$x = \frac{3}{2}(1-e) + (1+\frac{mk}{m+3}) = \frac{5}{2} + \frac{mk}{m+3} - \frac{3}{2}e = \frac{5}{2} + \frac{mk}{m+3} - \frac{k}{2}(\frac{m-3}{m+3}) = \frac{5}{2} + \frac{k}{2}$$

代入式 ⑧ 得

$$P_\lambda \geqslant (\frac{m+3}{3})^k (3\theta)^{\frac{k+5}{2}} (abc) = N(abc) \qquad ⑨$$

即式(E) 成立.

式(A) 是关于一组正数(a,b,c) 的一个根式和不等式,如果巧妙灵活地应用赫尔特不等式就能奇迹般地将式(D) 推广为:

推广 3 设$0 < k < 1, m, \lambda, \mu, v > 0$,正数 a_i, b_i, c_i 满足$\lambda b_ic_i + \mu c_ia_i + va_ib_i = 1$, $\alpha_i \in (0,1)(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$,则有

$$\lambda[\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i} + mvb_i)^{\alpha_i}]^k + \mu[\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{b_i} + m\lambda c_i)^{\alpha_i}]^k + v[\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{c_i} + m\mu a_i)^{\alpha_i}]^k \leqslant \frac{M}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_ib_ic_i)^{\alpha_i}} \qquad (F)$$

其中

$$M = (\frac{m+3}{3})^k \cdot (\frac{\lambda+\mu+v}{\sqrt{27\lambda\mu v}})^{1-k}$$

显然,当 $n = 1$ 或$(a_i, b_i, c_i) = (a, b, c)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时,式(F) 均化为式(D).

提示 记式(F) 左边为 T_n,则

$$T_n = \sum\lambda[\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i} + mvb_i)^{\alpha_i}]^k = \sum\prod_{i=1}^{n}[\lambda(\frac{1}{a_i} + mvb_i)^k]^{\alpha_i}(\text{因 } \lambda = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} = \prod_{i=1}^{n}\lambda^{\alpha_i}) \leqslant$$

$$\prod_{i=1}^{n}[\sum\lambda(\frac{1}{a_i} + mvb_i)^k]^{\alpha_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n}(\frac{M}{a_ib_ic_i})^{\alpha_i} = \frac{M^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_ib_ic_i)^{\alpha_i}}$$

即式(F) 成立.

3

式(A) 是关于 3 个基本正元数 a, b, c 的不等式,现在是将它推广到多个基本正元素

的时候了.

推广4 设 $m>0, 3\leqslant n\in\mathbf{N}, 0<k\leqslant\frac{1}{n-2}, a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$ 满足

$$a_2a_3\cdots a_n+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_n=1 \tag{①}$$

则有

$$P_n\equiv\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}+ma_{i+1}\right)^k\leqslant\frac{Q_n^{(k)}}{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i} \tag{G}$$

其中

$$Q_n^{(k)}=(m+n^{\frac{2}{n-1}})^k n^{-(\frac{k+1}{n-1})} \tag{②}$$

当取 $k=\frac{1}{n}$ 时

$$Q_n^{(\frac{1}{n})}=\left(\frac{m+n^{\frac{2}{n-1}}}{n^{\frac{n+1}{n-1}}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{③}$$

若要

$$Q_n^{(\frac{1}{n})}=1\Rightarrow m=n^{\frac{n+1}{n-1}}-n^{\frac{2}{n-1}}=(n-1)n^{\frac{2}{n-1}} \tag{④}$$

当 $n=3$ 时，$m=(3-1)\times3=6$，此时式(G)为式(A).

特别地，当 $n\to+\infty$ 时

$$\lim_{n\to+\infty}m=\lim_{n\to+\infty}(n-1)n^{\frac{2}{n-2}}=n-1$$

因此，当 $n\to+\infty$ 时，式(G)有推论

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\frac{1}{a_i}+(n-1)a_{i+1}}\leqslant\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n} \tag{H}$$

证明 简记 $\sum\limits_{i=1}^{n}$ 为 $\sum$，$\prod\limits_{i=1}^{n}$ 为 $\prod$，$t=\prod a_i$，那么已知条件化为

$$\frac{1}{t}=\sum\frac{1}{a_i}\geqslant n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{t}}\right)\Rightarrow t\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{⑤}$$

设 $x_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，由 n 元对称不等式有

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(\sum\frac{1}{x_i})(\prod x_i)}{n}\leqslant\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^{n-1}\\ \text{令 } x_i=1/a_i(1\leqslant i\leqslant n)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\sum a_i}{nt}\leqslant\left(\frac{\sum\frac{1}{a_i}}{n}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{nt}\right)^{n-1}\Rightarrow$$

$$\sum a_i\leqslant(nt)^{-(n-2)} \tag{⑥}$$

注意到

$$0<k\leqslant\frac{1}{n-2}\Rightarrow\begin{cases}0<k\leqslant1\\1-k(n-2)\geqslant0\end{cases} \tag{⑦}$$

应用幂平均不等式有

$$\left(\frac{P_n}{n}\right)^{\frac{1}{k}}=\left[\frac{\sum\left(\frac{1}{a_i}+m\cdot a_{i+1}\right)^k}{n}\right]^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n}\sum\left(\frac{1}{a_i}+ma_{i+1}\right)=$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum\frac{1}{a_i}+m\sum a_{i+1}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}+m\sum a_i\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{t}+\frac{m}{(nt)^{n-2}}\right]=\frac{n^{n-2}t^{n-3}+m}{n^{n-1}\cdot t^{n-2}}\leqslant$$

$$\frac{n^{n-2}\cdot n^{-\frac{n(n-3)}{n-1}}+m}{n^{n-1}t^{n-2}}=\frac{m+n^{\frac{2}{n-2}}}{n^{n-1}t^{n-2}}\Rightarrow$$

$$P_n\leqslant n\left(\frac{m+n^{n-1}}{n^{n-1}t^{n-2}}\right)^k=$$

$$n\left(\frac{m+n^{\frac{2}{n-1}}}{n^{n-1}}\right)^k\cdot\frac{t^{1-k(n-2)}}{t}\leqslant$$

$$\frac{n}{t}\left(\frac{m+n^{\frac{2}{n-1}}}{n^{n-1}}\right)^k\cdot\left(n^{-\frac{n}{n-1}}\right)^{1-k(n-2)}\Rightarrow$$

$$P_n\leqslant\frac{Q_n^{(k)}}{t}$$

即式(G)成立，等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

有趣的是，如果我们记

$$M_n^{(k)}=\left(m+n^{\frac{2}{n-1}}\right)^k\cdot n^{\left(\frac{2n-k-1}{n-1}\right)}\tag{8}$$

那么式(G)可以完善成

$$M_n^{(k)}t\leqslant P_n\leqslant\frac{Q_n^{(k)}}{t}\tag{I}$$

其中 $t=\prod_{i=1}^{n}a_i$.

特别地，当取 $k=\frac{1}{n}$ 时

$$M_n^{(\frac{1}{n})}=\left[n^{2n+1}\left(m+n^{\frac{2}{n-1}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\tag{9}$$

再取 $m=6,n=3$ 有

$$M_3^{(\frac{1}{3})}=\left[3^7(6+3)\right]^{\frac{1}{3}}=3^3=27$$

此时式(I)退化为式(B).

可见，式(I)也美妙新奇，但我们能证明它吗？

提示　记 $t_0=\sqrt[n]{t}=\left(\prod a_i\right)^{\frac{1}{n}},S=m+n^{\frac{2}{n-1}}$.

$$P_n=\sum\left(\frac{1}{a_i}+ma_i\right)^k\geqslant n\prod\left(\frac{1}{a_i}+ma_{i+1}\right)^{\frac{k}{n}}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{P_n}{n}\right)^{\frac{1}{k}}\geqslant\prod\left(\frac{1}{a_i}+ma_{i+1}\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{1}{t_0}+mt_0=$$

$$\frac{n^{\frac{2}{n-1}}}{(t_0 n^{\frac{2}{n-1}})} + mt_0 \geqslant S[t_0^m \cdot (\frac{1}{t_0 n^{\frac{2}{n-1}}})^{\sqrt[n-1]{n^2}}]^{\frac{1}{S}} \Rightarrow$$

$$P_n \geqslant R_n^{(k)} t^{\beta} \tag{10}$$

其中

$$\alpha = \frac{2(\sqrt[n-1]{n^2}}{(n-1)S}, R_n^{(k)} = n(Sn^{\alpha})^k \tag{11}$$

$$S = m + \sqrt[n-1]{n^2}, \beta = \frac{k}{nS}(m - \sqrt[n-1]{n^2}) < 1$$

于是有 $P_n \geqslant R_n^{(k)} t^{-(1-\beta)} \cdot t \geqslant R_n^{(k)} \cdot n^{\frac{n(1-\beta)}{n-1}} \cdot t \Rightarrow P_n \geqslant M_n^{(k)} t$

这即为式(I),仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 时,式(I) 左右两边等号均成立.

4

谁都想在漫长的进化历史中进化得更强更好,自然地,式(G) 也想更美更妙,期待我们为它锦上添花,为此,我们从系数方面去推广它.

推广 5 设 $0 < k \leqslant \frac{1}{n-2}, 3 \leqslant n \in \mathbf{N}, \lambda_i > 0, a_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n), m > 0$,且

$$\lambda_1 a_2 a_3 \cdots a_n + \lambda_2 a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + \lambda_n a_1 a_2 \cdots a_n = 1 \tag{1}$$

则有

$$P_{\lambda} \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\frac{1}{a_i} + \frac{m\lambda}{\lambda_i \lambda_{i+1}} a_{i+1})^k \leqslant M_{\lambda} / (\prod_{i=1}^{n} a_i) \tag{J}$$

其中

$$M_{\lambda} = [1 + m(\frac{\lambda^{n-3}}{n^2})^{\frac{1}{n-1}}]^k (\frac{S}{\sqrt[n-1]{\lambda n^n}})^{1-k} \tag{2}$$

$$\lambda = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3}$$

令人欣喜的是,由于式(A)"身经百战","出生入死",终于至今"连升四级"(指数、系数、参数、元数) 成为大将,自然受到了我们的考验:

(1) 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ 时,$\lambda = 1, S = n$,这时

$$M_{\lambda} = [1 + m \cdot n^{-(\frac{2}{n-1})}]^k \cdot (\frac{n}{\sqrt[n-1]{n^n}})^{1-k} = (m + n^{\frac{2}{n-1}})^k \cdot n^{-(\frac{k+1}{n-1})}$$

这正好等于推广 4 中的 $Q_n^{(k)}$.

(2) 当 $n = 3$ 时

$$M_{\lambda} = (1 + \frac{m}{3})^k (\frac{S}{\sqrt{27\lambda}})^{1-k} = (\frac{m+3}{3})^k (\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\sqrt{27\lambda_1\lambda_2\lambda_3}})^{1-k}$$

这又恰好等价于推广 1 中的 M,此时式(J) 与式(D) 等价.

如此美妙的式(J),如此漂亮的外观,如此庞大的形状,我们能证明它吗?当然能,妙

在技巧,美在春天.

证明 简记$\sum_{i=1}^{n}$为$\sum$,$\prod_{i=1}^{n}$为$\prod$,$t=\prod a_i$,由已知有

$$\frac{1}{t}=\prod\frac{1}{a_i}=\sum\frac{\lambda_i}{a_i}\geqslant n(\prod\frac{\lambda_i}{a_i})^{\frac{1}{n}}=n(\frac{\lambda}{t})^{\frac{1}{n}}\Rightarrow$$

$$nt\leqslant(n\lambda)^{-(\frac{1}{n-1})} \quad ④$$

由 n 元对称不等式有

$$\frac{(\sum\frac{a_i}{\lambda_i})\prod(\frac{\lambda_i}{a_i})}{n}\leqslant\left(\frac{\sum\frac{\lambda_i}{a_i}}{n}\right)^{n-1}\Rightarrow\frac{\lambda(\sum\frac{a_i}{\lambda_i})}{nt}\leqslant(\frac{1}{nt})^{n-1}\Rightarrow$$

$$\lambda(\sum\frac{a_i}{\lambda_i})\leqslant(nt)^{-(n-2)} \quad ⑤$$

于是

$$(\frac{P_\lambda}{S})^{\frac{1}{k}}=[\frac{1}{S}\sum\lambda_i(\frac{1}{a_i}+\frac{m\lambda}{\lambda_i\lambda_{i+1}}a_{i+1})^k]^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{S}\sum\lambda_i(\frac{1}{a_i}+\frac{m\lambda}{\lambda_i\lambda_{i+1}}a_{i+1})=$$

$$\frac{1}{S}\sum(\frac{\lambda_i}{a_i}+m\lambda\cdot\frac{a_{i+1}}{\lambda_{i+1}})=\frac{1}{S}(\frac{1}{t}+m\lambda\sum\frac{a_i}{\lambda_i})\Rightarrow$$

$$S(\frac{P_\lambda}{S})^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{t}+\frac{m}{(nt)^{n-2}}=\frac{n^{n-2}t^{n-3}+m}{(nt)^{n-2}}=\frac{n(nt)^{n-3}+m}{(nt)^{n-2}}\leqslant$$

$$\frac{n(n\lambda)^{-(\frac{n-3}{n-1})}+m}{(nt)^{n-2}}\Rightarrow\frac{P_\lambda}{S}\leqslant[\frac{n(n\lambda)^{-(\frac{n-3}{n-1})}+m}{S(nt)^{n-2}}]^k=$$

$$[\frac{n(n\lambda)^{-(\frac{n-3}{n-1})}+m}{S}]^k\cdot\frac{(nt)^{1-k(n-2)}}{nt}\leqslant$$

$$\left[\frac{(\frac{n^2}{\lambda^{n-3}})^{\frac{1}{n-1}}+m}{S}\right]^k\cdot\frac{(n\lambda)^{-[\frac{1-k(n-2)}{n-1}]}}{nt}\Rightarrow$$

$$P_\lambda\leqslant M_\lambda/t$$

即式(J)成立.

"不想当元帅的士兵不是好士兵"(拿破仑语),也许式(A)就是如此,它还想再"官升一级"做"元帅":

推广 6 设$0<k\leqslant\frac{1}{n-2}$,$3\leqslant n\in\mathbf{N}$,$1\leqslant q\in\mathbf{N}$,$m>0$,$\lambda_i>0$,$a_{i,j}>0(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant q)$,记$S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$,$\lambda=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$,且满足$\theta_j\in(0,1)\sum_{j=1}^{q}\theta_j=1$及

$$\lambda_1a_{2,j}a_{3,j}\cdots a_{n,j}+\lambda_2a_{1,j}a_{3,j}\cdots a_{n,j}+\cdots+\lambda_na_{1,j}a_{2,j}\cdots a_{n-1,j}=1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{q}(\frac{1}{a_{i,j}}+\frac{m\lambda}{\lambda_i\lambda_{i+1}}a_{i+1,j})^{k\theta_j}\leqslant M_\lambda/[\prod_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{q}a_{i,j})^{\theta_j}] \quad (K)$$

5

对于数学问题的探讨,从来都是永无终点的射线,就以本题为例,我们就可再建立推广2的配成形式:

推广7 设 a,b,c,λ,μ,v 均为正数,且满足 $(\mu+v)bc+(v+\lambda)ca+(\lambda+\mu)\cdot ab=2$,指数 $0<k<1$,参数 $m>0$,记

$$P_\lambda=(\frac{\mu+v}{a}+mb)^k+(\frac{v+\lambda}{b}+mc)^k+(\frac{\lambda+\mu}{c}+ma)^k$$

则有

$$N_\lambda abc\leqslant P_\lambda\leqslant\frac{M_\lambda}{abc} \tag{L}$$

其中

$$\delta=\mu v+v\lambda+\lambda\mu \tag{①}$$

$$\beta=\sqrt[3]{(\mu+v)(v+\lambda)(\lambda+\mu)} \tag{②}$$

$$M_\lambda=(m+2\delta)^k\cdot(\frac{3^{1-k}}{\delta^{3+k}})^{\frac{1}{4}} \tag{③}$$

$$N_\lambda=3(3\delta)^{\frac{3}{4}}(\beta\sqrt[4]{3\delta}+\frac{m}{\sqrt[4]{3\delta}})^k \tag{④}$$

证明 (1) 首先从已知记 $t=abc$ 有

$$2=\sum(\mu+v)bc\Rightarrow\sum\frac{\mu+v}{a}=\frac{2}{abc}=\frac{2}{t} \tag{⑤}$$

应用杨克昌不等式有

$$\begin{aligned}\sum(\mu+v)bc=2\Rightarrow 2^2=[\sum(\mu+v)bc]^2\geqslant\\ 4(\sum\mu v)(\sum bc\cdot ca)=\\ 4\delta abc\sum c=4\delta t\sum a\Rightarrow\\ \sum a=a+b+c\leqslant\frac{1}{\delta t}\end{aligned} \tag{⑥}$$

而且由

$$1\geqslant\delta t\sum a\geqslant 3\delta t(abc)^{\frac{1}{3}}=3\delta t\cdot t^{\frac{1}{3}}=3\delta t^{\frac{4}{3}}\Rightarrow t\leqslant(3\delta)^{-\frac{3}{4}} \tag{⑦}$$

于是,由幂平均不等式有

$$\begin{aligned}(\frac{P_\lambda}{3})^{\frac{1}{k}}=[\frac{1}{3}\sum(\frac{\mu+v}{a}+mb)^k]^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{3}\sum(\frac{\mu+v}{a}+mb)=\\ \frac{1}{3}(\sum\frac{\mu+v}{a}+m\sum b)=\frac{1}{3}(\frac{2}{t}+m\sum a)\leqslant\\ \frac{1}{3}(\frac{2}{t}+\frac{m}{\delta t})=(\frac{m+2\delta}{3\delta})\cdot\frac{1}{t}\Rightarrow\\ \frac{P_\lambda}{3}\leqslant(\frac{m+2\delta}{3\delta})^k\cdot\frac{1}{t^k}=\end{aligned}$$

$$(\frac{m+2\delta}{3\delta})^k \cdot \frac{t^{1-k}}{t} \leqslant$$
$$(\frac{m+2\delta}{3\delta})^k \cdot \frac{(3\delta)^{-\frac{3}{4}(1-k)}}{t} \Rightarrow$$
$$P_\lambda \leqslant \frac{M_\lambda}{t} = \frac{M_\lambda}{abc} \qquad ⑧$$

那式(L) 右边成立.

(2) 应用平均值不等式有

$$(\frac{P_\lambda}{3})^{\frac{1}{k}} = [\frac{1}{3}\sum(\frac{\mu+v}{a}+mb)^k]^{\frac{1}{k}} \geqslant [\prod(\frac{\mu+v}{a}+mb)^{k/3}]^{\frac{1}{k}} =$$
$$\prod(\frac{\mu+v}{a}+mb)^{\frac{1}{3}}(\text{应用赫尔特不等式}) \geqslant$$
$$(\prod\frac{\mu+v}{a})^{\frac{1}{3}} + (\prod mb)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{\prod(\mu+v)}}{\sqrt[3]{abc}} + m\sqrt[3]{abc} =$$
$$\frac{\beta}{\sqrt[3]{t}} + m\sqrt[3]{t} = [\beta t^{-(\frac{1}{k}+\frac{1}{3})} + mt^{-(\frac{1}{k}-\frac{1}{3})}]t^{\frac{1}{k}} \geqslant$$
$$(\text{注意 } 0 < k < 1 \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{3} > \frac{2}{3} > 0)$$
$$[\beta(3\delta)^{\frac{3}{4}(\frac{1}{k}+\frac{1}{3})} + m(3\delta)^{\frac{3}{4}(\frac{1}{k}-\frac{1}{3})}]t^{\frac{1}{k}} =$$
$$[\beta(3\delta)^{\frac{1}{4}} + m(3\delta)^{-\frac{1}{4}}][(3\delta)^{\frac{3}{4}}t]^{\frac{1}{k}} \Rightarrow$$
$$P_\lambda \geqslant 3[\beta(3\delta)^{\frac{1}{4}} + m(3\delta)^{-\frac{1}{4}}]^k(3\delta)^{\frac{3}{4}}t =$$
$$N_\lambda t = N_\lambda abc \Rightarrow P_\lambda \geqslant N_\lambda abc \qquad ⑨$$

即式(L) 左边成立.

综合(1) 和(2) 知式(L) 成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}(\mu+v)bc+(v+\lambda)ca+(\lambda+\mu)ab=2\\ \lambda=\mu=v, a=b=c\end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases}\lambda=\mu=v=p\\ a=b=c=q\\ \text{且 } pq^2=\frac{1}{3}\end{cases}$$

新奇的推广 7 与推广 2 相比较,它们交相辉映,各放异彩,照亮星空.

两道数奥妙题的关联与推广

邓寿才

1

有一道 IMO 预赛名题是:

题 1 设 $r_i \geqslant 1(i=1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$, $G=\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i+1} \geqslant \frac{n}{G+1} \tag{A}$$

在许多数奥书籍上都有此题.我们先将它从参数方面推广成:

推广 1 设 $r_i \geqslant \lambda>0(i=1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$, $G=\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i+\lambda} \geqslant \frac{n}{G+\lambda} \tag{B}$$

显然,当 $\lambda=1$ 时,式(B)化为式(A).

为了证明式(B),我们需引用

定理 1 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,如果

$$f(x_1)+f(x_2) \geqslant 2 f(\sqrt{x_1 x_2}) \tag{a}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant n f\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right] \tag{b}$$

等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

定理 1 至少有 3 种证明.下面我们提供一种简洁的证明.

证明 (1)当 $n=2$ 时定理 1 成立,等号成立仅当 $x_1=x_2$.

(2)假设当 $n=k$ 时,定理成立,那么当 $n=k+1$ 时,记 $G=\sqrt[k+1]{x_1 x_2 \cdots x_{k+1}}$,有

$$\begin{cases} f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k) \geqslant k f(\sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_{k+1}}) \\ f(x_{k+1})+f(G)+\cdots+f(G) \geqslant k f(\sqrt[k]{x_{k+1} G^{k-1}})(k-1 \text{ 个 } G) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} f(x_i)+(k-1) f(G) \geqslant$$

$$k[f(\sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k})+f(\sqrt[k]{x_{k+1} G^{k-1}})] \geqslant 2 k f\left(\sqrt[2k]{x_1 x_2 \cdots x_{k+1} G^{k-1}}\right)=$$

$$2kf(\sqrt[2k]{G^{k+1}G^{k-1}}) = 2kf(G) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} f(x_i) \geqslant (k+1)f(G)$$

即当 $n = k + 1$ 时定理成立,等号成立仅当

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = G$$

综合上述(1)和(2)知,对任意 $2 \leqslant n \in \mathbf{N}$ 定理成立,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

现在我们应用定理1来证明推广1.

证明 由于

$$\frac{1}{r_1+\lambda} + \frac{1}{r_2+\lambda} \geqslant \frac{2}{\sqrt{r_1r_2}+\lambda} \Leftrightarrow (\sqrt{r_1r_2}+\lambda)(r_1+r_2+2\lambda) \geqslant 2(\lambda+r_1)(\lambda+r_2) \Leftrightarrow \quad ①$$

$$\sqrt{r_1r_2}(r_1+r_2-2\sqrt{r_1r_2}) - \lambda(r_1+r_2-2\sqrt{r_1r_2}) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2})^2(\sqrt{r_1r_2}-\lambda) \geqslant 0$$

因此式①成立,等号成立仅当 $r_1 = r_2 \geqslant \lambda > 0$.

设

$$f(r_i) = \frac{1}{r_i+\lambda}(\text{应用式①}) \Rightarrow f(r_1)+f(r_2) \geqslant 2f(\sqrt{r_1r_2})(\text{应用定理1}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(r_i) \geqslant nf[(\sum_{i=1}^{n} r_i)^{\frac{1}{n}}] = nf(G) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i+\lambda} \geqslant \frac{n}{G+\lambda}$$

等号成立仅当 $r_1 = r_2 = \cdots = r_n \geqslant \lambda > 0$.

2

定理1的用途仅次于它的配对形式——颜生不等式的特例.

颜生不等式 $x_i > 0, p_i \in (0,1)(i = 1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,则如果函数 $f(x)$ 满足

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad ①$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geqslant f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \quad ②$$

如果式①反向,则式②也反向;等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

式②的配对式就是定理1的加权推广:

定理2 设 $x_i > 0, p_i \in (0,1)(i = 1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,如果函数 $f(x)$ 满足

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f(\sqrt{x_1x_2}) \quad ③$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)\geqslant f(\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i})\tag{c}$$

等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 (1) 当 $p_i=\frac{1}{n}(1\leqslant i\leqslant n)$ 时,式(c)化为式(b).

(2) 当 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 不全相等时,设 $p_i=\frac{\mu_i}{\lambda_i}(1\leqslant i\leqslant n)$.

① 如果 $\{p_i\}$ 全为有理数,则 μ_i,λ_i 为正整数,记(约定 $\lambda_0=1$)

$$\lambda=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i,U_i=\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\mu_i\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}U_i$$

那么 λ,U_i,S 均为正整数,且

$$1=\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i}{\lambda}=\frac{S}{\lambda}\Rightarrow\lambda=S$$

因为和式 $\sum_{i=1}^{n}U_if(x_i)$ 里共有 S 个函数值,可组成集合

$$A=\{f(y_1),f(y_2),\cdots,f(y_S)\}$$

应用定理1有 $$\sum_{i=1}^{n}U_if(x_i)=\sum_{i=1}^{S}f(y_i)\geqslant Sf[(\prod_{i=1}^{S}y_i)^{\frac{1}{S}}]$$

又因为集合 A 里有 U_1 个 $f(x_1)$,U_2 个 $f(x_2)$,$\cdots$,U_n 个 $f(x_n)$,因此

$$Sf[(\prod_{i=1}^{S}y_i)^{\frac{1}{S}}]=Sf[(\prod_{i=1}^{n}x_i^{U_i})^{\frac{1}{S}}]\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}U_if(x_i)\geqslant Sf[(\prod_{i=1}^{n}x_i^{U_i})^{\frac{1}{S}}]=\lambda f[\prod_{i=1}^{n}x_i^{\frac{U_i}{\lambda}}]\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i}{\lambda}f(x_i)\geqslant f(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\frac{U_i}{\lambda}})\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)\geqslant f(\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i})$$

② 如果 $\{p_i\}$ 为实数,应用有理数逼近无理数的原理,定理2仍然成立.

综合(1)和(2)知,定理2成立,等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

有了定理2的帮助,我们就会如鱼得水,如虎添翼,立刻轻松地得推广1加权推广为:

推广2 设 $r_i\geqslant\lambda>0,p_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.记 $G=\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i}$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{r_i+\lambda}\geqslant\frac{1}{G+\lambda}\tag{C}$$

等号成立仅当 $r_1=r_2=\cdots=r_n\geqslant\lambda>0$.

显然,当 $p_1=p_2=\cdots=\frac{1}{n}$ 时,式(C)化为式(B).

3

题 2(1988 年全国数学联赛) 设正数 $a>0,b>0$,且满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,则对任意 $n\in\mathbf{N}$,有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1} \tag{A$_1$}$$

本题是 1988 年全国联赛题之一.它题意简洁,结论式(A_1)新奇,许多数奥资料上均有它"入席",但是,在证法上,却像极了"独生子",只有如下归纳证明:

证法 1 (1)当 $n=1$ 时,左边 $=0=$ 右边,式(A_1)成立.

当 $n=2$ 时,从已知条件有

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\\ a>0,b>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a>1,b>1\\ ab=a+b\geqslant 4\end{array}\right.\Rightarrow(a+b)^2-a^2-b^2=2ab\geqslant 8=2^4-2^3$$

式(A_1)成立,等号成立仅当 $a=b=2$.

(2)假设当 $n=k$ 时,式(A_1)成立,即

$$p_k=(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant 2^{2k}-2^{k+1}$$

那么当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}p_{k+1}&=(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k\geqslant\\&4(2^{2k}-2^{k+1})+2(\sqrt{ab})^{k+1}\geqslant 2^{2(k+1)}-2^{k+3}+2\times 2^{k+1}=2^{2(k+1)}-2^{k+2}\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时,式(A_1)成立.

综合(1)和(2)知,对任意 $n\in\mathbf{N}$,式(A_1)成立,等号成立仅当 $a=b=2$.

在上述证明中,应用了传统的归纳法,也颇具技巧性和优美性,深得广大中学生的喜爱.下面我们再另辟蹊径,给出新证.

证法 2 当 $n=1$ 时,式(A_1)显然成立.当 $n>1$ 时,由已知条件有

$$\left\{\begin{array}{l}a>0,b>0\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a>1,b>1\\ t=\sqrt{ab}=\sqrt{a+b}\geqslant 2\Rightarrow\\ (a-1)(b-1)=1\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}&M=(a^{n-1}+\cdots+a+1)(b^{n-1}+\cdots+b+1)(\text{应用柯西不等式})\geqslant\\&(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)^2\geqslant(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1)^2=(2^n-1)^2\Rightarrow\\&P_n=(a+b)^n-a^n-b^n=(ab)^n-a^n-b^n=(a^n-1)(b^n-1)-1=\\&(a-1)(b-1)M-1=M-1\geqslant(2^n-1)^2-1\Rightarrow P_n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}\end{aligned}$$

即(A_1)式成立,等号成立仅当 $a=b=2$.

证法 3 由已知可设

$$\left.\begin{array}{l}a>0,b>0\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a>1,b>1\\ \text{设 } a=1+t^2(t>0)\end{array}\right\}\Rightarrow b=1+\frac{1}{t^2}\Rightarrow ab=(t+\frac{1}{t})^2\geqslant 4$$

由于 $P_n=(a+b)^n-a^n-b^n=C_n^1ab^{n-1}+C_n^2a^2b^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1}b=$

$C_n^1ba^{n-1}+C_n^2ba^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}b^{n-1}a\Rightarrow$

$2P_n=(ab^{n-1}+ba^{n-1})C_n^1+(a^2b^{n-2}+b^2a^{n-2})C_n^2+\cdots+$

$(a^{n-1}b+b^{n-1}a)C_n^{n-1}\geqslant$

$2(ab)^{\frac{n}{2}}C_n^1+2(ab)^{\frac{n}{2}}C_n^2+\cdots+2(ab)^{\frac{n}{2}}C_n^{n-1}=$

$2(ab)^{\frac{n}{2}}[(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)-C_n^0-C_n^0]=2(ab)^{\frac{n}{2}}(2^n-2)\Rightarrow$

$P_n\geqslant(2^n-2)(ab)^{\frac{n}{2}}\geqslant(2^n-2)2^n\Rightarrow P_n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$

等号成立仅当 $a=b=2$.

证法 4 当 $n=1$ 时,式(A)成立.

当 $n>1$ 时,设

$$\begin{cases}S=C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}=2^n-2\\ x=C_n^1+2C_n^2+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}\\ y=(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}\end{cases}$$

则 $x=y$(因 $C_n^k=C_n^{n-k}$),且

$$x+y=n(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})=nS=n(2^n-2)\Rightarrow x=y=\frac{n}{2}S=n(2^{n-1}-1)$$

由于 $C_n^i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 为自然数,应用平均值不等式有

$P_n=(a+b)^n-a^n-b^n=C_n^1ab^{n-1}+C_n^2a^2b^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1}b\geqslant$

$S[(ab^{n-1})^{C_n^1}\cdot(a^2b^{n-2})^{C_n^2}\cdot\cdots\cdot(a^{n-1}b)^{C_n^{n-1}}]^{\frac{1}{S}}=S(a^xb^y)^{\frac{1}{S}}=S(ab)^{x/S}\Rightarrow$

$$P_n\geqslant S(\sqrt{ab})^n \qquad ①$$

又从已知 $a>0,b>0$ 有

$$l=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}\Rightarrow\sqrt{ab}\geqslant 2\Rightarrow P_n\geqslant S\cdot 2^n=(2^n-2)2^n=2^{2n}-2^{n+1}$$

等号成立仅当 $a=b=2$.

可见,关于题 2 的以上 4 种证法均有特色,各有千秋,颇有启迪.

4

(1) 从上述证明可知,有

$P_n\geqslant(2^n-2)(\sqrt{ab})^n=(2^n-2)(a+b)^{\frac{n}{2}}=(2^n-2)[(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}]^{\frac{n}{2}}\geqslant$

$(2^n-2)[(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+4]^{\frac{n}{2}}\geqslant(2^{2n}-2^{n+1})(1+Q)\Rightarrow P_n\geqslant(2^{2n}-2^{n+1})(1+Q)$

$$(B_1)$$

其中
$$Q = \left|\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right|^n \geqslant 0, n \geqslant 2$$

因此，式(B_1)是式(A_1)的加强.

(2) 另外，应用幂平均不等式，我们易得到不等式链

$$(2^{n-1}-1)(a^n+b^n) \geqslant (1-2^{1-n})(a+b)^n = (1-2^{1-n})(ab)^n \geqslant P_n \geqslant (2^{2n}-2^{n+1})(1+Q) \geqslant 2^{2n}-2^{n+1} \quad (C_1)$$

(3) 由于有些题目可以"脱胎换骨"，相互转化. 如从本题已知条件

$$\left.\begin{matrix} a>0, b>0 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{联想}} \begin{cases} 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{代换}} \begin{cases} a=\sec^2\theta \\ b=\csc^2\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{式}(A_1)\text{转化}} \quad (D_1)$$

$$(\sec^2\theta+\csc^2\theta)^n-(\sec\theta)^{2n}-(\csc\theta)^{2n} \geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$$

这样，题2中的代数不等式(A_1)就转化成为三角不等式(D_1)，其中$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，等号成立仅当$\theta = \frac{\pi}{4}$.

(4) 推广美妙的命题，是我们的优良传统. 如式(A_1)就可从指数和参数两方面推广为

推广3 设$k>0, t \geqslant 0, \lambda, \mu > 0, a, b > 0$，且$a^k > \lambda - t > 0, b^k > \mu - t > 0$，满足

$$\frac{\lambda}{a^k+t}+\frac{\mu}{b^k+t} \leqslant 1 \quad ①$$

则有

$$(a+b)^n-a^n-b^n \geqslant (2^n-2)[\sqrt{\lambda\mu}+\sqrt{(\lambda-t)(\mu-t)}]^{\frac{n}{k}} \quad (E_1)$$

特别地，当取$\lambda=\mu=k=1$时

$$a>1-t>0, b>1-t>0, 1>t\geqslant 0$$

(其实允许$2>t\geqslant 0$).

式(E_1)简化为

$$P_n=(a+b)^n-a^n-b^n \geqslant (2^n-2)(2-t)^n \quad (F_1)$$

再取$t=1$有

$$P_n \geqslant 2^n-2 \quad ②$$

取$t=0$，式(F_1)化为式(A_1).

由此可见，推广3将式(A_1)推广得精致奇特.

证明 记$x=a^k+t, y=b^k+t$. 由已知条件有

$$1 \geqslant \frac{\lambda}{a^k+t}+\frac{\mu}{b^k+t}=\frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{y} \Rightarrow xy \geqslant \lambda y+\mu x \Rightarrow \lambda\mu \leqslant (x-\lambda)(y-\mu)=$$
$$[(a^k-(\lambda-t))][b^k-(\mu-t)]=$$
$$(ab)^k-[a^k(\mu-t)+b^k(\lambda-t)]+(\lambda-t)(\mu-t) \leqslant$$

$$(ab)^k-2(\sqrt{ab})^k\sqrt{(\mu-t)(\lambda-t)}+(\lambda-t)(\mu-t)=$$
$$[(\sqrt{ab})^k-\sqrt{(\lambda-t)(\mu-t)}]^2\Rightarrow\sqrt{\lambda\mu}\leqslant(\sqrt{ab})^k-\sqrt{(\lambda-t)(\mu-t)}\Rightarrow$$
$$(\sqrt{ab})^k\geqslant\sqrt{\lambda\mu}+\sqrt{(\lambda-t)(\mu-t)}\Rightarrow$$
$$P_n=(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant(2^n-2)(\sqrt{ab})^n\geqslant$$
$$(2^n-2)[\sqrt{\lambda\mu}+\sqrt{(\lambda-t)(\mu-t)}]^{\frac{n}{k}}$$

等号成立仅当

$$a=b=[\sqrt{\lambda\mu}+\sqrt{(\lambda-t)(\mu-t)}]^{\frac{1}{k}}(\text{当 }\lambda=\mu=k=l,t=0\text{ 时},a=b=2)$$

式(A_1)的第2个推广是

推广4 设 $a,b,k>0,\lambda,\mu\geqslant0,a^k>p\geqslant0,b^k>q\geqslant0$,且满足条件

$$\frac{1+\lambda}{a^k-p}+\frac{1+\mu}{b^k-q}\leqslant1$$

则有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant(2^n-2)[2+(\sqrt{pq}+2\sqrt{\lambda\mu})]^{\frac{n}{k}}\tag{G_1}$$

显然,当 $\lambda=\mu=0,p=q=0,k=1$ 时,式(G_1)化为式(A_1).

推广3与推广4互为配对,相映成趣.

证明 由已知条件有

$$1\geqslant\frac{1+\lambda}{a^k-p}+\frac{1+\mu}{b^k-q}\geqslant2\left(\sqrt{\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{(a^k-p)(a^k-q)}}\right)\geqslant2\left(\frac{1+\sqrt{\lambda\mu}}{(\sqrt{ab})^k-\sqrt{pq}}\right)\Rightarrow$$
$$(\sqrt{ab})^k\geqslant\sqrt{pq}+2+2\sqrt{\lambda\mu}\Rightarrow P_n=(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant(2^n-2)(\sqrt{ab})^n\geqslant$$
$$(2^n-2)[2+(\sqrt{pq}+2\sqrt{\lambda\mu})]^{n/k}$$

等号成立仅当

$$a=b=(\sqrt{pq}+2\sqrt{\lambda\mu}+2)^{\frac{1}{k}}$$

特别地,当取 $k=1,p=q=0$ 时,式(G_1)化为漂亮的

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant(2^{2n}-2^{n+1})(1+\sqrt{\lambda\mu})^n\tag{H_1}$$

现在我们再建立新的

推广5 设 $\lambda,\mu,a_1,a_2,b_1,b_2$ 均为正数,$2\leqslant n\in\mathbf{N}$,且满足条件

$$\frac{\lambda}{a_1a_2}+\frac{\mu}{b_1b_2}\leqslant1$$

记
$$p=(a_1+a_2+b_1+b_2)^n-(a_1^n+a_2^n+b_1^n+b_n^n)$$

则有

$$p\geqslant(2^n-2)(p^n+2q^n)\tag{I_1}$$

其中
$$p=(\sqrt[4]{\lambda}+\sqrt[4]{\mu})^2,q=\sqrt[4]{4\lambda\mu}$$

从外观上看,式(I_1)"如花似玉,貌若天仙",特别地,当取 $\lambda=\mu=1$ 时,式(I_1)简化为

$$P\geqslant(2^n-2)(2^{2n}+2\times2^{\frac{n}{2}})$$

证明 我们记 $x=a_1+a_2+b_1+b_2$,由已知条件有

$$1 \geqslant \frac{\lambda}{a_1 a_2} + \frac{\mu}{b_1 b_2} \geqslant 2\left(\sqrt{\frac{\lambda\mu}{a_1 a_2 b_1 b_2}}\right) \Rightarrow a_1 a_2 b_1 b_2 \geqslant 4\lambda\mu \quad ③$$

且

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \geqslant (a_1 a_2 + b_1 b_2)\left(\frac{\lambda}{a_1 a_2} + \frac{\mu}{b_1 b_2}\right) \geqslant (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})^2 \Rightarrow \quad ④$$

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \geqslant \\ &(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})^2 + 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2} \geqslant \\ (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})^2 + 4\sqrt{\lambda\mu} &= (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})^2 + (2\sqrt[4]{\lambda\mu})^2 \geqslant \\ &(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu} + 2\sqrt[4]{\lambda\mu})^2 = \\ &(\sqrt[4]{\lambda} + \sqrt[4]{\mu})^4 = p^2 \quad ⑤\end{aligned}$$

应用我们以前建立的结果有

$$x^n - (a_1 + b_1)^n - (a_2 + b_2)^n \geqslant (2^n - 2)[(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)]^{\frac{n}{2}} \geqslant (2^n - 2)p^n \Rightarrow \quad ⑥$$

$$x^n - (a_1^n + b_1^n + a_2^n + b_2^n) = p \geqslant (2^n - 2)p^n + t \quad ⑦$$

其中

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{n} C_n^i a_1^i b_1^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} C_n^i a_2^i b_2^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} C_n^i a_1^{n-i} b_1^i + \sum_{i=1}^{n} C_n^i a_2^{n-i} b_2^i = \\ &\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} C_n^i (a_1^i b_1^{n-i} + a_1^{n-i} b_1^i) + \sum_{i=1}^{n} C_n^i (a_2^i b_2^{n-i} + a_2^{n-i} b_2^i)\right] \geqslant \\ &\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} 2C_n^i (\sqrt{a_1 b_1})^n + \sum_{i=1}^{n} 2C_n^i (\sqrt{a_2 b_2})^n\right] = \sum_{i=1}^{n} C_n^i [(\sqrt{a_1 b_1})^n + (\sqrt{a_2 b_2})^n] \geqslant \\ &\sum_{i=1}^{n} 2C_n^i [(\sqrt[4]{a_1 b_1 a_2 b_2})^n \geqslant 2\sum_{i=1}^{n} C_n^i (\sqrt[4]{4\lambda\mu})^n = \\ &2(\sqrt[4]{4\lambda\mu})^n \sum_{i=1}^{n} C_n^i = 2(\sqrt[4]{4\lambda\mu})^n (2^n - 2) \Rightarrow \\ &t \geqslant 2(2^n - 2)q^n \Rightarrow p \geqslant (2^n - 2)p^n + 2(2^n - 2)q^n = (2^n - 2)(p^n + 2q^n) \quad ⑧ \end{aligned}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = \sqrt{2\lambda} = \sqrt{2\mu}$.

从上述证明过程可知,推广 5 的证明具有技巧性,有一定难度.

5

为了将(A_1)式推广得更深入广泛,我们先建立

引理 1 设 $m, n, k \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{R}^+ \ (1 \leqslant i \leqslant m)$,记 $G = \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_m}$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^n \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^m + (m^n - m)G^m \quad (a_1)$$

显然,当 $m = 0$ 和 $n = 0$ 时,上式成立.因此我们只须证明当 $2 \leqslant m, n \in \mathbf{N}$ 时式(a_1)成立即可.

证明 对 n 用归纳法证明.

(1) 当 $n=1$ 时,式(a_1) 成为等式,成立.

当 $n=2$ 时,记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}$ 为 $\sum$,那么 $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}$ 为 $\prod$.

$$(\sum_{i=1}^{m}a_i)^2=\sum_{i=1}^{m}a_i^2+2\sum a_ia_j \tag{①}$$

又

$$2\sum a_ia_j\geqslant 2C_m^2(\prod a_ia_j)^{1/C_m^2}=m(m-1)(\prod_{i=1}^{m}a_i^{m-1})^{1/C_m^2}(\text{因 }2C_m^2/m=m-1)=$$

$$m(m-1)(\prod_{i=1}^{m}a_i^{m-1})^{\frac{2}{m(m-1)}}=(m^2-m)G^2\Rightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{m}a_i)^2\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^2+(m^2-m)G^2 \tag{②}$$

即当 $n=2$ 时式(a_1) 成立,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_m$.

(2) 当 $n=k$ 时假设式(a_1) 成立,即

$$(\sum_{i=1}^{m}a_i)^k\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^k+(m^k-m)G^k \tag{③}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k$.

那么当 $n=k+1$ 时,应用式 ③ 有

$$(\sum_{i=1}^{m}a_i)^{k+1}=(\sum_{i=1}^{m}a_i)^k(\sum_{i=1}^{m}a_i)\geqslant[\sum_{i=1}^{m}a_i^k+(m^k-m)G^k](\sum_{i=1}^{m}a_i)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^{k+1}+(m^k-m)G^k(\sum_{i=1}^{m}a_i)+M\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^{k+1}+(m^k-m)G^k\cdot mG+M=$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^{k+1}+(m^{k+1}-m^2)G^{k+1}+M \tag{④}$$

其中

$$M=(\sum_{i=1}^{m}a_i^k)(\sum_{i=1}^{m}a_i)-\sum_{i=1}^{m}a_i^{k+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i^kS_i \tag{⑤}$$

这里约定 $a_0=1$.

$$S_i=a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_m(1\leqslant i\leqslant m)\geqslant(m-1)(a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_m)^{\frac{1}{m-1}}=$$

$$(m-1)\left(\frac{G^m}{a_i}\right)^{\frac{1}{m-1}}\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}a_i^kS_i\geqslant(m-1)G^{\frac{m}{m-1}}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{a_i^k}{a_i^{\frac{1}{m-1}}}\right)\geqslant \tag{⑥}$$

$$m(m-1)G^{\frac{m}{m-1}}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{a_i^k}{a_i^{\frac{1}{m-1}}}\right)^{\frac{1}{m}}=m(m-1)G^{\frac{m}{m-1}}\cdot G^k/G^{\frac{1}{m-1}}=$$

$$m(m-1)G^{k+1}(\text{代入式 ④})\Rightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{m}a_i)^{k+1}\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^{k+1}+(m^{k+1}-m^2)G^{k+1}+(m-1)mG^{k+1}=$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{k+1} + (m^{k+1} - m)G^{k+1}$$

即当 $n = k + 1$ 时,式(a_1)也成立.

综合(1)和(2)知,对任意 $n \in \mathbf{N}$,式(a_1)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$.

有了引理 1 和第 1 节中的式(B)帮助,我们就可放胆地建立式(A_1)的新推广了.

推广 6　设 $m, n \in \mathbf{N}, k > 0, m > \lambda \geqslant 0$,记 $G = (\prod_{i=1}^{m} a_i)^{1/m}$,则当 $a_i \geqslant \lambda$ 时,且满足

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i^k + \lambda} \leqslant 1 \tag{7}$$

时有

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i)^n - \sum_{i=1}^{m} a_i^n \geqslant (m^n - m)(m - \lambda)^{\frac{n}{k}} \tag{A_2}$$

显然,当 $m = 2, \lambda = 0, k = 1$ 时,式(A_2)化为式(A_1).

略证　由已知条件有

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i^k + \lambda} \geqslant \frac{m}{G^k + \lambda} \Rightarrow G^k \geqslant m - \lambda > 0 \Rightarrow G \geqslant (m - \lambda)^{1/k} \Rightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i)^n - \sum_{i=1}^{m} a_i^n \geqslant (m^n - m)G^n \geqslant (m^n - m)(m - \lambda)^{n/k}$$

等号成立仅当

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = (m - \lambda)^{\frac{1}{k}}$$

相应地,前面的推广 4 可以推广为:

推广 7　设 $m, n \in \mathbf{N}, k > 0, \lambda_i \geqslant 0, a_i^k > t_i \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant m)$,其满足条件

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1 + \lambda_i}{a_i^k - t_i} \leqslant 1$$

则

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i)^n - \sum_{i=1}^{m} a_i^n \geqslant (m^n - m)[m(1 + \lambda) + t]^{n/k} \tag{A_3}$$

其中

$$\lambda = (\prod_{i=1}^{m} \lambda_i)^{1/m}, t = (\prod_{i=1}^{m} t_i)^{1/m}$$

证明

$$(\prod_{i=1}^{m} a_i^k)^{\frac{1}{m}} = \prod_{i=1}^{m}[(a_i^k - t_i) + t_i]^{\frac{1}{m}} \geqslant \prod_{i=1}^{m}(a_i^k - t_i)^{\frac{1}{m}} + (\prod_{i=1}^{m} t_i)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow [\prod_{i=1}^{m}(a_i^k - t_i)]^{\frac{1}{m}} \leqslant$$

$$(\prod_{i=1}^{m} a_i^k)^{\frac{1}{m}} - (\prod_{i=1}^{m} t_i)^{\frac{1}{m}} = G^k - t \Rightarrow$$

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{1 + \lambda_i}{a_i^k - t_i} \geqslant m\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1 + \lambda_i}{a_i^k - t_i}\right)^{\frac{1}{m}} \geqslant \frac{m(1 + \lambda)}{G^k - t} \Rightarrow$$

$$G^k - t \geqslant m(1 + \lambda) \Rightarrow G \geqslant [m(1 + \lambda) + t]^{1/k} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^n - \sum_{i=1}^{m} a_i^n \geqslant (m^n - m)G^n \geqslant$$
$$(m^n - m)[m(1+\lambda)+t]^{n/k}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = [m(1+\lambda)+t]^{1/k}$

6

为了将(A_1)推广得更好更彻底,我们需将引理1推广为:

引理2 设 $m,n \in \mathbf{N}, \lambda_i \in \mathbf{N}, a_i > 0(1 \leqslant i \leqslant m)$,记 $S = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \in \mathbf{N}, G = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i^{\lambda_i}\right)^{1/S}$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i\right)^n \geqslant \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i^n + (S^n - S)G^n \tag{b_1}$$

当 $\lambda_i = 1(1 \leqslant i \leqslant m)$ 时,$S = n$,(b_1)化为式(a_1).

推广8 设 $n \in \mathbf{N}, 2 \leqslant m \in \mathbf{N}, \lambda_i \in \mathbf{N}(1 \leqslant i \leqslant m), a_i > 0(1 \leqslant i \leqslant m)$,且满足 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{a_i} = 1$.记 $S = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i$,则

$$P_S^{(n)} \equiv \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i\right)^n - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i^n \geqslant S^{2n} - S^{n+1} \tag{A_4}$$

证明 注意到

$$\lambda_i \in \mathbf{N}(1 \leqslant i \leqslant m) \Rightarrow S = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \in \mathbf{N}$$

记
$$A = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{n}\overbrace{(a_i + \cdots + a_i)}^{\lambda_i个a_i} = \sum_{i=1}^{s} b_i$$

即集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ 中有 λ_1 个 a_1,λ_2 个 a_2,$\cdots$,λ_m 个 a_m,共有 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = S$ 个正数,因此,相应地,已知条件 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{a_i} = 1$ 可以表示为 $\sum_{i=1}^{S}\frac{1}{b_i} = 1$.

故应用引理2有

$$P_S(n) \equiv \left(\sum_{i=1}^{s} b_i\right)^n - \sum_{i=1}^{s} b_i^n \geqslant S^{2n} - S^{n+1} \Rightarrow P_S(n) = \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i\right)^n - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i^n \geqslant S^{2n} - S^{n+1}$$

等号成立仅当

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_s \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = a_2 = \cdots = a_m \\ \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{a_i} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_m = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = S$$

进一步地,我们可将 $\lambda_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 从自然数推广到实数的情形.

推广9 设 $n \in \mathbf{N}, 2 \leqslant m \in \mathbf{N}, a_i > 0, \lambda_i = p_i/q_i \in \mathbf{R}^+(1 \leqslant i \leqslant m)$,记 $Q = \prod_{i=1}^{m} q_i$,

$S=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$,则有当$\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{a_i}=1$时

$$P_S(n)\equiv(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_i)^n-Q^{1-n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_i^n\geqslant S^{2n}-Q^{1-n}S^{n+1}\tag{A_5}$$

显然,当 $Q=1$ 时,$\lambda_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant m)$,式$(A_5)$化为式$(A_4)$.

证明 (1)当 $\lambda_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant m)$ 时,$Q=1$(因 $q_i=1$),式(A_5)显然成立.

(2)当 $\lambda_i\in\mathbf{Q}^+(1\leqslant i\leqslant m)$ 有理数时,约定 $q_0=1$,并证

$$x_i=q_1\cdots q_{i-1}p_iq_{i+1}\cdots q_m\in\mathbf{N}\Rightarrow\lambda_i=p_i/q_i=x_i/Q(1\leqslant i\leqslant m)\Rightarrow$$

$$S=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{q_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{Q}=\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{m}x_i=S_x/Q$$

由已知条件有

$$l=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{a_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{(Qa_i)}$$

应用式(A_4)并作置换

$$(\lambda_i,a_i,S)\longrightarrow(x_i,Qa_i,S_x)\Rightarrow[\sum_{i=1}^{m}x_i(Qa_i)]^n-\sum_{i=1}^{m}x_i(Qa_i)^n\geqslant S_x^{2n}-S_x^{n+1}\Rightarrow$$

$$Q^n(\sum_{i=1}^{m}x_ia_i)^n-Q^n\sum_{i=1}^{m}x_ia_i^n\geqslant(QS)^{2n}-(QS)^{n+1}\Rightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{m}Q\lambda_ia_i)^n-\sum_{i=1}^{m}(Q\lambda_ia_i^n)\geqslant Q^nS^{2n}-QS^{n+1}\Rightarrow(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_i)^n-Q^{1-n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_i^n\geqslant S^{2n}-Q^{1-n}S^{n+1}$$

(3)当 $\lambda_i\in\mathbf{R}^+$ 为实数时,应用实数逼近有理数原理

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_i^{(n)}=\lambda_i=\frac{p_i}{q_i}\in\mathbf{Q}^+,1\leqslant i\leqslant m$$

式(A_5)仍成立.

综合上述,式(A_5)成立,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_m=S$.

应用推广 8,我们立刻得到推论:

推论 设 $a,b,k>0,\lambda,\mu\in\mathbf{N}$,且满足条件

$$\frac{\lambda}{a^k}+\frac{\mu}{b^k}\leqslant 1$$

则有

$$(\lambda a+\mu b)^n-\lambda a^n-\mu b^n\geqslant[(\lambda+\mu)^n-(\lambda+\mu)](\lambda+\mu)^{\frac{n}{k}},n\in\mathbf{N}\tag{A_6}$$

进一步,推广 8 从一组数$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$推广到 $k\in\mathbf{N}$ 组数:

推广 10 设 $m,n,k\in\mathbf{N},\lambda_i\in\mathbf{N},a_{ij}>0(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant k)$,且满足

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik}}\leqslant 1$$

记

$$S=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\in\mathbf{N}$$

则有

$$(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{k}a_{ij})^n - \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^n) \geqslant k^n S^{\frac{n}{k}}(S^n - S) \tag{A_7}$$

式(A_7)放数可写为

$$[\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{ik})]^n - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(a_{i1}^n + a_{i2}^n + \cdots + a_{ik}^n) \geqslant k^n S^{\frac{n}{k}}(S^n - S) \tag{A_8}$$

特别地,当 $k = 1, \lambda_i = 1(1 \leqslant i \leqslant m)$ 时,$S = m$.

5道数奥名题的赏析

邓寿才

(一)

1

题1(USAMO,1980)　设 $a,b,c\in[0,1]$,则

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1 \tag{A}$$

题1是1980年美国数奥(USAMO)试题之一,一看便知,它有几个特点:第一,题意简单,已知条件只有一条 $a,b,c\in[0,1]$,特别容易记住;第二,要求证明的结论式(A)(记左边为 P)却不凡,其左边 P 匀称、美观又庞大,简直像一位体态丰满的胖美人;第三,其证法不常见,如果按照常规思路和方法去分母化简,那运算量是惊人的,显然是不可取的;第四,如果把已知变量 a,b,c 任意取0或1(t 个取0,$3-t$ 个取1,$t=0,1,2,3$),式(A)等号均成立,仅凭这点,本题就倍显与众不同,别具一格.故本题的成名之处在于它标新立异,在于它包含美的三要素,在于它向我们既招唤又挑战的无穷的诱惑力.

经验告诉我们,对于本题不能硬攻,只能智取.先让我们从最简单的情况入手分析,首先考虑只有两个字母的情形,即

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}+(1-a)(1-b)\leqslant 1\Leftrightarrow \tag{B}$$

$$a(1+a)+b(1+b)+(1-a^2)(1-b^2)\leqslant(1+a)(1+b)\Leftrightarrow$$

$$a^2b^2\leqslant ab\Leftrightarrow ab(ab-1)\leqslant 0$$

于是,式(B)成立.

好!下面我们先证明式(A),再慢慢揭开它那神秘的面纱.

分析　有了刚才对 a,b 的结论(B),也许有人会如此推导:

$$P\leqslant\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)\leqslant 1+\frac{c}{1+a+b}$$

证明　如果 $a=b=c=0$,则式(A)成立.现设 $S=a+b+c>0\Rightarrow\frac{a(1-a)}{S}\geqslant$

0,且

$$\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)=\frac{(b+c)^2-(b+c+1)bc}{b+c+1}\geqslant\frac{(b+c)^2-3bc}{b+c+1}=$$

$$\frac{(b-c)^2+bc}{b+c+1}\geqslant 0\Rightarrow \text{同理}\left.\begin{cases}\dfrac{1}{b+c+1}\geqslant(1-b)(1-c)\\ \dfrac{1}{c+a+1}\geqslant(1-c)(1-a)\\ \dfrac{1}{a+b+1}\geqslant(1-a)(1-b)\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$P=\sum\left[\frac{a}{S}-\frac{a(1-a)}{S(b+c+1)}\right]+\prod(1-a)\cdot\sum\frac{a}{S}=$$

$$\sum\frac{a}{S}-\sum\frac{a(1-a)}{S}\left[\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right]\leqslant 1\Rightarrow P\leqslant 1$$

即式(A)成立.

2

(1) 上述证法的技巧性和美妙性是不言而喻的.它还有几种漂亮的证法,将在后面的推广证明中体现.

(2) 如果我们记

$$A=(1-a)(1-b)(1-c),B=\sum\frac{a}{1+b+c}$$

则由已知条件显然有 $A\leqslant 1,B\leqslant 1$,而要证

$$P=B+A\leqslant 1$$

则具有挑战性,有点为难人了,但我们刚才仍然巧妙地"智取华山".

(3) 如果我们设

$$0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1\Rightarrow 1\geqslant\frac{1}{1+a}\geqslant\frac{1}{1+b}\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}\geqslant$$

$$\frac{a+b}{2}\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a}\right)(\text{应用切比雪夫不等式})\geqslant$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{4}{(1+a)+(1+b)}=\frac{2(a+b)}{a+b+2}(\text{应用柯西不等式})$$

这样,我们再联想的

$$(1-a)(1-b)\leqslant\left(1-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

能建立式(B)的拓变式

$$\frac{2(a+b)}{a+b+2}+\left(1-\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant 1 \tag{C}$$

吗?为此,我们令 $a+b=2t\geqslant 0(0\leqslant t\leqslant 1)$,(C)式化为

$$(1-t)^2+\frac{2t}{t+1}\leqslant 1\Leftrightarrow(1-t)^2(1+t)+2t\leqslant t+1\Leftrightarrow(1-t^2)(1-t)+t\leqslant$$

$$1 \Leftrightarrow t^2(t-1) \leqslant 0$$

因此式(C)成立,这是我们的意外收获.

(4) 仿照(3)的做法,我们设

$$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{1+b+c} \leqslant \frac{1}{1+c+a} \leqslant \frac{1}{1+a+b} \Rightarrow \sum \frac{a}{1+b+c} \geqslant$$

$$\left(\frac{\sum a}{3}\right)\sum \frac{1}{1+b+c} \geqslant \left(\frac{\sum a}{3}\right)\frac{9}{\sum(1+b+c)} = \frac{3\sum a}{3+2\sum a}$$

及

$$\prod(1-a) \leqslant \left(1-\frac{\sum a}{3}\right)^3$$

请问式(C)可否推广,式(A)也有拓变式吗?

$$\frac{3(a+b+c)}{3+2(a+b+c)} + \left(1-\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leqslant 1 \tag{D}$$

证明 设 $a+b+c=3t \geqslant 0(0 \leqslant t \leqslant 1)$,式(D)化为

$$\frac{3t}{1+2t} + (1-t)^3 \leqslant 1 \Leftrightarrow 3t + (1+2t)(1-t)^3 \leqslant 1+2t \Leftrightarrow \tag{①}$$

$$t^2(6t^2-5t+3) \geqslant 0 \Leftrightarrow t^2[3t^2+t+3(t-1)^2] \geqslant 0$$

因此式①成立,从而式(D)成立.

显然,(C),(D)两式等号成立仅当 $t=0$ 或 1,即 a,b,c 同时取 0 或同时取 1.

3

迷人的(A)、(B)两式表明,它们的左边的最大值均为 1,试问:它们的左边有最小值吗?如果有,那么我们就可以把它们完善成两个漂亮的双向不等式,恰似一对在云天比翼双飞的雄鹰.

我们首先注意到,当 a,b,c 取极端值(边界值)时,(A)、(B)两式均取等号,即(A)、(B)的左边取最大值,那么,应当是在 $a=b=c=t \in (0,1)$ 取特殊均值时,(A)、(B)左边取最小值,设此时式(A)左边为关于 $t \in (0,1)$ 的函数

$$P_A = f(t) = \frac{3t}{2t+1} + (1-t)^3 \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = \dfrac{3[1-(1-t)^2(1+2t)^2]}{(1+2t)^2} \\ f''(t) = \dfrac{6[(1-t)(2t+1)^3-2]}{(1+2t)^3} \end{cases}$$

解方程,求驻点

$$f'(t) = 0 \Rightarrow (1-t)(1+2t) = \pm 1$$

当 $(1-t)(1+2t) = -1$ 时

$$2t^2 - t - 2 = 0$$

两根为 $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ 和 $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$,均在区间(0,1)外,当

$$\begin{cases} (1-t)(1+2t) = 1 \\ 0 < t < 1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow f(t) \geqslant f(t)_{\min} =$$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{7}{8}\Rightarrow P_A\geqslant\frac{7}{8}$$

现在我们进一步证明确实有

$$\frac{3t}{2t+1}+(1-t)^3\geqslant\frac{7}{8}\Leftrightarrow \quad ①$$

$$24t+(2t+1)(2-2t)^3\geqslant 7(2t+1) \quad ②$$

设

$$\left.\begin{array}{l}x=2t-1\\ t\in(0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(-1,1)$$

式 ② 等价于

$$12(x+1)+(x+2)(1-x)^3\geqslant 7(x+2)\Rightarrow x^2(x^2-x-3)\leqslant 0\Rightarrow$$
$$x^2(x^2-1)-x^2(x+2)\leqslant 0$$

等号成立仅当 $x=0\Rightarrow a=b=c=t=\frac{1}{2}$,即式 ① 成立,从而有

$$\frac{7}{8}\leqslant\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1 \quad (\mathrm{E})$$

瞧!这是一个多么美妙的结论.

再记此时式(B)左边为

$$P_B=F(t)=\frac{2t}{1+t}+(1-t)^2\Rightarrow\begin{cases}F'(t)=\dfrac{2[1-(1-t)(t+1)^2]}{(t+1)^2}\\ F''(t)=\dfrac{2[(t+1)^3-2]}{(t+1)^3}\end{cases}$$

解方程

$$F'(t)=0\Rightarrow(1-t)(t+1)^2=1\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t(t^2+t-1)=0\\0<t<1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t^2+t-1=0\\0<t<0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\in(0,1)\Rightarrow$$

$$F''\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-2\right]>0\Rightarrow$$

$$F(t)\geqslant F(t)_{\min}=F\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{1}{2}(13-5\sqrt{5})\approx 0.875\in(0,1)\Rightarrow$$

$$P_B\geqslant\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$$

这是一个不错的结论,即

$$\frac{13-5\sqrt{5}}{2}\leqslant\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}+(1-a)(1-b)\leqslant 1 \quad (\mathrm{F})$$

注 式(E)左边等号成立仅当 $a=b=c=\frac{1}{2}$;式(F)左边等号成立仅当 $a=b=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

4

最后,我们抛出式(F)的配对式,即

$$\frac{13-5\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+(1-a)(1-b) \leqslant 1 \tag{G}$$

式(G)与式(F)相比较,在外形结构上只有一点微小的区别.我们只须证明式(G)左边即可.

证明

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+(1-a)(1-b) \leqslant 1 \Leftrightarrow a(1+b)+b(1+a)+(1-a^2)(1-b^2) \leqslant (1+a)(1+b) \Leftrightarrow a^2+b^2 \geqslant (ab)^2+ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant ab(ab-1)$$

由于

$$a,b \in [0,1] \Rightarrow ab-1 \leqslant 0$$

上式成立,从而式(G)成立,且右边等号成立仅当 $ab=0$ 或 1.

我们猜测,式(A)的配对式应当是

$$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1 \tag{?$_1$}$$

或

$$\frac{b}{1+a+b}+\frac{c}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1 \tag{?$_2$}$$

正确与否,供大家探讨证实.

5

美妙的不等式(A)涉及三个字母 $a,b,c \in [0,1]$,现在,我们把它推广到多个字母的情形:

推广 1 设 $x_i \in [0,1]$ $(i=1,2,\cdots,n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \leqslant 1 \tag{I}$$

其中

$$S=1+\sum_{i=1}^{n} x_i$$

显然,当 $n=2$ 时,式(H)与式(B)等价;当 $n=3$ 时,式(H)与式(A)等价.并且,式(H)的难度比式(A)自然提高.下面我们用 5 种方法证明它.

证法 1(综合法) 根据题意和对称性,设

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1 \Rightarrow S-x_i \geqslant S-x_n > 0 (1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow (S-x_n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i) \leqslant$$

$$\left[\frac{(S-x_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}{n}\right]^n=\left[\frac{(1+\sum_{i=1}^{n-1}x_i)+(n-1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i)}{n}\right]^n=$$

$$\left(\frac{1+n-1}{n}\right)^n=1\Rightarrow\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\leqslant\frac{1}{S-x_n}\Rightarrow P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{S-x_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{S-x_n}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{S-x_n}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=$$

$$\frac{S-1}{S-x_n}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=1-\frac{1-x_n}{S-x_n}+(1-x_n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)=$$

$$1-(1-x_n)\left[\frac{1}{S-x_n}-\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right]\leqslant1\Rightarrow P_n\leqslant1 \quad ①$$

即式(H)成立,等号成立仅当 n 个量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中有 t 个取 0,$n-t(0\leqslant t\leqslant n)$个取 1.

证法 2(综合法) 由已知条件有

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1+x_i)\geqslant1+\sum_{i=1}^{n-1}x_i=S-x_n\Rightarrow1\geqslant\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i^2)=\prod_{i=1}^{n-1}(1+x_i)\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\geqslant$$

$$(S-x_n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\Rightarrow\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\leqslant\frac{1}{S-x_n}(\text{利用式 ①})\Rightarrow P_n\leqslant1$$

证法 3(综合法) 当 $S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ 时

$$x_i=0(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow P_n=1$$

当 $S_n\neq0$ 时

$$S=1+S_n$$

$$n\left[(1+S_n-x_i)\prod_{j\neq i}^{n}(1-x_j)\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant(1+S_n-x_i)+\sum_{j\neq i}^{n}(1-x_j)=S_n+\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)=$$

$$S_n+(n-S_n)=n\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+S_n-x_i}\geqslant\prod_{j\neq i}^{n}(1-x_j)\Rightarrow\frac{1-x_i}{1+S_n-x_i}\geqslant$$

$$(1-x_i)\prod_{j\neq i}^{n}(1-x_j)=T_n \quad ②$$

又 $\frac{1-x_i}{1+S_n-x_i}\geqslant\frac{x_i}{S_n}\left(1-\frac{1-x_i}{1+S_n-x_i}\right)\Rightarrow P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+S_n-x_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{S_n}-\frac{x_i}{S_n}\left(\frac{1-x_i}{1+S_n-x_i}\right)\right]+T_n=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{S_n}-\frac{x_i}{S_n}\left(\frac{1-x_i}{1+S_n-x_i}\right)\right]+T_n\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{S_n}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{S_n}-\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1-x_i}{1+S_n-x_i}-T_n\right)\frac{x_i}{S_n}\right]（利用式②）\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{S_n}=1\Rightarrow P_n\leqslant 1$$

证法4(归纳法) (1) 当 $n=2$ 时

$$P_2=\frac{x_1}{1+x_2}+\frac{x_2}{1+x_1}+(1-x_1)(1-x_2)=\frac{x_1}{1+x_2}+\frac{x_2}{1+x_1}+1-x_1-x_2+x_1x_2=$$

$$1-x_1x_2\left(\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}-1\right)\leqslant 1-x_1x_2\left(\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}-1\right)=1\Rightarrow P_2\leqslant 1$$

即当 $n=2$ 时,命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时,命题成立,即

$$P_k=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{1+S_k-x_i}+T_k\leqslant 1 \qquad ③$$

其中

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i,T_k=\prod_{i=1}^{k}(1-x_i)$$

于是

$$1\geqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{1+S_k-x_i}+T_k\geqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{1+S_k}+T_k=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{1+S_k}+T_k=\frac{S_k}{1+S_k}+T_k\Rightarrow$$

$$T_k-\frac{1}{1+S_k}\leqslant 0 \qquad ④$$

(3) 那么,当 $n=k+1$ 时,注意到

$$T_{k+1}=\prod_{i=1}^{k+1}(1-x_i)=(1-x_{k+1})T_k$$

设

$$0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{k+1}\leqslant 1\Rightarrow S_{k+1}-x_i=\sum_{i=1}^{k+1}x_i-x_i=\sum_{i=1}^{k}x_i+(x_{k+1}-x_i)\geqslant S_k \qquad ⑤$$

且

$$S_{k+1}-x_{k+1}=S_k$$

$$P_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{x_i}{1+S_{k+1}-x_i}+\prod_{i=1}^{k+1}(1-x_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{1+S_{k+1}-x_i}+\frac{x_{k+1}}{1+S_{k+1}-x_{k+1}}+T_{k+1}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{1+S_k}+\frac{x_{k+1}}{1+S_k}+(1-x_{k+1})T_k=$$

$$\frac{S_k}{1+S_k}+\frac{x_{k+1}}{1+S_k}+(1-x_{k+1})T_k=1-\frac{1}{1+S_k}+\frac{x_{k+1}}{1+S_k}+(1-x_{k+1})T_k=$$

$$1+(1-x_{k+1})\left(T_k-\frac{1}{1+S_k}\right)\leqslant 1$$

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

综合上述,对任意 $2 \leqslant n \in \mathbf{N}$ 命题成立.

证法5(求导法) 先设 $x_n = t \in (0,1)$ 关于 t 的函数为

$$f(t) = P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + S' - x_i} + \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) =$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{1 + t + S' - x_i} + \frac{t}{1 + S'} + (1 - t)\prod_{i=1}^{n-1}(1 - x_i)$$

其中 $S' = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$,对 $f(t)$ 求导得

$$f'(t) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{(t + 1 + S' - x_i)^2} + \frac{1}{1 + S'} - \prod_{i=1}^{n-1}(1 - x_i)$$

$$f''(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2x_i}{(t + 1 + S' - x_i)^3} \geqslant 0$$

由于 $f''(t) \geqslant 0$,因此 $f(t)$ 在 $(0,1)$ 内无最大值,只有当 t 取边界值0或1时,$f(t) = P_n$ 才能达到最大值.

同理,当 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 均取边界值时 P_n 才能达到最大值.

综合上述,只有当所有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均取边界值0或1时,P_n 才能达到最大值,此时

$$\max(P_n) = 1 \Rightarrow P_n \leqslant 1$$

6

(1) 上述前4种方法均属初等证法,技巧各异,第5种方法虽应用了导数,但并非很难.整体看来,推广1的妙度非凡,而难度只相当于目前的IMO难度,其5种证法可谓是“八仙过海,各显神通”.

从上述证法知,当 n 个元数 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中有 $m(0 \leqslant m \leqslant n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 个取0,其余 $n - m$ 个取1时,式(H)等号成立.因此,在不考虑 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的顺序的情况下,共有 n 种取法,均使式(H)等号成立.这就是式(H)与众不同、标新立异之处,故它倍显鹤立鸡群,趣味无穷.

(2) 有一点必须指出:有人在用归纳法证明本题时,思路如下:

记

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, T_n = \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i)$$

假设当 $n = k$ 时,命题成立,即

$$P_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{1 + S_k - x_i} + T_k \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{1 + S_k - x_i} \leqslant 1 - T_k \quad ①$$

那么,当 $n = k$ 时,由于

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} \geqslant S_k, T_{k+1} = (1 - a_{k+1})T_k$$

于是

$$P_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{1+S_{k+1}-x_i}+\frac{x_{k+1}}{1+S_k}+T_{k+1}\leqslant 1-T_k+\frac{x_{k+1}}{1+S_k}+(1-x_{k+1})T_k=$$

$$1+x_{k+1}\left(\frac{1}{1+S_k}-T_k\right)\leqslant 1\Rightarrow P_{k+1}\leqslant 1 \qquad ②$$

即当 $n=k+1$ 时,命题仍然成立.

应当说上述推导方法和技巧还是不错的,粗略一看,无懈可击,天衣无缝,但一细看,因为$\frac{1}{1+S_k}\geqslant T_k\geqslant 0$.因此,从式 ② 中不能“瞒天过海”地推出 $P_{k+1}\leqslant 1$,这点大家要注意.

(3) 不等式(H) 还可从指数方面推广为:

推广 2 设指数 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\geqslant 1$,元数 $x_i\in[0,1]$($i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N}$),则(记 $S=1+\sum_{i=1}^{n}x_i$)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha_i}}{(S-x_i)^{\beta_i}}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{\gamma_i}\leqslant 1 \qquad (\mathrm{I})$$

(4) 式(H) 是否有如下拓变式

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i}{n+(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i}+\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^n\leqslant 1 \qquad (\mathrm{J})$$

事实上,式(J) 是成立的.

证明 设$\sum_{i=1}^{n}x_i=nt,t\in[0,1]$,式(J) 化为

$$\frac{nt}{1+(n-1)t}+(1-t)^n\leqslant 1\Leftrightarrow \qquad ③$$

$$(1-t)^n[1+(n-1)t]\leqslant 1-t \qquad ④$$

显然,当 $t=0$ 或 1 时,式 ④ 取等号,成立;当

$0<t<1\Rightarrow 1+(n-1)t>1>1-t>0\Rightarrow(1-t)^{n-1}[1+(n-1)t]$(应用平均值不等式) $<$

$$\left(\frac{(n-1)(1-t)+[1+(n-1)t]}{n}\right)^n=1\Rightarrow(1-t)^n[1+(n-1)t]<(1-t)$$

即式 ④ 成立,从而式 ③ 成立,故式(K) 成立,等号成立仅当 $t=0$ 或 1,即$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ 或 n,即$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 全部取 0 或全部取 1.

(二)

1

题 2 设 $a,b,c,d,k\in\mathbf{R}$,且满足条件 $|k|<2$ 及

$$\begin{cases}a^2+b^2-kab=1\\c^2+d^2-kcd=1\end{cases}$$

则

$$|ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}\tag{A}$$

分析 观察:读完了题,细分起来,本题的已知条件有三点,要我们证明的式(A)也并非庞大复杂;

联想:让我们首先从最简单的特殊情况着手分析,当 $k=0$ 时,已知条件简化为

$$a^2+b^2=1,c^2+d^2=1$$

这时,式(A)简化为

$$|ac-bd|\leqslant 2$$

很明显,这是一个简单的常规不等式,用柯西不等式或三角代换均可轻松证明.

转化:但当 $k\neq 0(|k|<2)$ 时,由于 a,b 和 c,d 分别在两个已知等式中,似乎互不往来,各居"门户".而式(A)却偏要将它们"开亲结缘"合二为一,"和睦相处"地统一在一起.受到刚才特殊情况($k=0$)的启发,为了证明式(A),显然将它们先配为两个形如 $x^2+y^2=1$ 的式子,再用柯西不等式或三角代换,方可完成我们的"统一大业".

2

由于此题奇异美妙,它在20世纪一诞生,在初数界便引起部分人士的关注,主要是探讨其证法技巧,其中李长明老师"战功卓著".他在《湖南数学通讯》上一口气公布了10种证法,使人眼界大开,惊叹不已.我们先欣赏两种最具启发性的精彩证法.

证法 1 充分应用已知条件进行配方

$$\begin{cases}a^2+b^2-kab=1\\c^2+d^2-kcd=1\end{cases}\Rightarrow 1=(a^2+b^2-kab)(c^2+d^2-kcd)=$$

$$\left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ac-bd)\right]^2+\left[(ad+bc)-\frac{k}{2}(ac+bd)\right]^2\geqslant$$

$$\left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ac-bd)\right]^2\Rightarrow|ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$$

等号成立仅当

$$2(ad+bc)=k(ac+bd)$$

证法 2　引进非负二次三项式

$$f(x) = x^2 - \sqrt{4-k^2}(ac-bd)x + 1 =$$

$$\left[\frac{\sqrt{2-k}}{2}(a+b)x - \frac{\sqrt{2+k}}{2}(c-d)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2+k}}{2}(a-b)x - \frac{\sqrt{2-k}}{2}(c+d)\right]^2 \geqslant$$

$$0 \Rightarrow \Delta_x \leqslant 0 \Rightarrow |\sqrt{4-k^2}(ac-bd)|^2 - 4 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$|ac-bd| \leqslant \frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2-k}}{2}(a+b)x = \dfrac{\sqrt{2+k}}{2}(c-d) \\ \dfrac{\sqrt{2+k}}{2}(a-b)x = \dfrac{\sqrt{2-k}}{2}(c+d)\end{cases} \Rightarrow (2-k)(a+b)(c-d) =$$

$$(2+k)(a-b)(c-d) \Rightarrow 2(ad+bc) = k(ac+bd)$$

如果重新理解本题,我们有发现新的证法.

证法 3　观察已知条件,发现数对(a,b)和(c,d)均满足曲线方程

$$x^2 + y^2 - kxy = 1 \qquad ①$$

设 $p,q \in \mathbf{R}$ 为待定系数,我们希望出现奇迹——将式①左边配方成

$$1 = x^2 + y^2 - kxy =$$

$$p(x+y)^2 + q(x-y)^2 \qquad ②$$

$$(p+q)(x^2+y^2) - 2(q-p)xy \Rightarrow \qquad ③$$

$$\begin{cases}p+q=1 \\ 2(q-p)=k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=(2-k)/4>0 \\ q=(2+k)/4>0\end{cases} \Rightarrow \qquad ④$$

$$\begin{cases}p(a+b)^2 + q(a-b)^2 = 1 \\ p(c+d)^2 + q(c-d)^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \qquad ⑤$$

$$2 = [p(a+b)^2 + q(c-d)^2] + [p(c+d)^2 + q(a-b)^2] \geqslant$$

$$2\sqrt{pq}[|(a+b)(c-d)| + |(c+d)(a-b)|] \geqslant$$

$$2\sqrt{pq}\,|(a+b)(c-d) + (c+d)(a-b)| =$$

$$4\sqrt{pq}\,|ac-bd| \Rightarrow |ac-bd| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}p(a+b)^2 = q(c-d)^2 \\ p(c+d)^2 = q(a-b)^2\end{cases}$$

证法 4　接证法 3 中的式⑤,并应用柯西不等式有

$$1 = [p(a+b)^2 + q(a-b)^2][q(c-d)^2 + p(c+d)^2] \geqslant$$

$$[\sqrt{pq}\,|(a+b)(c-d)| + \sqrt{pq}\,|(a-b)(c+d)|]^2 \geqslant$$

$$pq\,|(a+b)(c-d)+(a-b)(c+d)|^2=4pq\,|ac-bd|^2\Rightarrow$$

$$|ac-bd|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{pq}}=\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$$

等号成立仅当

$$\frac{p(a+b)^2}{q(c-d)^2}=\frac{q(a-b)^2}{p(c+d)^2}\Rightarrow p\,|(a+b)(c+d)|=q\,|(a-b)(c-d)|$$

证法 5 利用证法 3 中的式⑤,并注意到 $p,q>0$,作三角代换

$$\begin{cases}\cos\alpha=\sqrt{p}\,|a+b|\\ \sin\alpha=\sqrt{q}\,|a-b|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\beta=\sqrt{p}\,|c+d|\\ \sin\beta=\sqrt{q}\,|c-d|\end{cases}$$

由

$$1\geqslant|\sin(\alpha+\beta)|=|\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta|=$$
$$\sqrt{pq}\,\big||(a-b)(c+d)|+|(a+b)(c-d)|\big|\geqslant$$
$$\sqrt{pq}\,|(a-b)(c+d)+(a+b)(c-d)|=$$
$$\sqrt{pq}\,|ac-bd|=\sqrt{4-k^2}\cdot\frac{1}{2}|ac-bd|\Rightarrow$$
$$|ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$$

等号成立仅当

$$|\sin(\alpha+\beta)|=1\Rightarrow\alpha+\beta=n\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow|\sin\alpha|=|\cos\beta|\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2-k}}{2}|a+b|=\frac{\sqrt{2+k}}{2}|c-d|\Rightarrow\left|\frac{a+b}{c-d}\right|=\sqrt{\frac{2+k}{2-k}}$$

或者

$$|\cos\alpha|=|\sin\alpha|\Rightarrow\left|\frac{a-b}{c+d}\right|=\sqrt{\frac{2-k}{2+k}}$$

3

(1) 本题还有更好的证法吗?对于已知条件 $|k|<2\Rightarrow-2<k<2\Rightarrow2-k>0$,首先易得

$$1=x^2+y^2-kx\geqslant2xy-kxy=(2-k)xy\Rightarrow xy\leqslant1/(2-k)\Rightarrow\begin{cases}ab\leqslant1/(2-k)\\ cd\leqslant1/(2-k)\end{cases}$$

其次

$$|x^2+y^2-1|=|kxy|\leqslant\frac{|k|}{2}(x^2+y^2)$$

当

$$x^2+y^2-1\geqslant0\Rightarrow x^2+y^2-1\leqslant\frac{|k|}{2}(x^2+y^2)\Rightarrow x^2+y^2\leqslant\frac{2}{2-|k|}$$

当

$$x^2+y^2-1<0\Rightarrow1-x^2-y^2\leqslant\frac{|k|}{2}(x^2+y^2)\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^2+y^2\geqslant\dfrac{2}{2+|k|}\\ x^2+y^2\leqslant\dfrac{2}{2-|k|}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{2+|k|}\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{2}{2-|k|}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2\leqslant\dfrac{2}{2-|k|}\\c^2+d^2\leqslant\dfrac{2}{2-|k|}\end{cases}\Rightarrow$$

$$|ac-bd|\leqslant|ac+bd|\leqslant$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\leqslant\frac{2}{2-|k|}$$

显然
$$\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}=\frac{2}{\sqrt{(2-|k|)(2+|k|)}}<\frac{2}{2-|k|}$$
因此用这种思路不能证明式(A),即此路不通.

(2) 根据前面的证法 5,并注意到

$$|bc-ad|=\frac{1}{2}|(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)|=$$

$$\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}|\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta|=$$

$$\frac{2|\sin(\alpha-\beta)|}{\sqrt{4-k^2}}\Rightarrow|bc-ad|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}\tag{B}$$

等号成立仅当 $|\sin(\alpha-\beta)|=1$,即

$$\sqrt{2-k}\,|a+b|=\sqrt{2+k}\,|c-d|$$
或
$$\sqrt{2+k}\,|a-b|=\sqrt{2-k}\,|c+d|$$
这样,我们可将式(B) 视作式(A) 的配对式,让它们珠联璧合.

(3) 一种好的证法,往往会启发我们对题目做出较好的推广.比如应用证法 1 就能建立式(A) 的参数推广:

推广 1(参数推广) 设 $a,b,c,d,k,\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,且满足 $|k|<2$,λ,μ 同号,及

$$\begin{cases}a^2+b^2-kab=\lambda\\c^2+d^2-kcd=\mu\end{cases}$$

则

$$|ac-bd|\leqslant\sqrt{\frac{4\lambda\mu}{4-k^2}}\tag{C}$$

这是因为

$$\lambda\mu=(a^2+b^2-kab)(c^2+d^2-kcd)=$$

$$\left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ac-bd)\right]^2+\left[(ad+bc)-\frac{k}{2}(ac+bd)\right]^2\geqslant\left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ac-bd)\right]^2\Rightarrow$$

$$|ac-bd|\leqslant\sqrt{\frac{4\lambda\mu}{4-k^2}}$$

且等号成立的条件仍然不变,为

$$2(ad+bc)=k(ac+bd)$$

同理,式(B) 也可参数推广为

$$|bc-ad| \leqslant \sqrt{\frac{4\lambda\mu}{4-k^2}} \tag{D}$$

特别地，当取$(\lambda,\mu)=(1,1)$或$(-1,-1)$时，式(C)化为式(A)；式(D)化为式(B).

4

我们刚才从参数上推广了(A)、(B)两式，那么，我们还可以从指数上去推广它吗？前面的证法3暗示我们，只要方法巧妙，是可以的.

推广2(指数－参数推广) 设$a,b,c,d,k\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N},\lambda,\mu>0$，满足条件$|k|<2$及

$$\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^{2i}a^{2i}b^{2(n-i)}-\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i-1}a^{2i-1}b^{2n-2i+1}=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^{2i}c^{2i}d^{2(n-i)}-\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i-1}c^{2i-1}d^{2n-2i+1}=\mu$$

则有

$$|ac-bd| \leqslant \left(\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\sqrt{4-k^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{E}$$

特别地，当$n=1$时，$2n=2$，注意到$C_2^1=2$，式(E)化为式(A).

如取$n=2$时，已知两等式化为

$$\begin{cases}(a^4+6a^2b^2+b^4)-2k(a^3b+ab^3)=\lambda\\(c^4+6c^2d^2+d^4)-2k(c^3d+cd^3)=\mu\end{cases}$$

证明 应用二项式展开定理有

$$(x+y)^{2n}=y^{2n}+C_{2n}^1xy^{2n-1}+C_{2n}^2xy^{2n-2}+C_{2n}^3x^3y^{2n-3}+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}y+x^{2n}$$

$$(x-y)^{2n}=y^{2n}-C_{2n}^1xy^{2n-1}+C_{2n}^2xy^{2n-2}-C_{2n}^3x^3y^{2n-3}+\cdots-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}y+x^{2n}$$

设$t>0,p,q$为待定系数，我们希望有配方

$$\begin{aligned}t=&p(x+y)^{2n}+q(x-y)^{2n}=\\&(p+q)(y^{2n}+C_{2n}^2x^2y^{2n-2}+C_{2n}^4x^4y^{2n-4}+\cdots+C_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}y^2+x^{2n})+\\&(p-q)(C_{2n}^1xy^{2n-1}+C_{2n}^3x^3y^{2n-3}+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}y)=\\&(p+q)\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^{2i}x^{2i}y^{2(n-i)}+(p-q)\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i-1}x^{2i-1}\cdot y^{2(n-i)+1}\end{aligned} \tag{①}$$

因此，欲将已知条件中的两个等式配成方

$$\begin{cases}p(a+b)^{2n}+q(a-b)^{2n}=\lambda\\p(c+d)^{2n}+q(c-d)^{2n}=\mu\end{cases} \tag{②}$$

由式①知，必须且只须令

$$\begin{cases}p+q=1\\p-q=-\dfrac{k}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=(2-k)/4>0\\q=(2+k)/4>0\end{cases} \tag{③}$$

在式 ② 中作三角代换

$$\begin{cases}p(a+b)^{2n}=\lambda\cos^2\alpha\\q(a-b)^{2n}=\lambda\sin^2\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}p(c+d)^{2n}=\mu\cos^2\beta\\q(c-d)^{2n}=\mu\sin^2\beta\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$. 由于

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda\mu}\geqslant|\sin(\alpha+\beta)|\sqrt{\lambda\mu}=|\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta|\sqrt{\lambda\mu}=\\ \sqrt{pq}\left||(a-b)(c+d)|^n+|(a+b)(c-d)|^n\right|\geqslant\\ 2\sqrt{pq}\left(\frac{|(a-b)(c+d)|+|(a+b)(c-d)|}{2}\right)^n\geqslant\\ 2\sqrt{pq}\left|\frac{(a-b)(c+d)+(a+b)(c-d)}{2}\right|^n=\\ 2\sqrt{pq}\,|ac-bd|^n\Rightarrow\end{aligned}$$

$$|ac-bd|\leqslant\left(\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{2\sqrt{pq}}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{\sqrt{4\lambda\mu}}{\sqrt{4-k^2}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

等号成立仅当

$$\left.\begin{matrix}\sin(\alpha+\beta)=1\\ \alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\sin\beta\\ \sin\alpha=\cos\beta\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{a-b}{c+d}\right|^n=\sqrt{\frac{p}{q}}=\sqrt{\frac{2-k}{2+k}}$$

或

$$\left|\frac{a+b}{c-d}\right|^n=\sqrt{\frac{p}{q}}=\sqrt{\frac{2-k}{2+k}}$$

5

探讨至此,本可停止,但我们那飞翔的思维还在“彩云追月”.

式(A) 的已知条件中有两个已知等式,如果我们有意将它增加到 3 个,4 个,……,直到 $m(2\leqslant m\in\mathbf{N})$ 个,这样拓宽了视野,必定风光无限.

推广 3　设 $a_i,b_i,a_j,b_j\in\mathbf{R},\lambda_i,\lambda_j>0(1\leqslant i<j\leqslant m,2\leqslant m\in\mathbf{N})$, $|k|<2$,且满足

$$\begin{cases}a_i^2+b_i^2-ka_ib_i=\lambda_i\\a_j^2+b_j^2-ka_jb_j=\mu_j\end{cases}$$

记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}$ 为 $\sum$,则有

$$|\sum a_ia_j-\sum b_ib_j|\leqslant\frac{2\sum\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\sqrt{4-k^2}}\tag{F}$$

特别地,当 $m=2$ 时,式(F) 化为

$$|a_1a_2-b_1b_2|\leqslant\frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\sqrt{4-k^2}} \tag{①}$$

这等价于推广 1 中的式(C).

取 $m=3$ 时,式(F) 化为

$$|a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1-b_1b_2-b_2b_3-b_3b_1|\leqslant\frac{2(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+\sqrt{\lambda_2\lambda_3}+\sqrt{\lambda_3\lambda_1})}{\sqrt{4-k^2}}\leqslant 2\sqrt{\frac{3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}{4-k^2}} \tag{②}$$

提示 由式(C) 有

$$|a_ia_j-b_ib_j|\leqslant\frac{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\sqrt{4-k^2}}(1\leqslant i<j\leqslant m,2\leqslant m\in\mathbf{N})\Rightarrow|\sum a_ia_j-\sum b_ib_j|= |\sum(a_ia_j-b_ib_j)|\leqslant\sum|a_ia_j-b_ib_j|\leqslant \sum\left(\frac{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\sqrt{4-k^2}}\right)\Rightarrow|\sum a_ia_j-\sum b_ib_j|\leqslant\frac{2\sum\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\sqrt{4-k^2}}$$

最后指出:推广 2 可综合推广为

推广 4(综合推广) 设 $a_i,b_i,a_j,b_j\in\mathbf{R},\lambda_i,\lambda_j>0(1\leqslant i<j\leqslant m,2\leqslant m\in\mathbf{N})$, $n\in\mathbf{N}$, $|k|<2$,且满足条件

$$\sum_{t=0}^{n}C_{2n}^{2t}a_i^{2t}b_i^{2(n-t)}-\frac{k}{2}\sum_{t=1}^{n}C_{2n}^{2t-1}a_i^{2t-1}b_i^{2(n-t)+1}=\lambda_i$$

$$\sum_{t=0}^{n}C_{2n}^{2t}a_j^{2t}b_j^{2(n-t)}-\frac{k}{2}\sum_{t=1}^{n}C_{2n}^{2t-1}a_j^{2t-1}b_j^{2(n-t)+1}=\lambda_j$$

记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}$ 为 $\sum$,则有

$$|\sum a_ia_j-\sum b_ib_j|\leqslant\sum\left(\sqrt{\frac{4\lambda_i\lambda_j}{4-k^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{G}$$

如果约定 $a_{m+1}\equiv a_1,b_{m+1}\equiv b_1$,那么式(G) 也有配对形式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}-\sum_{i=1}^{n}b_ib_{i+1}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{4\lambda_i\lambda_{i+1}}{4-k^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{H}$$

(三)

1

题 3　设 $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2})(i = 1,2,3,4)$ 且 $\sum_{i=1}^{4} \tan \theta_i = 2$，求证：

$$\sum_{i=1}^{4} (\sin 2\theta_i)^2 \leqslant \left(\frac{8}{5}\right)^2 \tag{A}$$

初看本题，题意简洁对称，容易记住，也许不难，让我们先分析一下：

(1) 设 $\alpha = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \theta_i$，则

$$\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2})(1 \leqslant i \leqslant 4) \Rightarrow \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$2 = \sum_{i=1}^{4} \tan \theta_i \geqslant 4\tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \alpha \leqslant \arctan \frac{1}{2} < 30^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha \in (0, 30^\circ)$$

特别地，当 $\alpha = \theta_i = \arctan \frac{1}{2}(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 时，有

$$\tan \theta_i = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\sin^2 \theta_i = \cos^2 \theta_i$$

此时式(A)等号成立．现设

$$S = \sum_{i=1}^{4} (\sin 2\theta_i) = \sum_{i=1}^{4} 4\sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \leqslant \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} 4\sin^2 \theta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \cos^2 \theta_i\right) \leqslant$$

$$\frac{1}{16}\left[\left(\sum_{i=1}^{4} 4\sin^2 \theta_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{4} \cos^2 \theta_i\right)\right]^2 =$$

$$\frac{1}{16}\left[\sum_{i=1}^{4} (4\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i)\right]^2 =$$

$$\frac{1}{16}\left[\sum_{i=1}^{4} (1 + 3\sin^2 \theta_i)\right]^2 \Rightarrow S \leqslant \frac{1}{16}\left(4 + 3\sum_{i=1}^{4} \sin^2 \theta_i\right)^2 \tag{1}$$

到此，我们联想到：如果 $\theta_i \in [0, \pi](1 \leqslant i \leqslant n, 3 \leqslant n \in \mathbf{N})$，那么我们过去证明了，当 $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \pi$ 时，有不等式

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \theta_i \leqslant \frac{9}{4} \tag{2}$$

等号成立仅当 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}, \theta_4 = \cdots = \theta_n = 0$.

在式②中取 $n = 4$ 有 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \pi$，且

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2\theta_i \leqslant \frac{9}{4} \qquad ③$$

等号成立仅当 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}, \theta_4 = 0$.

但是,在式 ① 中, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \leqslant 4\arctan\frac{1}{2} < 120^\circ < \pi$, 且 $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2})(i = 1, 2, 3, 4)$.

因此,式 ① 不具备式 ③ 的条件.

如果再将变形式

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2\theta_i \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(1 - \cos 2\theta_i) = 2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\cos 2\theta_i$$

也不能应用

$$\sum_{i=1}^{4}\cos 2\theta_i \leqslant 4\cos 2\alpha$$

可见此种思想让我们现在举步维艰.

(2) 现在,我们改变战术,作代换

$$a_i = \tan\theta_i \Rightarrow (\sin 2\theta_i)^2 = \frac{4a_i^2}{(a_i^2 + 1)^2}, i = 1,2,3,4$$

这样,已知条件简化为

$$\sum_{i=1}^{4}a_i = 2, a_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant 4$$

而将结构转化为

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i^2}{(a_i^2 + 1)^2} \leqslant \frac{16}{25} \qquad (B)$$

记式(B) 左边为 P,并设

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \Rightarrow a_1^2 \leqslant a_2^2 \leqslant a_3^2 \leqslant a_4^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a_1^2 + 1)^2} \geqslant \frac{1}{(a_2^2 + 1)^2} \geqslant \frac{1}{(a_3^2 + 1)^2} \geqslant \frac{1}{(a_4^2 + 1)^2}\text{(应用切比雪夫不等式)} \Rightarrow$$

$$P = \sum_{i=1}^{4}\frac{a_i^2}{(a_i^2 + 1)^2} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^2}{4}\right) \cdot \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(a_i^2 + 1)^2}$$

但

$$\sum_{i=1}^{4}a_i^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}a_i\right)^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_i^2 + 1)^2 \geqslant \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{4}(a_i^2 + 1)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}a_i^2 + 4\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}(1 + 4)^2 = \frac{25}{4}$$

即使应用柯西不等式也只能是

$$\sum_{i=1}^{4}(a_i^2 + 1)^2 \cdot \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(a_i^2 + 1)^2} \geqslant 16$$

无法推出式(B).

(3) 注意到当 $a_i = \frac{1}{2}(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 时,式(B) 取等号,现在,我们改变思路

$$a_i+\frac{1}{a_i}=a_i+4\left(\frac{1}{4a_i}\right)\geqslant 5\sqrt[5]{a_i\left(\frac{1}{4a_i}\right)^4}=\frac{5}{2\sqrt[5]{(2a)^3}}\Rightarrow P=\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2}=$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(a_i+\frac{1}{a_i})^2}\leqslant\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{2\sqrt[5]{(2a)^3}}{5}\right)^2=\frac{8\sqrt[5]{2}}{25}\sum_{i=1}^{4}a_i^{\frac{6}{5}}$$

到此,即使应用幂平均不等式,也无法前进了.

2

可见,我们刚才应用了 3 种思路均告失败,难道式(A)真是一匹脱缰的野马,我们无法制服它吗?

其实,式(A)的等价形式式(B),它是陈计先生在 20 世纪建立的一道妙题,请先睹为快,欣赏那绝妙的证法.

证明 根据对称性,不妨设

$$\left.\begin{array}{l}0<a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\\ a_1+a_2+a_3+a_4=2\end{array}\right\}\Rightarrow 0<a_1\leqslant\frac{1}{2}$$

(1) 当$\frac{1}{8}\leqslant a_1\leqslant\frac{1}{2}$时,计算

$(48a_1-4)(a_1^2+1)^2-125a_1^2=(2a_1-1)^2(12a_1^3+11a_1^2+32a_1-4)\geqslant 0\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a_1^2}{(a_1^2+1)^2}\leqslant\dfrac{48a_1-4}{125}\\ \text{同理}\dfrac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2}\leqslant\dfrac{48a_i-4}{125}(i=2,3,4)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$P=\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{4}(48a_i-4)}{125}=\frac{48\sum_{i=1}^{4}a_i-16}{125}=\frac{48\times 2-16}{125}\Rightarrow P\leqslant\frac{16}{25}$$

(2) 当$0<a_1<\frac{1}{8}$时,计算

$(540a_2+108)(a_2^2+1)^2-2\,197a_2^2=(3a_2-2)^2(60a_2^3+92a_2^2+216a_2+27)\geqslant 0\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a_2^2}{(a_2^2+1)^2}\leqslant\dfrac{540a_2+108}{2\,197},i=3,4\\ \text{同理}\dfrac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2}\leqslant\dfrac{540a_i+108}{2\,197},i=3,4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$P-\frac{a_1^2}{(a_1^2+1)^2}\leqslant\frac{540(a_2+a_3+a_4)+324}{2\,197}=$$

$$\frac{540(2-a_1)+324}{2\,197}=\frac{108}{169}-\frac{540a_1}{2\,197}\Rightarrow$$

$$P \leqslant \frac{108}{169} + \frac{a_1^2}{(a_1^2+1)^2} - \frac{540a_1}{2\ 197} \qquad ①$$

但 $$0 < a_1 < \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{a_1^2}{(a_1^2+1)} < a_1^2 < \frac{1}{8}a_1 < \frac{540a_1}{2\ 197} \Rightarrow P < \frac{108}{169} < \frac{16}{25}$$

综合(1)和(2)知,式(B)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}$.

从而式(A)成立,等号成立仅当 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \arctan\frac{1}{2}$.

3

通过上述分析,陈计老师采用原始的方法,初等的配方,巧妙地证明了式(B),这充分说明了高等的技巧并非万能,初等的方法并非无力.

虽然许多优美的命题都可以进行某种程度上的推广,但推广要小心仔细,否则会"触雷伤身".那么,对于本题而言,我们能推广它吗?

为此,我们先设

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2} \\ 4 \leqslant n \in \mathbf{N} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < a_1 \leqslant \frac{1}{2}$$

已证当

$$\frac{1}{8} \leqslant a_i \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2} \leqslant \frac{48a_i - 4}{125} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{48a_i - 4}{125}\right) =$$

$$\frac{1}{125}(48\sum_{i=1}^{n} a_i - 4n) = \frac{1}{125}(24n - 4n) = \frac{4n}{25}$$

此时有推广式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2} \leqslant \frac{4n}{25} \qquad (C)$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{2}$.

特别地,当取 $n = 4$ 时,式(C)化为式(B).

但当 $0 < a_1 < \frac{1}{8}$ 时,对于 $2 \leqslant i \leqslant n$ 有

$$\frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2} \leqslant \frac{540a_i + 108}{2\ 197} \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2} \leqslant \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{540a_i + 108}{2\ 197}\right) =$$

$$\frac{1}{2\ 197}\left[\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) \times 540 + 108(n-1)\right] =$$

$$\frac{1}{2\ 197}\left[540\left(\frac{n}{2} - a_1\right) + 108(n-1)\right] =$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{378n-108}{2\,197}-\dfrac{540a_1}{2\,197} \\ \dfrac{a_1^2}{(a_1^2+1)^2}<a_1^2<\dfrac{1}{8}a_1<\dfrac{540a_1}{2\,197}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2}<\frac{378n-108}{2\,197} \qquad ①$$

可见,欲证当 $0<a_1<\frac{1}{8}$ 时,式(C)仍然成立,则必须

$$\frac{378n-108}{2\,197}\leqslant\frac{4n}{25}\Rightarrow n\leqslant 4\frac{26}{331}\Rightarrow 2\leqslant n\leqslant 4$$

这表明式(C)成立的另一个必要条件是 $2\leqslant n\leqslant 4$,即 $n=2,3,4$ 均可.这一结论真是出人意料.

这样一来,式(B)只能推广为:

推广 1 设 $a_i\geqslant\frac{1}{8}(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\frac{n}{2}$,则有

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{(a_i^2+1)^2}\leqslant\frac{4n}{25}$$

于是,式(A)就可以推广为

推广 2 设 $\arctan\frac{1}{8}\leqslant\theta_i<\frac{\pi}{2}(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\theta_i=\frac{n}{2}$,则有

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(\sin 2\theta_i)^2\leqslant\frac{16n}{25} \qquad (D)$$

此外,式(B)还有两个漂亮的拓广式:

拓广 1 设 $a_i(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$ 为任意实数,$k\neq 0$ 为实常数,且 $m,p\in\mathbf{N}$ 满足 $2p>m$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{(a_i^2+k^2)p}\leqslant\frac{n}{2}\mid k\mid^{m-2p} \qquad (E)$$

拓广 2 设 $a_i\in\mathbf{R}(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$,$k$ 为正常数,且正常数 α,β 满足 $2\beta>\alpha$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\alpha}{(a_i^2+k^2)\beta}\leqslant n\cdot k^{\alpha-2\beta}\cdot\left[\frac{\alpha^\alpha(2\beta-\alpha)^{2\beta-\alpha}}{(2\beta)^{2\beta}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(四)

1

题 4(IMO 预选题) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且满足 $abc=1$,求证:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1 \qquad (A)$$

许多数奥妙题的已知条件与本题相同,但要求证明的结论却各具特色,五彩缤纷.就本题而言,观察式(A)知,它的左边关于 a,b,c 轮换对称,且是三个头轻脚重的分式之和,证明这样的命题,需要一定的技巧.

证明 由于

$$a^5+b^5-a^2b^2(a+b)=(a^2-b^2)(a^3-b^3)\geqslant 0\Rightarrow a^5+b^5\geqslant a^2b^2(a+b)=\frac{a+b}{c^2}\Rightarrow$$

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leqslant\frac{ab}{\frac{a+b}{c^2}+ab}=$$

$$\frac{(abc)c}{a+b+(abc)c}=\frac{c}{a+b+c}\Rightarrow$$

$$\text{同理}\left.\begin{cases}\dfrac{ab}{a^5+b^5+ba}\leqslant\dfrac{c}{a+b+c}\\ \dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\leqslant\dfrac{a}{a+b+c}\\ \dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant\dfrac{b}{a+b+c}\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\leqslant\sum\left(\frac{a}{a+b+c}\right)=1$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$.

2

上述证法显得简洁明快,如果设正数 λ,μ,v 与 a,b,c 反序,那么,应用切比雪夫不等式有

$$\sum\left(\frac{\lambda bc}{b^5+c^5+bc}\right)\leqslant\frac{\lambda a+\mu b+vc}{a+b+c}\leqslant\frac{1}{3}(\lambda+\mu+v)\Rightarrow$$

$$\sum\left(\frac{\lambda bc}{b^5+c^5+bc}\right)\leqslant\frac{1}{3}(\lambda+\mu+v)\tag{B}$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$(与系数 λ,μ,v 无关).

从外观结构上看,式(B)美观漂亮.如果我们将式(B)视为式(A)的加权推广,那么式(A)还有参数推广吗?如果有,外观优美吗?

推广1(参数-加权推广) 设 $\lambda,\mu,v>0,a,b,c>0$,且 $abc=1$,则有

$$\frac{\lambda bc}{\mu b^5+vc^5+\lambda bc}+\frac{\mu ca}{vc^5+\lambda a^5+\mu ca}+\frac{vab}{\lambda a^5+\mu b^5+vab}\leqslant\frac{(\mu+v)(v+\lambda)(\lambda+\mu)}{8\lambda\mu v}\tag{C}$$

可见,式(C)是体态丰满迷人的"胖美人".

特别地,当 $\lambda=\mu=v$ 时,式(C)化为式(A),当 $a=b=c=1$ 时,式(C)化为简单不等式

$$(\mu+v)(v+\lambda)(\lambda+\mu)\geqslant 8\lambda\mu v$$

证明 由于

$$(b-c)(b^4-c^4)\geqslant 0\Rightarrow b^5+c^5\geqslant b^4c+bc^4\Rightarrow \mu v(b^5+c^5)\geqslant \mu v(b^4c+bc^4)\Rightarrow$$
$$\mu^2b^5+\mu v(b^5+c^5)+v^2c^5\geqslant \mu^2b^5+\mu v(b^4c+bc^4)+v^2c^5\Rightarrow$$
$$(\mu+v)(\mu b^5+vc^5)\geqslant(\mu b+vc)(\mu b^4+vc^4)\geqslant$$
$$2\sqrt{\mu v}(bc)^2(\mu b+vc)\Rightarrow$$
$$\mu b^5+vc^5\geqslant\frac{2\sqrt{\mu v}}{\mu+v}\left(\frac{\mu b+vc}{a^2}\right)\Rightarrow \mu b^5+vc^5+\lambda bc\geqslant$$
$$\frac{2\sqrt{\mu v}(\mu b+vc)+\lambda(\mu+v)a(abc)}{(\mu+v)a^2}\geqslant$$
$$\frac{2\sqrt{\mu v}(\mu b+vc)+2\lambda\sqrt{\mu v}a}{(\mu+v)a^2}\Rightarrow$$
$$\frac{\left(\frac{\lambda\sqrt{\mu v}}{\mu+v}\right)bc}{\mu b^5+vc^5+\lambda bc}\leqslant\frac{\lambda a(abc)}{2(\lambda a+\mu b+vc)}=$$
$$\frac{\lambda a}{2(\lambda a+\mu b+vc)}\Rightarrow$$
$$\sum\left(\frac{\left(\frac{\lambda\sqrt{\mu v}}{\mu+v}\right)bc}{\mu b^5+vc^5+\lambda bc}\right)\leqslant\frac{\sum\lambda a}{2(\lambda a+\mu b+vc)}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$\sum\frac{\lambda\sqrt{\mu v}(\lambda+\mu)(v+\lambda)bc}{\mu b^5+vc^5+\lambda bc}\leqslant\frac{1}{2}\prod(\mu+v)$$

由于

$$\lambda\sqrt{\mu v}(\lambda+\mu)(v+\lambda)\geqslant 4\lambda(\lambda\mu v)\Rightarrow\sum\frac{4\lambda(\lambda\mu v)bc}{\mu b^5+vc^5+\lambda bc}\leqslant\frac{1}{2}\prod(\mu+v)\Rightarrow$$
$$\sum\left(\frac{\lambda bc}{\mu b^5+vc^5+\lambda bc}\right)\leqslant\frac{\prod(\mu+v)}{8\lambda\mu v}$$

即式(C)成立,等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=\mu=v$.

特别地,由于

$$\prod(\mu+v)\leqslant\left(\frac{\sum(\mu+v)}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\sum\lambda\right)^3$$

因此式(C)有一个漂亮的推论

$$\sum\left(\frac{\lambda bc}{\mu b^5+vc^5+\lambda bc}\right)\leqslant\left(\frac{\lambda+\mu+v}{3\sqrt[3]{\lambda\mu v}}\right)^3 \qquad (D)$$

在最后我们还将推广它,使它更加丰满迷人.

3

由于式(A)优雅大方,自然有一个漂亮的配对式:

配对 设 $a,b,c,k,\alpha,\beta>0$,且满足 $abc=1,\alpha\geqslant 5(1+\beta)$,则有

$$\sum\frac{a^{\alpha}}{(b^5+c^5+kbc)^{\beta}}\geqslant\frac{3}{(2+k)^{\beta}}\tag{E}$$

特别地,在式(E)中取 $k=1,\beta=1,\alpha=10$ 时,意外地得到式(A)的完善式

$$\sum\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\leqslant 1\leqslant\sum\frac{a^{10}}{b^5+c^5+bc}\tag{F}$$

式(F)是一个优美的双向不等式,它可以演化成一个更难更美更妙的新的不等式

$$\sum\left(\frac{a^{10}-bc}{b^5+c^5+bc}\right)\geqslant 0\tag{G}$$

证明 设 $\theta=\alpha(1+\beta)\geqslant 5$,应用切比雪夫不等式,并设

$$a\geqslant b\geqslant c>0\Rightarrow a^m\geqslant b^m\geqslant c^m>0(m>0)\Rightarrow\sum a^{\theta}=\sum(a^5\cdot a^{\theta-5})\geqslant$$

$$\frac{1}{3}(\sum a^5)(\sum a^{\theta-5})\geqslant(\sum a^5)(abc)^{\frac{\theta-5}{3}}=\sum a^5=\sum(a^2\cdot a^3)\geqslant$$

$$\frac{1}{3}(\sum a^2)(\sum a^3)\geqslant abc\sum a^2=\sum a^2\geqslant\sum bc\Rightarrow$$

$$\sum a^{\theta}\geqslant\sum a^5\geqslant\sum bc\tag{①}$$

$$P=\sum\frac{a^{\alpha}}{(b^5+c^5+kbc)^{\beta}}=\sum\frac{(a^{\theta})^{1+\beta}}{(b^5+c^5+kbc)^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{(\sum a^{\theta})^{1+\beta}}{[\sum(b^5+c^5+kbc)]^{\beta}}(\text{应用权方和不等式})=$$

$$\frac{(\sum a^{\theta})^{1+\beta}}{(2\sum a^5+k\sum bc)^{\beta}}=\frac{(2\sum a^{\theta}+k\sum a^{\theta})^{1+\beta}}{(2+k)^{1+\beta}(2\sum a^5+k\sum bc)^{\beta}}\geqslant$$

$$\frac{(2\sum a^5+k\sum bc)^{1+\beta}}{(2+k)^{1+\beta}\cdot(2\sum a^5+k\sum bc)^{\beta}}=$$

$$\frac{2\sum a^5+k\sum bc}{(2+k)^{1+\beta}}\geqslant\frac{6+3k}{(2+k)^{1+\beta}}\Rightarrow P\geqslant\frac{3}{(2+k)^{\beta}}$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$(与 k,α,β 无关).

4

现在,我们从指数方面推广式(A).

推广2(指数推广) 设 $a,b,c>0$,且 $abc=1$,指数满足 $p>2q>0$,则有

$$\sum\frac{(ab)^q}{a^p+b^p+(ab)^q}\leqslant 1\tag{H}$$

比如,当取 $p=3,q=1$ 时,式(H)有特例

$$\sum\frac{ab}{a^3+b^3+ab}\leqslant 1\tag{h}$$

证明 我们设

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p>0\\2\beta-\alpha=q>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=(2p-q)/3>0\\\beta=(p+q)/3>0\end{cases}(\alpha,\beta>0)\Rightarrow\alpha-\beta=$$

$$\frac{1}{3}(p-2q)>0\Rightarrow 2\beta>\alpha>\beta>0$$

于是,我们有

$$(a^{\alpha}-b^{\alpha})(a^{\beta}-b^{\beta})\geqslant 0\Rightarrow a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}\geqslant a^{\alpha}b^{\beta}+a^{\beta}b^{\alpha}=(ab)^{\beta}(a^{\alpha-\beta}+b^{\alpha-\beta})\Rightarrow$$

$$a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}\geqslant\frac{a^{\alpha-\beta}+b^{\alpha-\beta}}{c^{\beta}}\Rightarrow a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+(ab)^{2\beta-\alpha}\geqslant$$

$$\frac{a^{\alpha-\beta}+b^{\alpha-\beta}+c^{\alpha-\beta}(abc)^{2\beta-\alpha}}{c^{\beta}}=(\sum a^{\alpha-\beta})/c^{\beta}\Rightarrow$$

$$\frac{(ab)^{2\beta-\alpha}}{a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+(ab)^{2\beta-\alpha}}\leqslant\frac{(ab)^{2\beta-\alpha}\cdot c^{\beta}}{\sum a^{\alpha-\beta}}=$$

$$\frac{(abc)^{2\beta-\alpha}\cdot c^{\alpha-\beta}}{\sum a^{\alpha-\beta}}=\frac{c^{\alpha-\beta}}{\sum a^{\alpha-\beta}}\Rightarrow$$

$$\sum\left(\frac{(ab)^{q}}{a^{p}+b^{p}+(ab)^{q}}\right)=\sum\left(\frac{(ab)^{2\beta-\alpha}}{a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+(ab)^{2\beta-\alpha}}\right)\leqslant$$

$$\frac{\sum c^{\alpha-\beta}}{\sum a^{\alpha-\beta}}=1$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$(与指数 p,q 无关).

如果我们再将推广 1 和推广 2 结合起来,不难建立:

推广 3 设 a,b,c,λ,μ,v,p,q 均为正数,且有 $abc=1,p>2q$,则有

$$\sum\left(\frac{\lambda(bc)^{q}}{\mu b^{p}+vc^{p}+\lambda(bc)^{q}}\right)\leqslant\frac{\prod(\mu+v)}{8\lambda\mu v}\tag{I}$$

5

不等式(A)是关于三个正元数 a,b,c 的不等式,我们能将它推广到多个正元数的情形吗?而且其难度与 IMO 基本相当.

推广 4(元数推广) 设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$.记

$$S_i=(\sum_{i=1}^{n}a_i^{2n-1})-a_i^{2n-1}$$

$$G_i=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}=\frac{1}{a_i}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{S_i+G_i}\leqslant 1\tag{J}$$

证明　记 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i^{2n-1}\Rightarrow S_i=S-a_i^{2n-1}, p=\sum_{i=1}^{n}a_i$,应用切比雪夫不等式,有

$$S_i=S-a_i^{2n-1}=a_1^{2n-1}+\cdots+a_{i-1}^{2n-1}+a_{i+1}^{2n-1}+\cdots+a_n^{2n-1}\geqslant$$
$$\frac{1}{n-1}(a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n)\cdot$$
$$(a_1^{2n-2}+\cdots+a_{i-1}^{2n-2}+a_{i+1}^{2n-2}+\cdots+a_n^{2n-2})\geqslant$$
$$(a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n)^{\frac{2n-2}{n-1}}\cdot(p-a_i)=\frac{p-a_i}{a_i^2}\Rightarrow$$
$$S_i+G_i\geqslant\frac{p-a_i}{a_i^2}+G_i=\frac{G_i(p-a_i)}{a_i}+G_i=\frac{G_ip}{a_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{G_i}{S_i+G_i}\right)\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{p}=1$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

下面我们再分别建立式(J)的系数推广和指数推广.

推广 5　设 $a_i>0,\lambda_i>0(1\leqslant i\leqslant n,3\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$,记 $S=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^{2n-1}, S_i=S-\lambda_ia_i^{2n-1}, G_i=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}=\frac{1}{a_i}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_iG_i}{S_i+\lambda_iG_i}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)^n}{n^n(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)}\tag{K}$$

显然,当系数 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时,式(K)即为式(J).

证明　记 $t=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, T=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n, t=\lambda_it_i, T_i=T-\lambda_i$,于是有

$$T_i\geqslant(n-1)t_i^{\frac{1}{n-1}}=(n-1)\left(\frac{t}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$t_i^{\frac{1}{n-1}}\cdot\left(\frac{T_1T_2\cdots T_n}{T_i}\right)\geqslant t_i^{\frac{1}{n-1}}\cdot(n-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{t_1t_2\cdots t_n}{t_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}=$$
$$(n-1)^{n-1}\cdot(t_1t_2\cdots t_n)^{\frac{1}{n-1}}=(n-1)^{n-1}t\tag{①}$$

再记
$$S_i^{(k)}=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^k)-\lambda_ia_i^k$$
$$S_i^{(1)}+\lambda_ia_i=m$$

又设

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0\Rightarrow a_1^{2(n-1)}\geqslant a_2^{2(n-1)}\geqslant\cdots\geqslant a_n^{2(n-1)}>0\Rightarrow S_i\geqslant\frac{1}{T_i}S_i^{(1)}S_i^{(2n-2)}\geqslant$$
$$\frac{t_i}{T_i}S_i^{(1)}\cdot\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}\right)^{\frac{2n-2}{n-1}}=(n-1)\frac{t_i^{\frac{1}{n-1}}S_i^{(1)}}{T_ia_i^2}\Rightarrow S_i+\lambda_iG_i=S_i+\frac{\lambda_i}{a_i}\geqslant$$
$$\frac{(n-1)t_i^{\frac{1}{n-1}}S_i^{(1)}}{T_ia_i^2}+\frac{\lambda_i}{a_i}=\frac{(n-1)t_i^{\frac{1}{n-1}}S_i^{(1)}+\lambda_iT_ia_i}{T_ia_i^2}\geqslant$$

$$\frac{(n-1)t_i^{\frac{1}{n-1}}(S_i^{(1)}+\lambda_i a_i)}{T_i a_i^2} \Rightarrow S_i+\lambda_i G_i \geqslant \frac{(n-1)mt_i^{\frac{1}{n-1}}}{T_i a_i^2} \tag{②}$$

记

$$x_i=\frac{\lambda_i G_i}{S_i+\lambda_i G_i} \leqslant \frac{T_i\lambda_i a_i^2 G_i}{(n-1)mt_i^{\frac{1}{n-1}}}=\frac{T_i\lambda_i a_i}{(n-1)mt_i^{\frac{1}{n-1}}} \Rightarrow \frac{x_i t_i^{\frac{1}{n-1}}}{T_i} \leqslant \frac{\lambda_i a_i}{(n-1)m} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i t_i^{\frac{1}{n-1}}}{T_i}\right) \leqslant$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i}{(n-1)m}=\frac{1}{n-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i t_i^{\frac{1}{n-1}} T_1 T_2\cdots T_n}{T_i}\right) \leqslant \frac{T_1 T_2\cdots T_n}{n-1}(\text{应用式①}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(n-1)^{n-1}tx_i] \leqslant \frac{T_1 T_2\cdots T_n}{n-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i \leqslant \frac{T_1 T_2\cdots T_n}{(n-1)^n t} \tag{③}$$

但

$$\prod_{i=1}^{n}T_i \leqslant \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}T_i}{n}\right)^n=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(T-\lambda_i)}{n}\right]^n=\left(\frac{nT-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}\right)^n=\left(\frac{nT-T}{n}\right)^n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i \leqslant \frac{T^n}{n^n t} \tag{④}$$

这即为式(K),等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1,\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$.

推广6 设 $n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$,指数 p,q 满足 $p>(n-1)q>0$,记

$$S_i^{(p)}=(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)-a_i^p$$

$$G_i=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_n}=\frac{1}{a_i},1 \leqslant i \leqslant n$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{G_i^q}{S_i+G_i^q} \leqslant 1 \tag{L}$$

证明 先设

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha}{n-1}-q=\beta\\&\alpha+\beta=p\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{n-1}{n}(p+q)>0\\ \beta=\dfrac{p-(n-1)q}{n}>0\end{cases}$$

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n>0$$

$$\begin{cases}a_1^\alpha \geqslant a_2^\alpha \geqslant \cdots \geqslant a_n^\alpha\\ a_1^\beta \geqslant a_2^\beta \geqslant \cdots \geqslant a_n^\beta\end{cases} \Rightarrow S_i^{(p)}=S_i^{(\alpha+\beta)} \geqslant \frac{1}{n-1}S_i(\alpha)S_i(\beta) \geqslant$$

$$\left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}{a_i}\right)^{\frac{\alpha}{n-1}} \cdot S_i(\beta)=a_i^{-\frac{\alpha}{n-1}} \cdot S_i(\beta) \Rightarrow a_i^q S_i(p) \geqslant a_i^{-(\frac{\alpha}{n-1}-q)} \cdot S_i^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$a_i^q S_i(p)+1 \geqslant \frac{S_i(\beta)}{a_i^\beta}+1=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^\beta}{a_i^\beta} \Rightarrow \sum\left(\frac{1}{a_i^q S_i^{(p)}+1}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^\beta}{\sum_{i=1}^{n} a_i^\beta}\right)=1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{-q}}{S_i(p)+a_i^{-q}}\right) \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{G_i^q}{S_i+G_i^q}\right) \leqslant 1$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

6

前面的推广 5 是推广 4 的系数推广，推广 6 是推广 4 的指数推广. 依照前面的方法技巧，我们不难将它们“三国归晋”成一个较全面的：

推广 7 设 $a_i>0, \lambda_i>0(1 \leqslant i \leqslant n, 3 \leqslant n \in \mathbf{N})$，且满足 $a_1 a_2 \cdots a_n=1$，指数 p，q 满足 $p>(n-1) q>0$，记 $S=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^p, S_i=S-\lambda_i a_i^p, G_i=\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_i}=\frac{1}{a_i}$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i G_i^q}{S_i+\lambda a_i^q}\right) \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^n}{n^n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)} \tag{M}$$

让我们再回首展望本题的探讨历程和步步脚印. 发现我们虽然艰辛地对式(A)作了一系列的推广，但均在一组基本元素$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$上“建房起楼”. 其实，我们完全有实力做得更美更妙更好，再将上面的推广 7 从一组基本元数推广到任意多组，建立“一统天下”的综合推广，它从元数、组数、系数、指数四个方面推广了式(A)：

综合推广 设 $\lambda_i>0, a_{ij}>0(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m, 3 \leqslant n \in \mathbf{N}, 1 \leqslant m \in \mathbf{N})$，指数 p, q 满足

$$p>(n-1) q>0$$

$$a_{1j} a_{2j} \cdots a_{nj}=1,1 \leqslant j \leqslant m$$

记 $S_j=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij}^p, S_{ij}=S_j-\lambda_i a_{ij}^p, G_{ij}=\frac{a_{1j} a_{2j} \cdots a_{nj}}{a_{ij}}=\frac{1}{a_{ij}}, \theta_j \in(0,1)(1 \leqslant j \leqslant m \in \mathbf{N})$，$\sum_{j=1}^{m} \theta_j=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i G_{ij}^q}{S_{ij}+\lambda_i G_{ij}^q}\right)^{\theta_j} \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^n}{n^n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)} \tag{N}$$

如果记 $x_{ij}=\frac{G_{ij}^q}{S_{ij}+\lambda_i G_{ij}^q}(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$，式(N)也可以写为

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_j\prod_{j=1}^{m}x_{ij}^{\theta_j}) \leqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^n}{n^n(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)} \tag{O}$$

提示　应用式(M)和赫尔特不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\prod_{j=1}^{m}x_{ij}^{\theta_j}) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\lambda_i x_{ij})^{\theta_j} \leqslant \prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_{ij})^{\theta_j} \leqslant \prod_{j=1}^{m}\lambda^{\theta_j}(\lambda\text{ 表示式(O)右边}) =$$

$$\lambda^{\sum_{j=1}^{m}\theta_j} = \lambda \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\prod_{j=1}^{m}x_{ij}^{\theta_j}) \leqslant \lambda$$

等号成立仅当 $a_{ij} = 1(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m), \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

很明显,当 $m = 1$ 时,式(O)与式(N)等价.

由于式(A)太美太妙,自然,它的配对式(E)如花似玉,而且,我们探索发现,式(E)也从指数、元数上推广为:

推广 8　设 $a_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n, 3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 且满足 $a_1a_2\cdots a_n = 1, k,\alpha,\beta,p,q > 0$,且 $\alpha \geqslant \max\{p(1+\beta), q(1+\beta)\}$,记

$$S = \sum_{i=1}^{n}a_i^p, S_i = S - a_i^p$$

$$G_i = \left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{1}{a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$G = \sum_{i=1}^{n}G_i^p$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\alpha}{(S_i + kG_i^q)^\beta} \geqslant \frac{n}{(n-1+k)^\beta} \tag{P}$$

注　式(P)中的 G_i 表示形式与前面不同,前面的指数 p,q 必须满足 $p > (n-1)q > 0$,而式(P)中的 p,q 不分大小,这样便拓宽了式(E)中的指数定义范围.

显然,当取 $n = 3, p = 5, q = 2$ 时,式(P)与式(E)等价.

证明　设 $\theta = \dfrac{\alpha}{1+\beta} \geqslant \max(p,q)$,且

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1^p \geqslant a_2^p \geqslant \cdots \geqslant a_n^p \\ a_1^{\theta-p} \geqslant a_2^{\theta-p} \geqslant \cdots \geqslant a_n^{\theta-p}\end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_i^\theta = \sum_{i=1}^{n}(a_i^p \cdot a_i^{\theta-p}) \geqslant$$

$$\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\theta-p}) \geqslant (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{\theta-p}{n}} = \sum_{i=1}^{n}a_i^p \geqslant n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^\theta \geqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^p \geqslant n \tag{①}$$

同理 $\sum_{i=1}^{n}a_i^\theta \geqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^q = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}S'_i$(其中 $S'_i = (\sum_{i=1}^{n}a_i^q) - a_i^q$) $\geqslant \sum_{i=1}^{n}G_i^q = G \geqslant$

$$n(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{q}{n}} = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_i^\theta \geqslant G \geqslant n \tag{②}$$

我们再简记 $m = n - 1 + k$,于是,应用权方和不等式有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{(S_i + kG_i^{q})^{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i^{\theta})^{1+\beta}}{(S_i + kG_i^{q})^{\beta}} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta})^{1+\beta}}{[\sum_{i=1}^{n}(S_i + kG_i^{q})]^{\beta}} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta})^{1+\beta}}{(\sum_{i=1}^{n} S_i + k\sum_{i=1}^{n} G_i^{q})^{\beta}} =$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta})^{1+\beta}}{[(n-1)S + kG]^{\beta}} = \frac{[(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta} + k\sum_{i=1}^{n} a_i^{\theta}]^{1+\beta}}{m^{1+\beta}[(n-1)S + kG]^{\beta}} \geqslant$$

$$\frac{[(n-1)S + kG]^{1+\beta}}{m^{1+\beta}[(n-1)S + kG]^{\beta}} =$$

$$\frac{(n-1)S + kG}{m^{1+\beta}} \geqslant \frac{(n-1)n + kn}{m^{1+\beta}} = \frac{nm}{m^{1+\beta}} = \frac{n}{m^{\beta}} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha}}{(S_i + kG_i^{q})^{\beta}} \geqslant \frac{n}{(n-1+k)^{\beta}}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$(与参数 k,指数 p,q 及 α,β 无关).

这正是式(P)的奇妙之处.

从上述证明可知,优美的式(P)不仅在证明中有一定难度,而且其技巧性也很强.

一道日本数奥题及联想

邓寿才

1

2004年日本数学奥林匹克有一道妙题是：

题目(2004,日本)　正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$,求证：

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leqslant 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\tag{A}$$

证明　记式(A)左边为 T,那么从已知有

$$T\leqslant 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{2a+b+c}{b+c}+\frac{2b+c+a}{c+a}+\frac{2c+a+b}{a+b}\leqslant 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$3+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\leqslant 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}\leqslant\left(\frac{a}{c}-\frac{a}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{b}{c+a}\right)+\left(\frac{c}{b}-\frac{c}{a+b}\right)\Leftrightarrow$$

$$A=\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(a+c)}+\frac{ca}{b(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}\tag{①}$$

由于

$$abcA=\frac{(ab)^2}{b+c}+\frac{(bc)^2}{c+a}+\frac{(ca)^2}{a+b}(\text{应用柯西不等式})\geqslant$$

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}(\text{应用3元对称不等式})\geqslant$$

$$\frac{3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)}{2(a+b+c)}=$$

$$\frac{3abc(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}abc\Rightarrow A\geqslant\frac{3}{2}$$

即式①成立,逆推之式(A)成立.

观察式(A)左右两边,我们发现式(A)左边关于 a,b,c 对称,而右边却不是,但是,我们同理可证

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leqslant 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\tag{B}$$

从外形结构上讲,式(B)与式(A)相互配对,天然成趣.且如果仍然记(A),(B)两式左边为 T,那么可得到珠联璧合的

$$T^2 \leqslant 4\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \tag{C}$$

显然,这是一个有趣的结果.如果原题将式(A)更换为式(C),在未寻觅到证法技巧时,也许将难住一批数奥选手,视式(C)为难题.

2

尽管式(A)右边结构不对称,但仍然可以从系数方面加权推广成:

推广 1 设 $x,y,z,a,b,c>0$ 满足 $a+b+c=1$,则有

$$x\left(\frac{1+a}{1-a}\right)+y\left(\frac{1+b}{1-b}\right)+z\left(\frac{1+c}{1-c}\right) \leqslant$$

$$2\left(x\frac{a}{c}+y\frac{b}{a}+z\frac{c}{b}\right)+Q_x \tag{D}$$

其中
$$Q_x=(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

特别地,当 $x=y=z$ 时,$Q_x=0$,式(D)代为式(A),当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时,式(D)为

$$2\sum x \leqslant 2\sum x+Q_x \Leftrightarrow Q_x \geqslant 0$$

显然成立,因此式(D)等号成立的条件是

$$x=y=z \text{ 及 } a=b=c=\frac{1}{3}$$

证明 设 $\lambda,\mu,v>0$,有

$$\sum\frac{(\lambda+\mu)^2ab}{c(b+c)}=\frac{1}{abc}\sum\frac{(\lambda+\mu)^2(ab)^2}{b+c} \geqslant$$

$$\frac{1}{abc}\cdot\frac{\left[\sum(\lambda+\mu)ab\right]^2}{\sum(b+c)}\text{(应用柯西不等式)}=$$

$$\frac{\left[\sum(\lambda+\mu)ab\right]^2}{2abc(a+b+c)} \geqslant$$

$$\frac{4\left(\sum\lambda\mu\right)\left(\sum ab\cdot bc\right)}{2abc(a+b+c)}=2\sum\lambda\mu\text{(应用杨克昌不等式)} \Rightarrow$$

$$\sum\frac{(\lambda+\mu)^2ab}{c(b+c)} \geqslant 2\sum\lambda\mu \Rightarrow$$

$$\sum\left[(\lambda+\mu)^2\left(\frac{a}{c}-\frac{a}{b+c}\right)\right] \geqslant 2\sum\lambda\mu \Rightarrow$$

$$2\sum(\lambda+\mu)^2\frac{a}{c} \geqslant 2\sum\left[(\lambda+\mu)^2\cdot\frac{a}{b+c}\right]+4\sum\lambda\mu=$$

$$\sum(\lambda+\mu)^2\left(1+\frac{2a}{b+c}\right)+4\sum\lambda\mu-\sum(\lambda+\mu)^2=$$

$$\sum(\lambda+\mu)^2\left(\frac{1+a}{1-a}\right)-Q_x\Rightarrow$$

$$\sum(\lambda+\mu)^2\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\leqslant\sum(\lambda+\mu)^2\frac{a}{c}+Q_x \tag{①}$$

其中

$$Q_x=\sum(\lambda+\mu)^2-4\sum\lambda\mu \tag{②}$$

现设 $S=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$，且

$$\begin{cases}\lambda+\mu=\sqrt{x}\\ \mu+v=\sqrt{y}\\ v+\lambda=\sqrt{z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=(S-2\sqrt{y})/2\\ \mu=(S-2\sqrt{z})/2\\ v=(S-2\sqrt{x})/2\end{cases}\Rightarrow\sum\lambda\mu=\frac{1}{4}\sum(S-2\sqrt{y})(S-2\sqrt{z})=$$

$$\frac{1}{4}\sum[S^2-2(\sqrt{y}+\sqrt{z})S+4\sqrt{yz}]=\frac{3}{4}S^2-\frac{1}{2}S\sum(\sqrt{y}+\sqrt{z})+\sum\sqrt{yz}=$$

$$\frac{3}{4}S^2-S^2+\sum\sqrt{yz}=\sum\sqrt{yz}-\frac{1}{4}S^2=\sum\sqrt{yz}-\frac{1}{4}\left(\sum\sqrt{x}\right)^2=$$

$$\sum\sqrt{yz}-\frac{1}{4}\left(\sum x+2\sum\sqrt{yz}\right)=\frac{1}{4}\left(2\sum\sqrt{yz}-\sum x\right)\Rightarrow$$

$$4\sum\lambda\mu-\sum(\lambda+\mu)^2=\left(2\sum\sqrt{yz}-\sum x\right)-\sum x=$$

$$-\left(2\sum x-2\sum\sqrt{yz}\right)=-\left[\sum(y-2\sqrt{yz}+z)\right]=$$

$$-\sum(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2=-Q_x\Rightarrow\sum x\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\leqslant2\sum\left(x\frac{a}{c}\right)+Q_x$$

即式(D)成立，等号成立仅当 $x=y=z$ 及 $a=b=c=\frac{1}{3}$.

如果我们证

$$T_x=\sum x\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$$

$$\begin{cases}M_x=x\dfrac{a}{c}+y\dfrac{b}{a}+z\dfrac{c}{b}\\ M_y=x\dfrac{a}{b}+y\dfrac{b}{c}+z\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

式(D)即

$$\left.\begin{aligned}T_x-Q_x\leqslant2M_x\\ \text{同理：}T_x-Q_x\leqslant2M_y\end{aligned}\right\}\Rightarrow(T_x-Q_x)^2\leqslant4M_xM_y\Rightarrow$$

$$T_x-Q_x\leqslant2\sqrt{M_xM_y}\Rightarrow T_x\leqslant2\sqrt{M_xM_y}+Q_x \tag{E}$$

这正好是式(C)的加权推广.

有趣的是，如果我们应用柯西不等式，有

$$M_xM_y=\left(x\frac{a}{c}+y\frac{b}{a}+z\frac{c}{b}\right)\left(z\frac{c}{a}+x\frac{a}{b}+y\frac{b}{c}\right)\geqslant$$

$$(\sqrt{zx}+\sqrt{xy}+\sqrt{yz})^2\Rightarrow\sqrt{M_xM_y}\geqslant\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy} \tag{③}$$

3

至今,我们仍然习惯用记号

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

在前面的式(A)的证明过程中,我们知道有

$$3+2P\leqslant 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\Rightarrow$$

$$P\leqslant\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)-\frac{3}{2} \tag{①}$$

同理有

$$P\leqslant\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{3}{2} \tag{②}$$

至此,我们忽然回忆起在本刊第二辑(文化卷)163 页系统探讨了的基本不等式

$$P=\sum\frac{a}{b+c}\geqslant\frac{3}{2} \tag{③}$$

很明显,式①,②是③的两个配对完善式,这表明我们在过去对式③的探讨不够详尽,还有新奇的结论可补充,真是探索无限.

结论 1 设 $a,b,c>0$

$$Q=\frac{1}{12}\sum\left(\sqrt[4]{\frac{c+a}{b+c}}-\sqrt[4]{\frac{b+c}{c+a}}\right)^4$$

$$R=\frac{1}{2}\sum\left|\frac{\sqrt{bc}}{a}-\frac{a}{\sqrt{bc}}\right|$$

则有

$$\frac{3}{2}+R\geqslant P\geqslant\frac{3}{2}+Q \tag{F}$$

显然,这是一个很有趣的完善式.

证明 (1) 我们简记

$$(p,q,r)=(b+c,c+a,a+b)\Rightarrow 3+2P=\sum\frac{2a+b+c}{b+c}=T=$$

$$\frac{q+r}{p}+\frac{r+p}{q}+\frac{p+q}{r}=\left(\frac{q}{p}+\frac{p}{q}\right)+\left(\frac{r}{q}+\frac{q}{r}\right)+\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{p}\right)\geqslant$$

$$\frac{1}{6}\left[\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{r}{p}}+\sqrt{\frac{p}{r}}+\sqrt{\frac{q}{r}}+\sqrt{\frac{r}{q}}\right]^2=$$

$$\frac{1}{6}\left[\sum\left(\sqrt[4]{\frac{q}{p}}-\sqrt[4]{\frac{p}{q}}\right)^2+6\right]^2\geqslant$$

$$\frac{1}{6}\left[\sum\left(\sqrt[4]{\frac{q}{p}}-\sqrt[4]{\frac{p}{q}}\right)^2\right]^4+6\Rightarrow$$

$$P \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{12}\left[\sum\left(\sqrt[4]{\frac{q}{p}} - \sqrt[4]{\frac{p}{q}}\right)^2\right]^2 \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{12}\sum\left(\sqrt[4]{\frac{q}{p}} - \sqrt[4]{\frac{p}{q}}\right)^4 \Rightarrow$$

$$P \geqslant \frac{3}{2} + Q$$

(2) 我们记

$$M_1 = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}, M_2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

于是有
$$M_1M_2 = 3 + \sum\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{a^2}{bc}\right) = 3^2 + \sum\left(\frac{\sqrt{bc}}{a} - \frac{a}{\sqrt{bc}}\right)^2 \leqslant$$

$$\left[3 + \sqrt{\sum\left(\frac{\sqrt{bc}}{a} - \frac{a}{\sqrt{bc}}\right)^2}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{M_1M_2} \leqslant 3 + \sqrt{\sum\left|\frac{\sqrt{bc}}{a} - \frac{a}{\sqrt{bc}}\right|^2} \leqslant$$

$$3 + \sum\left|\frac{\sqrt{bc}}{a} - \frac{a}{\sqrt{bc}}\right| \quad ④$$

又
$$M_1M_2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geqslant \left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ca}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{M_1M_2} \geqslant \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} = 2p \Rightarrow$$

$$p \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{M_1M_2} \leqslant \frac{3}{2} + p$$

综上所述,式(F)成立,等号成立仅当 $a = b = c$.

利用原赛题的已知条件可以旧翻新成一个:

结论 2 设 $a,b,c > 0$,且 $a + b + c = 1$,则有

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9 + 4\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}\right) \quad (G)$$

分析 观察式(G)知,当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时等号成立,此时有

$$\frac{1-a}{a} = \frac{4a}{1-a} = 2$$

这启发我们将式(G)变形为

$$3\sum\frac{1-a}{a} \geqslant 12 + 4\sum\frac{a}{1-a} \Leftrightarrow \quad ⑤$$

$$3\left(\sum\frac{1-a}{a} + \sum\frac{4a}{1-a}\right) \geqslant 12 + 16\sum\frac{a}{1-a} \Leftrightarrow$$

$$3\sum\left(\frac{1-a}{a} + \frac{4a}{1-a}\right) \geqslant 12 + 16\sum\frac{a}{1-a} \quad ⑥$$

但是

$$\sum\left(\frac{1-a}{a} + \frac{4a}{1-a}\right) \geqslant 12, \sum\frac{a}{1-a} \geqslant \frac{3}{2}$$

因此用此法不能证明式⑥,从而不能证明式(G),于是我们另觅新路:

证明 记 $p=\sum\frac{a}{1-a}$,设

$$a\geqslant b\geqslant c>0$$

$$\frac{1}{1-a}\geqslant\frac{1}{1-b}\geqslant\frac{1}{1-c}>0\Rightarrow$$

$$p=\sum\frac{a}{1-a}\geqslant\frac{1}{3}(\sum a)(\sum\frac{1}{1-a})$$

(应用切比雪夫不等式)⇒

$$p\geqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{1-a} \quad ⑦$$

又

$$p=\sum\frac{a}{1-a}=\sum\frac{a}{b+c}\leqslant\frac{1}{4}\sum a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=$$

$$\frac{1}{4}\sum(\frac{a}{b}+\frac{a}{c})=\frac{1}{4}\sum(\frac{b}{a}+\frac{c}{a})=$$

$$\frac{1}{4}\sum\frac{1-a}{a}\Rightarrow p\leqslant\frac{1}{4}\sum\frac{1}{a}-\frac{3}{4} \quad ⑧$$

由 ⑦,⑧ 得

$$\frac{1}{4}\sum\frac{1}{a}-\frac{3}{4}\geqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{1-a}\Rightarrow 3\sum\frac{1}{a}\geqslant 9+4\sum\frac{1}{1-a}$$

等号成立仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$.

上述以 p 为中间量作为突破口,采用“两岸开花”(两边夹)的方法,漂亮地证明了式(G),仿照上述技巧,不难将式(G)推广为

推广 2 设 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n,3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则有

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2+(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}$$

4

仿照上面证法技巧,我们不难证明:

结论 3 设 $a_i>0(i=1,2,3,4)$,则有

$$9(\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3})\leqslant$$

$$2\times(\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_2+a_3}{a_4+a_1}+\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}+\frac{a_4+a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2+a_4}{a_1+a_3}+\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4})\leqslant$$

$$\frac{a_2+a_3+a_4}{a_1}+\frac{a_3+a_4+a_1}{a_2}+\frac{a_4+a_1+a_2}{a_3}+\frac{a_1+a_2+a_3}{a_4} \quad (H)$$

再将式(H)和它的配对式推而广之便是:

推广 3 设每次从 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意取出 k 个数之算术平均为 $A_i^{(k)}$,剩余

$n-k$ 个数的算术平均为 $A_i^{(n-k)}(1\leqslant k\leqslant n-1,3\leqslant n\in\mathbf{N})$,再记

$$p_k=\frac{1}{C_n^k}\Big(\sum\frac{A_i^{(k)}}{A_i^{(n-k)}}\Big),T_k=\Big(\prod\frac{A_i^{(k)}}{A_i^{(n-k)}}\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}$$

则有结论

$$P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_{n-1} \tag{I}$$

$$T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots\leqslant T_{n-1} \tag{J}$$

略证 (1) 记 $S_i^{(k)}=kA_i^{(k)},S_i^{(n-k)}=(n-k)A_i^{(n-k)},f_n^{(k)}=\sum\frac{S_i^{(k)}}{S_i^{(n-k)}}$,则有 $P_k=\frac{n-k}{kC_n^k}f_n^{(k)}$. 由于

$$P_k\leqslant P_{k+1}\Leftrightarrow\frac{n-k}{kC_n^k}f_n^{(k)}\leqslant\frac{n-k-1}{(k+1)C_n^{k+1}}f_n^{(k+1)} \tag{①}$$

再注意到等式

$$(n-k-1)C_n^{k+1}S_i^{(n-k)}=(n-k)\sum S_i^{(n-k-1)} \tag{②}$$

两边均有 $(n-k)(n-k-1)C_n^{k+1}$ 项单项,于是有

$$\begin{aligned}\frac{f_n^{(k)}C_n^{k+1}}{n-k-1}=\frac{f_n^{(k)}(C_n^{k+1})^2}{(n-k-1)C_n^{k+1}}&=\frac{(C_n^{k+1})^2\Big(\sum\frac{S_i^{(k)}}{S_i^{(n-k)}}\Big)}{(n-k-1)C_n^{k+1}}=\\&\sum\Big[\frac{S_i^{(k)}\cdot(C_n^{k+1})^2}{(n-1)C_n^{k+1}S_i^{(n-k)}}\Big]=\\&\sum\Big[\frac{S_i^{(k)}}{n-k}\cdot\frac{(C_n^{k+1})^2}{\sum S_i^{(n-k-1)}}\Big]\text{(应用柯西不等式)}\leqslant\\&\sum\Big[\frac{S_i^{(k)}}{n-k}\Big(\sum\frac{1}{S_i^{(n-k-1)}}\Big)\Big]=\frac{1}{n-k}\sum\Big[\sum\frac{S_i^{(k)}}{S_i^{(n-k-1)}}\Big]\Rightarrow\\&\frac{(n-k)C_n^{k+1}}{n-k-1}f_n^{(k)}\leqslant\sum\Big[\sum\frac{S_i^{(k)}}{S_i^{(n-k-1)}}\Big]=\\&\Big(\frac{kC_n^k}{k+1}\Big)\Big[\sum\frac{S_i^{(k+1)}}{S_i^{(n-k-1)}}\Big]=\Big(\frac{kC_n^k}{k+1}\Big)f_n^{(k+1)}\Rightarrow\\&P_k\leqslant P_{k+1}(1\leqslant k\leqslant n-2)\Rightarrow P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_{n-1}\end{aligned}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$(注:式(I)可系统为 $1\leqslant P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_{n-1}$).

(2) 注意到 $C_n^{n-k}=C_n^k,C_n^{n-k-1}=C_n^{k+1}$,应用我们过去建立的定理有

$$\begin{cases}\Big[\prod A_i^{(k+1)}\Big]^{\frac{1}{C_n^{k+1}}}\geqslant\Big[\prod A_i^{(k)}\Big]^{\frac{1}{C_n^k}}\\\Big[\prod A_i^{(n-k-1)}\Big]^{\frac{1}{C_n^{n-k-1}}}\leqslant\Big[\prod A_i^{(n-k)}\Big]^{\frac{1}{C_n^{n-k}}}\end{cases}\Rightarrow\Big[\prod\Big(\frac{A_i^{(k)}}{A_i^{(n-k)}}\Big)\Big]^{\frac{1}{C_n^k}}\leqslant\Big[\prod\Big(\frac{A_i^{(k+1)}}{A_i^{(n-k+1)}}\Big)\Big]^{\frac{1}{C_n^{k+1}}}\Rightarrow$$

$$T_k\leqslant T_{k+1}(1\leqslant k\leqslant n-2)\Rightarrow T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots\leqslant T_{n-1}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

综合上述,推广 3 证毕.

其实，当 n 为奇数时有

$$T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_{\frac{n-1}{2}} \leqslant 1 \leqslant T_{\frac{n+1}{2}} \leqslant \cdots \leqslant T_{n-1}$$

当 n 为偶数时有

$$T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_{\frac{n-2}{2}} \leqslant 1 \leqslant T_{\frac{n}{2}} \leqslant \cdots \leqslant T_{n-1}$$

如果我们证
$$m = \frac{1}{2}\left[n - \frac{3+(-1)^n}{2}\right]$$
那么上面两式可合并为

$$T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_m \leqslant 1 \leqslant T_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant T_{n-1} \tag{J$_1$}$$

可见，推广3虽难，却趣味优美.

5

第36届IMO中的第2题是俄罗斯提供的一道名题：

设 a,b,c 为正实数，且满足 $abc = 1$，试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2} \tag{K}$$

在本书2008年第二辑(竞赛卷)第13页的《关于一道IMO名题的推广》一文中，笔者建立了式(K)的一系推广结论，借着本篇的东风，我们在此再作几点补充.

(1) 彼文中向大家介绍了式(K)的四个加权推广，下面我们再补充它的另外三个加权推广.

推广4 设正数 a,b,c 满足 $abc = 1$，系数 $\lambda,\mu,v \in (\frac{3}{5},3)$ 且 $\lambda+\mu+v=3$，则

$$P_\lambda \equiv \frac{\mu+v}{a^3(b+c)} + \frac{v+\lambda}{b^3(c+a)} + \frac{\lambda+\mu}{c^3(a+b)} \geqslant$$
$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(5\lambda-3)(5\mu-3)(5v-3)} \tag{K$_1$}$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$ 且 $\lambda=\mu=v=1$.

证明 记 $S = bc+ca+ab$，函数

$$f(x) = \frac{x}{S-x} = \frac{S}{S-x} - 1$$

那么在 $(0,S)$ 上 $f(x)$ 是增函数，因此对任意 $x \in (0,S)$ 恒有

$$(x-\frac{S}{3})[f(x)-f(\frac{S}{3})] \geqslant 0 \Rightarrow (x-\frac{S}{3})[f(x)-\frac{1}{2}] \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$(3x-S)[f(x)-\frac{1}{2}] \geqslant 0 \Rightarrow (3x-S)f(x) \geqslant \frac{1}{2}(3x-S) \Rightarrow$$
$$2xf(x)-(S-x)f(x) \geqslant \frac{1}{2}(3x-S) \Rightarrow$$
$$2xf(x)-x \geqslant \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}S \Rightarrow$$

$$xf(x) \geqslant \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}S \doteq \frac{x^2}{S-x} \geqslant \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}S$$

取 $x = bc$ 有(注意 $abc = 1$)

$$\frac{(bc)^2}{ab+ca} \geqslant \frac{5}{4}bc - \frac{1}{4}S \Rightarrow \frac{1}{a^3(b+c)} \geqslant \frac{1}{4}(5bc - S) \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{a^3(b+c)} \geqslant \frac{1}{4}(5\lambda bc - \lambda S) \Rightarrow P_\lambda = \sum \frac{\lambda}{a^3(b+c)} \geqslant$$

$$\frac{1}{4}\sum(5\lambda bc - \lambda S) = \frac{1}{4}\left(\sum 5\lambda bc - S\sum\lambda\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\sum 5\lambda bc - \sum 3bc\right) = \frac{1}{4}\sum(5\lambda - 3)bc \geqslant$$

$$\frac{3}{4}\left[\prod(5\lambda - 3)bc\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}\left[\prod(5\lambda - 3)\right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$P_\lambda \geqslant \frac{3}{4}\left[\prod(5\lambda - 3)\right]^{\frac{1}{3}}$$

等号成立仅当 $a = b = c = 1, \lambda = \mu = v = 1$.

推广 5 设 a, b, c, λ, μ, v 均为正实数,且满足 $abc = 1$ 及 $\mu v + v\lambda + \lambda\mu > \frac{72}{25}$ 与 $\lambda + \mu + v = 3$,则有

$$P_\lambda = \frac{\lambda}{a^3(b+c)} + \frac{\mu}{b^3(c+a)} + \frac{v}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3[25(\mu v + v\lambda + \lambda\mu) - 72]} \tag{K_2}$$

等号成立仅当 $a = b = c = 1$ 及 $\lambda = \mu = v = 1$.

证明 记 $S = bc + ca + ab$,函数

$$f(x) = \frac{x}{S-x} = \frac{S}{S-x} - 1$$

由前面的证明有

$$P_\lambda \geqslant \frac{1}{4}\sum(5\lambda - 3)bc \tag{①}$$

设 $\begin{cases} 5\lambda - 3 = p + q \\ 5\mu - 3 = r + p \\ 5v - 3 = p + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 6 - 5\lambda \\ q = 6 - 5\mu \\ r = 6 - 5v \end{cases} \Rightarrow qr + rp + pq = \sum(6 - 5\mu)(6 - 5v) =$

$$\sum[36 - 30(\mu + v) + 25\mu v] =$$

$$36 \times 3 - 30\sum(\mu + v) + 25\sum\mu v =$$

$$36 \times 3 - 60\sum\lambda + 25\sum\mu v =$$

$$36 \times 3 - 60 \times 3 + 25\sum\mu v =$$

$$25\sum\mu v - 72 > 0 \Rightarrow P_\lambda \geqslant$$

$$\frac{1}{4}\sum(q + r)bc(\text{应用杨克昌不等式}) \geqslant$$

$$\frac{2}{4}[(\sum qr)(\sum bc\cdot ca)]^{\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{1}{2}[(\sum qr)\sum a]^{\frac{1}{2}}\geqslant$$
$$\frac{1}{2}[(\sum qr)\cdot 3\sqrt[3]{abc}]^{2}=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{3(\sum qr)}=\frac{1}{2}\sqrt{3(25\sum\mu v-72)}\Rightarrow$$
$$P_\lambda=\sum\frac{\lambda}{a^3(b+c)}\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{3[25(\mu v+v\lambda+\lambda\mu)-72]}$$

等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=\mu=v=1$.

(2) 行文到此,我们又回想在本书第二辑(竞赛卷)中在第20页为式(K)建立的第一个加强式

$$T\equiv\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4}\qquad(*)$$

我们能从系数方面加权推广式(*)吗?先让我们试探虚实,投石问路:

从前面的证明过程有

$$(5bc-S)(5ca-S)=S^2-5(bc+ca)S+25\cdot abc^2=$$
$$S^2-5(bc+ca)S+25c$$

因此

$$M_\lambda=\sum\frac{\lambda a^3}{(a+b)(c+a)}=\sum\frac{\lambda a^3bc}{(ac+bc)(bc+ab)}=\sum\frac{\lambda a^2}{(ca+bc)(bc+ab)}=$$
$$\sum\frac{\lambda(ab)^2(ca)^2}{(ca+bc)(bc+ab)}\geqslant\sum\lambda(\frac{5}{4}ba-\frac{1}{4}S)(\frac{5}{4}ca-\frac{1}{4}S)\Rightarrow$$
$$16M_\lambda\geqslant\sum\lambda(5ba-S)(5ca-S)=$$
$$\sum\lambda[S^2-5(ab+ca)S+25a]=$$
$$(\sum\lambda)S^2-5S\sum(\lambda ab+\lambda ca)+25\sum\lambda a=$$
$$3S^2-5S\sum(\mu+v)bc+25\sum\lambda a=$$
$$S[3S-5\sum(\mu+v)bc]+25\sum\lambda a=$$
$$S[\sum 3bc-\sum 5(\mu+v)bc]+25\sum\lambda a=$$
$$S\sum[3-5(\mu+v)]bc+25\sum\lambda a=$$
$$S\sum[3-5(3-\lambda)]bc+25\sum\lambda a=$$
$$-S\sum(12-5\lambda)bc+25\sum\lambda a=$$
$$-\frac{1}{7}(\sum 7bc)\sum(12-5\lambda)bc+25\sum\lambda a\geqslant$$
$$-\frac{1}{28}[(\sum 7bc)+\sum(12-5\lambda)bc]^2+25\sum\lambda a=$$

$$-\frac{1}{28}[\sum(19-5\lambda)bc]^2+25\sum\lambda a\Rightarrow$$

$$M_\lambda\geqslant\frac{1}{16}\{25\sum\lambda a-\frac{1}{28}[\sum(19-5\lambda)bc]^2\}$$

步行到顿觉举步维艰,可见欲建立式(*)的加权推广得另行新路.

(3) 尽管如此,但是我们并不灰心失望,因为我们还可以补充式(K) 的更新奇美妙的加权推广:

推广 6 设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$,正系数 λ,μ,v 满足 $\lambda+\mu+v=3$ 及

$$\frac{\lambda-1}{a}+\frac{\mu-1}{b}+\frac{v-1}{c}\geqslant 0$$

则有

$$P_\lambda\equiv\frac{\lambda}{a^3(b+c)}+\frac{\mu}{b^3(c+a)}+\frac{v}{c^3(a+b)}\geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^2-3 \qquad (K_3)$$

至今,我们就为式(K) 建立了 7 个加权推广,这是我们不辞艰辛,喜获丰收.

证明 我们先设$(x,y,z)=(bc,ca,ab)$,$S=x+y+z$,则

$$S\geqslant 3(xyz)^{\frac{1}{3}}=3(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}}=3$$

由

$$\frac{\lambda-1}{a}+\frac{\mu-1}{b}+\frac{v-1}{c}\geqslant 0\Rightarrow(\lambda-1)bc+(\mu-1)ca+(v-1)ab\geqslant 0\Rightarrow$$

$$\sum\lambda x\geqslant\sum x=S\Rightarrow\sum\lambda x-1\geqslant S-1 \qquad ②$$

仍然设在$(0,S)$ 内的增函数为 $f(x)=\frac{x}{S-x}$,故有

$$(x-1)[f(x)-f(1)]\geqslant 0\Rightarrow xf(x)\geqslant f(x)+(x-1)f(1)=(\frac{S}{S-x}-1)+\frac{x-1}{S-1}\Rightarrow$$

$$P_\lambda=\sum\frac{\lambda}{a^3(b+c)}=\sum\frac{\lambda(bc)^2}{ab+ca}=\sum\lambda xf(x) \qquad ③$$

又

$$\sum\lambda xf(x)\geqslant S\sum\frac{\lambda}{S-x}-\sum\lambda+\frac{\sum\lambda(x-1)}{S-1}=$$

$$\frac{1}{2}\sum(S-x)\sum\frac{\lambda}{S-x}-3+\frac{\sum\lambda x-\sum\lambda}{S-1}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-3+\frac{\sum\lambda x-3}{S-1}=$$

$$\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-3-\frac{2}{S-1}+\frac{(\sum\lambda x)-1}{S-1}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-3-\frac{2}{3-1}+1\Rightarrow$$

$$P_\lambda=\sum\lambda xf(x)\geqslant\frac{1}{2}(\sum\sqrt{\lambda})^2-3$$

即式(K_3)成立，等号成立仅当 $a=b=c=1$ 及 $\lambda=\mu=v=1$.

(4) 最后，我们将推广 1 从 3 个正元素推广到 n 个正元数中去：

推广 7 设 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$，系数 $\lambda_i>\frac{n}{2n-1}(1\leqslant i\leqslant n,3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n$，记 $S=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$，则有

$$P_{\lambda}^{(n)}\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i/a_i^2}{S-\frac{1}{a_i}}\geqslant\frac{n}{(n-1)^2}\{\prod_{i=1}^{n}[(2n-1)\lambda_i-n]\}^{\frac{1}{n}}\tag{K_4}$$

特别地，当 $n=3$ 时式(K_4)等价于式(K_1).

证明 注意到 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\geqslant n(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{-\frac{1}{n}}=n$，仍然设函数

$$f(x)=\frac{x}{S-x}=\frac{S}{S-x}-1\tag{④}$$

那么在$(0,S)$内 $f(x)$ 是增函数，于是有 $f(\frac{S}{n})=\frac{1}{n-1}$，且有不等式

$$(x-\frac{S}{n})[f(x)-f(\frac{S}{n})]\geqslant0\Rightarrow(nx-S)[f(x)-\frac{1}{n-1}]\geqslant0\Rightarrow(nx-S)f(x)\geqslant\frac{nx-S}{n-1}\Rightarrow$$

$$(n-1)xf(x)+(x-S)f(x)\geqslant\frac{nx-S}{n-1}\Rightarrow$$

$$(n-1)xf(x)\geqslant x+\frac{nx-S}{n-1}=\frac{2n-1}{n-1}x-\frac{S}{n-1}\tag{⑤}$$

现设 $x_i=a_i^{-1}(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $S\geqslant n$，有

$$(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_if(x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}(2n-1)\lambda_ix_i-S\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}(2n-1)\lambda_ix_i-nS=$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2n-1)\lambda_ix_i-\sum_{i=1}^{n}nx_i=\sum_{i=1}^{n}[(2n-1)\lambda_i-n]x_i\geqslant$$

$$n\{\prod_{i=1}^{n}[(2n-1)\lambda_i-n]x_i\}^{\frac{1}{n}}=n\{\prod_{i=1}^{n}[(2n-1)\lambda_i-n]\}^{\frac{1}{n}}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow$$

$$n\{\prod_{i=1}^{n}[(2n-1)\lambda_i-n]\}^{\frac{1}{n}}\Rightarrow$$

$$(n-1)^2P_{\lambda}^{(n)}=(n-1)\sum_{i=1}^{n}[\lambda_ix_if(x_i)]\geqslant$$

$$n\{\prod_{i=1}^{n}[(2n-1)\lambda_i-n]\}^{\frac{1}{n}}\Rightarrow$$

$$P_{\lambda}^{(n)}\geqslant\frac{n}{(n-1)^2}\{\prod_{i=1}^{n}[(2n-1)\lambda_i-n]\}^{\frac{1}{n}}$$

等号成立仅当 $a_i=1,\lambda_i=1(1\leqslant i\leqslant n)$.

(5) 现在，如果我们设 a,b,c,λ,μ,v 为任意正数，那么有

$$4\sum\frac{\lambda a}{b+c}\leqslant\sum\lambda a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=\sum(\lambda\frac{a}{b}+\lambda\frac{a}{c})=\sum(\mu\frac{b}{a}+v\frac{c}{a})\Rightarrow$$

$$4\sum\frac{\lambda a}{b+c}\leqslant\sum\frac{\mu b+vc}{a}\tag{H$_1$}$$

这是一个简单的趣味小结论,取 $\lambda=\mu=v$,又得其特例

$$4\sum\frac{a}{b+c}\leqslant\sum\frac{b+c}{a}\tag{H$_2$}$$

应用3元对称不等式有

$$3\sum(\frac{a}{b+c})(\frac{b}{c+a})\leqslant(\sum\frac{a}{b+c})^2\tag{⑥}$$

$$3\sum(\frac{b+c}{a})(\frac{c+a}{b})\leqslant(\sum\frac{b+c}{a})^2\tag{⑦}$$

参照式(H_2),强烈的好奇心向我们提问:"式(H_2)能有配对式

$$16\sum(\frac{a}{b+c})(\frac{b}{c+a})\leqslant\sum(\frac{b+c}{a})(\frac{c+a}{b})\tag{H$_3$}$$

吗?"

这一问题确实提得很有趣,具我们初探,欲使式(H_3)成立,必须要一个约束条件,即可有条件地将式(H_3)演化为:

结论4 设正实数 a,b,c 满足条件

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geqslant\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$$

那么式(H_3)成立.

证明 由于

$$\begin{aligned}16\sum(\frac{b}{c+a})(\frac{c}{a+b})\leqslant&\sum[b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})\cdot c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})]=\sum[(1+\frac{b}{a})(1+\frac{c}{a})]=\\&\sum[1+\frac{b+c}{a}+\frac{bc}{a^2}]=3+\sum\frac{b+c}{a}+\sum\frac{bc}{a^2}\leqslant\\&3+\sum\frac{b+c}{a}+\sum\frac{a^2}{bc}=\sum(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a^2}{bc})=\\&\sum(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a^2}{bc})=\sum(1+\frac{a}{b})(1+\frac{a}{c})=\\&\sum[(\frac{c+a}{b})(\frac{a+b}{c})]\Rightarrow\\&\sum(\frac{c+a}{b})(\frac{a+b}{c})\geqslant16\sum(\frac{b}{c+a})(\frac{c}{a+b})\end{aligned}$$

即式(H_3)成立,等号成立仅当 $a=b=c$.

旧题新解

——一组奥赛题的新证

邓寿才

1

在许多数奥书刊上，都可见到如下各题：

题 1 已知 $v>0, u\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，求证：

$$(u-v)^2+(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v})^2\geqslant 8 \qquad ①$$

分析 不等式 ① 左边的结构酷似两点间的距离公式

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

根号内的部分，如果我们构造点 $p(u,\sqrt{2-u^2})$，$Q(v,\frac{9}{v})$．如图 1 所示，那么点 P 位于半圆 $x^2+y^2=2(y\geqslant 0)$ 上，点 Q 位于双曲线 $xy=9$ 在第一象限内的一支上，而 $|PQ|^2$ 恰好表示式 ① 的左边．

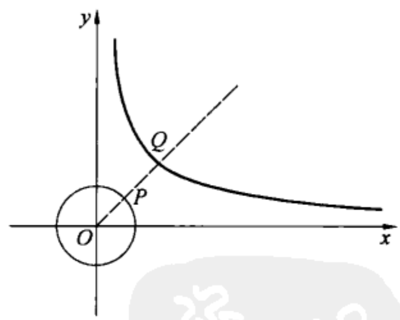


图 1

显见，当 P,Q 分别是直线 $y=x$ 与半圆 $x^2+y^2=2(y\geqslant 0)$ 和双曲线弧 $xy=9(x>0,y>0)$ 的交点时，$|PQ|$ 取最小值，此时 $P(1,1)$，$Q(3,3)$，$|PQ|=2\sqrt{2}$，$|PQ|^2=8$，故原不等式得证．

本题是一道美国数奥名题，许多数奥书刊上均采用上述数形结合的方法证明，显得非常直观简洁，令人惊叹．

欣赏罢上述简妙的证明后，我们不仅会好奇地问："题 1 还有其他的证法吗？" 在数学世界里，没有一枝独秀，而是百花开放，百家争鸣．

其实，从已知条件 $u\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，使我们联想到 $|u|\leqslant\sqrt{2}$，从而进一步联想到可设

$u=\sqrt{2}\cos\theta$,于是 $2-u^2=2\sin^2\theta$,这样顿使我们眼前“云开雾散,晴空万里”,仿佛“柳暗花明又一村”.

新证 记原不等式左边为 S,且设

$$u=\sqrt{2}\cos\theta\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\sqrt{2-u^2}=\sqrt{2}\,|\sin\theta| \\ t^2=v^2+\dfrac{81}{v^2}\geqslant 18\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$S=(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2=$$

$$(\sqrt{2}\cos\theta-v)^2+\left(\sqrt{2}\,|\sin\theta|-\frac{9}{v}\right)^2=$$

$$2+t^2-2\sqrt{2}(v\cos\theta+9\,|\sin\theta|/v)(\text{应用柯西不等式})\geqslant$$

$$2+t^2-2\sqrt{2}\sqrt{\left(v^2+\frac{81}{v^2}\right)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=$$

$$2+t^2-2\sqrt{2}t=(t-\sqrt{2})^2=$$

$$\left(\sqrt{v^2+\frac{81}{v^2}}-\sqrt{2}\right)^2\geqslant(\sqrt{2\times 9}-\sqrt{2})^2\Rightarrow S\geqslant 8$$

以上两种证法相对比,前者显得直观简捷,而后者则新奇自然.

2

题 2(1978 年北京市赛题) 设 A,B 为直角 $\angle xOy$ 边上的两个动点,且 $PA+PB=l$ 是定长,求四边形 $PAOB$ 的面积(以下设为 S)的最大值.

本题是当年我国的一道优秀赛题,当时笔者刚上初中,对它一无所知.其实,此题既“古老”(距今已 30 年),又“年轻”(至今仍具魅力),颇富趣味性.我们绕开本题的参考解法,从新的角度去解答它.

新解 如图 2,设 AO,BO,PA,PB 的长依次为 y,x,n,m,则 $m+n=l$.

再设 $\angle APB=\theta\in(0,\pi]$,则

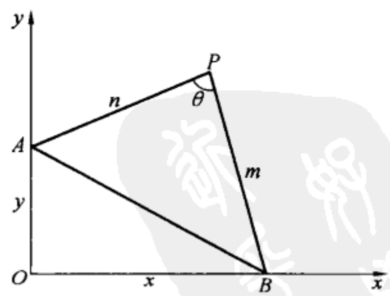


图 2

$$S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}mn\sin\theta\leqslant$$

$$\frac{1}{4}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}mn\sin\theta=$$

$$\frac{1}{4}AB^2+\frac{1}{2}mn\sin\theta=$$

$$\frac{1}{4}(m^2+n^2-2mn\cos\theta)+\frac{1}{2}mn\sin\theta=$$

$$\frac{1}{4}[(m+n)^2-2mn(1+\cos\theta)]+\frac{1}{2}mn\sin\theta=$$

$$\frac{1}{4}l^2+\frac{1}{2}mnf(\theta) \qquad ①$$

其中

$$f(\theta)=\sin\theta-\cos\theta-1 \qquad ②$$

观察式②知，当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\theta)<0, S<\frac{1}{4}l^2$；

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\theta)=0, S=\frac{1}{4}l^2$；

当 $\theta=\pi$ 时，$f(\theta)=0, S=\frac{1}{4}l^2$；

当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$f(\theta)>0$.

$$f(\theta)=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{3}{4}\pi)-1\leqslant\sqrt{2}-1\Rightarrow S\leqslant\frac{l^2}{4}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}mn\leqslant$$

$$\frac{l^2}{4}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{l^2}{4}+\frac{\sqrt{2}-1}{8}l^2=\frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2\Rightarrow$$

$$S_{\max}=\frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2$$

综合上述，S 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2$，当 $AO=BO$，且 $PA=PB$，$\angle P=\theta=\frac{3}{4}\pi$ 时达到.

回首反顾，可见上述证法自然流畅，给人耳目一新的感觉，本题还有一个最简洁的解法是：

另解 视 xOy 为直角坐标，依次作出 APB 在另外三个象限的对称折线，就构成一个周长为 $4l$ 的八边形，由于 $4l$ 的定值，根据等周定理，此八边形的面积在当它是正八边形时达到，即为

$$\frac{8}{4}(4l)^2\cot\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}l^2$$

故四边形 $PAOB$ 的最大值为

$$S_{\max}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}l^2\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{8}l^2$$

此时 $PA=PB=\frac{1}{2}l$.

$$\angle APB=\frac{(8-2)\pi}{8}=\frac{3}{4}\pi$$

从此解法可知，本题的命题背景是几何学中著名的等周定理的应用.

3

题3(1978，CMO) 证明：过三角形重心的直线所分三角形两部分的面积之差的绝对值，不大于三角形面积的 $\frac{1}{9}$.

我们首先指出：

(1) 本题是一道简单而不平凡的几何趣题，对于爱好几何的人们颇具吸引力和诱惑力.

(2) 当把本题推广到四面体三维空间时有结论：过四面体重心的平面，所分四面体的两部分体积之差的绝对值，不大于四面体的

$$1-2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{5}{32}$$

仅此结论的证明，就达到了目前 IMO 的难度，颇具挑战性.

(3) 其实，许多结果都事出有因，具有背景. 如果将本题从二维平面空间推广到 S 维凸体空间，便是当年华罗庚的名著《优选学》中所证明了的大定理：

定理(华罗庚)　过 S 维凸体 V 的重心 G，作平面所分 V 的两部分体积之差的绝对值，不大于 $1-2\left(\frac{S}{S+1}\right)^S$.

此结果可表示为不等式

$$|\Delta V_S|\leqslant 1-2\left(\frac{S}{S+1}\right)^S \qquad (*)$$

显然，当取 $S=2$ 时，$|\Delta V_2|=|\Delta S|\leqslant\frac{1}{9}$，当取 $S=3$ 时，$|\Delta V_3|\leqslant 1-2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{5}{32}$.

其实，当 $S=1$ 时，表明过其线段中点的直线把线段分为相等的两部分，自然有

$$1-2\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

大定理仍然成立.

如果我们证

$$f(S)=\left(\frac{S}{S+1}\right)^S=\left(1-\frac{1}{S+1}\right)^S$$

可见 $f(S)$ 是增函数，且

$$\lim_{S\to+\infty}f(S)=\lim_{S\to+\infty}\left(1-\frac{1}{S+1}\right)^S=1$$

可见，本题的背景有多大.

本题原来的参考证明，虽然美如一篇抒情散文，却不够直观形象，为此，我们不妨把它改写为：

证法 1　如图 3，我们只须证明 EF 不平行于 $\triangle ABC$ 的三边和不过三顶点的情形即可. 注意到 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，我们作 $MN\,/\!/\,BC$，$NK\,/\!/\,AB$，于是有

$$\left.\begin{array}{l}MN\,/\!/\,BC\Rightarrow MG=NG\\NK\,/\!/\,AB\Rightarrow EG=KG\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle EGM\cong\triangle KGN$$

现在设

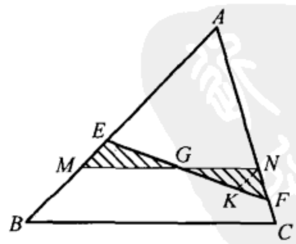


图 3

$$S_{\triangle EGM}=S_{\triangle KGN}=S,S_{\triangle NKF}=x$$

$$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AMN}-S_{\triangle EGM}+S_{\triangle FGN}=$$

$$\frac{4}{9}\Delta-S+(S+x)=\frac{4}{9}\Delta+x\text{(其中 }\Delta\text{ 表示 }\triangle ABC\text{ 的面积)}\Rightarrow$$

$$|S_{BCFE}-S_{\triangle AEF}|=|S_{\triangle ABC}-2S_{\triangle AEF}|=$$

$$\left|\Delta-2\left(\frac{4}{9}\Delta+x\right)\right|=\left|\frac{1}{9}\Delta-2x\right|$$

由于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\Delta$(当 EF 过点 A 时 $x=\frac{1}{4}\Delta$),故

$$\left|\frac{1}{9}\Delta-2x\right|\leqslant\frac{1}{9}\Delta$$

综上所述,命题成立.

证法 2　设 EF 为过 $\triangle ABC$ 的重心 G 的直线,显然,当 EF 过点 B 时,两部的面积均为 $\triangle ABC$ 面积的 Δ 的一半,其差为 0;当 EF 平行于其边时,如 $EF\parallel BC$ 时,由于

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow|S_{BCFE}-S_{\triangle AEF}|=$$

$$|\Delta-2S_{\triangle AEF}|=(1-2\times\frac{4}{9})\Delta=\frac{1}{9}\Delta$$

结论成立.

当 EF 既不平行于 $\triangle ABC$ 的三边,也不过 $\triangle ABC$ 的三顶点时,如图 4 所示,设 $\triangle ABC$ 的面积仍为 Δ,$\triangle AEF$ 的面积为 Δx,则

$$|\Delta S|=|S_{BCFE}-S_{\triangle AEF}|=|\Delta-2\Delta x|\qquad ①$$

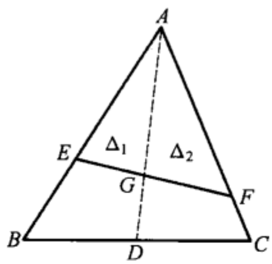


图 4

又设 $S_{\triangle AEG}=\Delta_1,S_{\triangle AFG}=\Delta_2$,则 $\Delta_1+\Delta_2=\Delta x$,注意到 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,有

$$\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AC}\qquad ②$$

$$\frac{\Delta_1}{S_{\triangle ABD}}=\frac{2\Delta}{\Delta}=\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{AE}{AB}\Rightarrow\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{3}\cdot\frac{AE}{AB}$$

同理

$$\frac{\Delta_2}{S_{\triangle ABD}}=\frac{1}{3}:\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{1}{3}\left(\frac{AE}{AB}+\frac{AF}{AC}\right)\geqslant$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AC}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Delta x}{\Delta}}\Rightarrow$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta}\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Delta x}{\Delta}}\Rightarrow\frac{\Delta x}{\Delta}\geqslant\frac{4}{9}\Rightarrow$$

$$|\Delta S| = |\Delta - 2\Delta x| \leqslant |\Delta - 2 \times \frac{4}{9}\Delta| = \frac{1}{9}\Delta$$

综合上述,命题得证.

证法3 如图5,设 M 为 BC 边中点,作 $BD \parallel PQ$, $MF \parallel AC$ 交 BD 于 E,交 PQ 于 F,于是

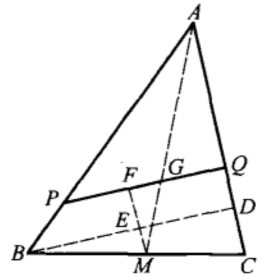


图 5

$$\left.\begin{array}{l} AG = 2MG \\ AQ \parallel MF \end{array}\right\} \Rightarrow FM = \frac{1}{2}AQ$$

$$\left.\begin{array}{l} DQ \parallel EF \\ DE \parallel FQ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} QD = EF \\ EM = \frac{1}{2}CD \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$QD = EF = FM - EM = \frac{1}{2}AQ - \frac{1}{2}CD =$$

$$\frac{1}{2}AQ - \frac{1}{2}(CQ - QD) \Rightarrow$$

$$DQ = AQ - CQ \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{DQ}{AQ} = \frac{AQ - CQ}{AQ} \Rightarrow$$

$$\frac{BP}{AP} + \frac{CQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{AB - AP}{AP} + \frac{AC - AQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{AB \cdot AC}{AP \cdot AQ} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$S_{\triangle APQ} \geqslant \frac{4}{9}S_{\triangle ABC} \Rightarrow$$

$$|S_{BPQC} - S_{\triangle APQ}| = |S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle APQ}| \leqslant$$

$$|S_{\triangle ABC} - 2 \times \frac{4}{9}S_{\triangle ABC}| = \frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$$

又易证
$$S_{BPQC} - S_{\triangle APQ} \geqslant 0$$
故
$$0 \leqslant S_{BPQC} - S_{\triangle APQ} \leqslant \frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$$

放眼展望,以上3种证法,各有特色,各有千秋.如果我们坐标选择得好,还可用解析法证明.

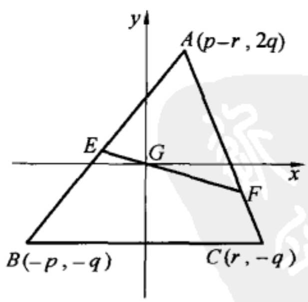


图 6

证法4 如图6,建立直角坐标系,其中重心 G 为原点, $BC \parallel Ox$ 轴,设坐标 $B(-p, -q)$, $C(r, -q)$, $A(p-r, 2q)$ $(p, q, r > 0)$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2}q(p + r) \qquad ③$$

AB, AC 的直线方程分别为

$$L_{AB}: y+q=\frac{3q}{2p-r}(x+p) \quad ④$$

$$L_{AC}: y+q=\frac{3q}{p-2r}(x-r) \quad ⑤$$

再 EF 的方程为

$$L_{EF}: y=kx, k\neq 0 \quad ⑥$$

然后求出交点 E,F 的坐标,再求出点 A 到 EF 的距离

$$h_x=\frac{|k(p-r)-2q|}{\sqrt{1+k^2}} \quad ⑦$$

只须证明

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}h_x|EF|\geqslant\frac{\Delta}{9}\times\frac{3}{2}q(q+r)$$

即可(以下化简过程略).

4

众所周知,闻名数学界的欧拉不等式即为:

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,则有不等式

$$R\geqslant 2r \quad (A)$$

欧拉不等式简洁美妙,简单而不平凡,容易被人理解和记住.今天,我们对它进行加强性推广.

题4 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r;x,y,z 为任意正数,则有

$$\frac{R}{r}\geqslant K\left[\frac{x(b+c)}{a}+\frac{y(c+a)}{b}+\frac{z(a+b)}{c}\right] \quad (B)$$

其中

$$K=\frac{3xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad ①$$

特别地,当 $x=y=z$ 时,$K=\frac{1}{3x}$.式(B)化为欧拉不等式的加强

$$\frac{R}{r}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right) \quad (C)$$

证明 由此式有

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sum\frac{x(b+c)}{a}=\sum\frac{x(\sin B+\sin C)}{\sin A}=$$

$$\sum\frac{x\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}\leqslant\sum\frac{x}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sum x\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}=\frac{4R}{r}t \quad ②$$

其中

$$t=\sum x\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \tag{③}$$

令

$$\begin{cases}x=qr>0\\y=rp>0\\z=pq>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\sqrt{yz/x}\\q=\sqrt{zx/y}\\r=\sqrt{xy/z}\end{cases}\Rightarrow t=\sum qr\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum p\sin\frac{A}{2}\right) \tag{④}$$

在熟知的三角母不等式

$$\sum p\cos A\leqslant\frac{1}{2}\sum\frac{qr}{p} \tag{⑤}$$

中作置换 $(A,B,C)\to\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\Rightarrow$

$$t\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum p\sin\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\sum\frac{qr}{p}\right)\right]^2=$$

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{\sum q^2r^2}{(pqr)^2}=\frac{(\sum x^2)^2}{12xyz}=\frac{1}{4K}\Rightarrow$$

$$S\leqslant\frac{R}{r}\cdot\frac{1}{K}\Rightarrow\frac{R}{r}\geqslant KS$$

即式(B)成立，等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 $x=y=z$，其实，从代数角度上讲，由于

$$S=\sum\frac{x(b+c)}{a}=\sum\left(x\frac{b}{a}+y\frac{a}{b}\right)\geqslant2\sum\sqrt{xy}$$

因此，式(B)又可以完成一个"雄鹰展翅"形的双向不等式

$$\frac{R}{r}\geqslant KS\geqslant2K(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}) \tag{C'}$$

注　关于欧拉不等式，曾是数学界人们研究的热门课题，并有如下重要成果：

(1)**Steiner 不等式**　设 $\triangle ABC$ 三边 a,b,c 上的高为 h_a,h_b,h_c，所对的旁切圆半径为 r_a,r_b,r_c，则

$$\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\geqslant\left[\frac{2R}{r}+6\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant3\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{D}$$

证明　由公式

$$\sum\frac{r_a}{h_a}=\frac{2R}{r}-1$$

及

$$\prod\frac{r_a}{h_a}=\frac{2R}{r}$$

得

$$\left(\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\right)^2=\sum\frac{r_a}{h_a}+2\sum\sqrt{\frac{r_br_c}{h_bh_c}}\geqslant\sum\frac{r_a}{h_a}+6\left(\prod\frac{r_a}{h_a}\right)^{1/3}\geqslant$$

$$\frac{2R}{r}-1+6\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\geqslant\left[\frac{2R}{r}+6\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$

设$\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{3}}=t\geqslant 1$,现证

$$(4t^3+6t-1)^{\frac{1}{2}}\geqslant 3t\Leftrightarrow 4t^3+6t-1\geqslant 9t^2\Leftrightarrow$$
$$4t^3+6t-1\geqslant 9t^2\Leftrightarrow (t-1)^2(4t-1)\geqslant 0$$

即式(D)成立,等号成立仅当$\triangle ABC$为正三角形.

(2)如果我们再设$n\in\mathbf{N}$,应用上述技巧,我们不难将式(D)再推广为

$$\sum\sqrt[n]{\frac{r_a}{h_a}}\geqslant\left[\frac{2R}{r}+(3^n-3)\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]^{\frac{1}{n}}\tag{E}$$

如果设$\lambda,u,v>0$,那么式(D)还有"漂亮朋友"

$$\sum\lambda\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\geqslant\sum\sqrt{uv}\tag{F}$$

$$\sum\lambda\frac{r_a}{h_a}\geqslant K\left(\frac{R}{2r}\right)\tag{G}$$

其中
$$K=2\sum\lambda-\sum\frac{uv}{\lambda}$$

再记
$$T=\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\leqslant\sqrt{3\sum\frac{r_a}{h_a}}\leqslant\sqrt{3\left(\frac{2R}{r}-1\right)}$$

这样,我们又可将式(D)完善成

$$\sqrt{3\left(\frac{2R}{r}-1\right)}\geqslant T\geqslant\sqrt{\frac{2R}{r}+6\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{3}}-1}\tag{H}$$

其实式(D)还可以再加强成

$$\sqrt{\frac{2R}{r}+5}\leqslant\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\leqslant\sqrt{\frac{4R}{r}+1}\tag{I}$$

显然

$$\left(\frac{6R}{r}-3\right)-\left(\frac{4R}{r}+1\right)=2\left(\frac{R}{r}-2\right)\geqslant 0$$

据探索,式(D)又可以再加强为

$$\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\geqslant 3\left(\frac{R}{2r}\right)^m\tag{J}$$

其中$m=(3+\sqrt{3})/12$,进一步地,还有

$$M\left(\sqrt{\frac{R}{2r}}\right)\geqslant\sum\lambda\left(\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\right)\geqslant\sqrt{uv}+\sqrt{v\lambda}+\sqrt{\lambda u}\tag{K}$$

多么可爱的不等式呀!

(3)在20世纪,人们通过不懈的努力,将欧拉不等式推广到了引人入胜的迷人仙景:

推广1 设双圆n边形$A_1A_2\cdots A_n$的外接圆半径为R,内切圆半径为r,O为外心,G为重心,则

$$R^2\geqslant r^2\sec^2\frac{\pi}{n}+\overline{OG}^2\tag{L}$$

等号成立仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形.

推广 2 设正 n 棱锥的外接球半径为 R,内切球半径为 r,则有

$$R \geqslant \left(1+\sec\frac{\pi}{n}\right)r \tag{M}$$

如此美艳的"绝代双娇",谁不为之倾倒动心!

5

在朱华伟、钱展望老师著的《高中数奥题集》中,有一道优秀的代数不等式:

题 5 设 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之积为 1,求证:

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1 \tag{①}$$

该书上提供的参考证法既美妙又高雅,超过了 IMO 的难度.那么,我们能寻觅到更简便的证法吗?

易验证,当 $n=1,2,3,4$ 时,式 ① 成立,但欲用数学归纳法证明式 ①,却难以奏效,用调整法同样难施展,使我们感到"山重水复疑无路".

其实,从结构上讲,式 ① 有漂亮的配对式

$$\frac{1}{1+(n-1)x_1}+\frac{1}{1+(n-1)x_2}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)x_n}\geqslant 1 \tag{②}$$

将 ① 和 ② 两式"喜结良缘",便是一个的双向不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)x_i}\geqslant 1\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_i} \tag{③}$$

式 ③ 坚固得似"铜墙铁壁",只要攻破其一,自然会"全线崩溃",为此,我们先用反证法证明式 ②,那么式 ③ 和式 ① 就迎刃而解.

证明 设

$$a_i=\frac{1}{1+(n-1)x_i}\Rightarrow x_i=\frac{1-a_i}{(n-1)a_i},1\leqslant i\leqslant n$$

由已知有

$$\prod_{i=1}^{n}x_i=1\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)=(n-1)^n\prod_{i=1}^{n}a_i \tag{④}$$

假设式 ② 不成立,那么必有

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_n<1\Rightarrow \qquad (⑤)\\&1-a_i>(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_i=\\&a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n(\text{约定 } a_0=1,\text{记 } t=a_1a_2\cdots a_n)\geqslant\\&(n-1)(a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n)^{\frac{1}{n-1}}=(n-1)\left(\frac{t}{a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}\Rightarrow\\&\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)>(n-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\end{aligned}$$

$$(n-1)^n \cdot \frac{t^{n/(n-1)}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/(n-1)}} = (n-1)^n \cdot t^{\left(\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right)} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) > (n-1)^n t = (n-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

但这一结果与式 ④ 矛盾,因此假设不成立,从而表明式 ③ 成立,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.由于

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{x_n} = 1(\text{应用式 ②}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{n-1}{x_i}} \geqslant 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n-1+x_i} \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{n-1}{n-1+x_i}\right) \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$n-(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_i} \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_i} \leqslant 1$$

这正好是式 ①,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$,从而式 ③ 也成立.

以上证明成功的经验是:先用反证法证明式 ① 的配对式 ②,然后利用式 ② 成功地证明了式①,从而达到了证明式③的目的,起到"一举两得,一箭双雕"的效果,仿佛使我们看到"柳暗花明又一村".

顺便指出,如果我们利用式 ③,不难将它推广为:

推广 3 设 $2 \leqslant n \in \mathbf{N}, x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$,且满足 $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} = 1$,其中 $K_i \in \mathbf{N}(1 \leqslant i \leqslant n)$,记 $S = \sum\limits_{i=1}^{n} K_i$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{1+(S-1)x_i} \geqslant 1 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{S-1+x_i} \tag{⑥}$$

6

记得 20 世纪 80 年代,有位老师在《湖南数学通讯》上证明了:

题 6(Hetomg 不等式) 设 d_1, d_2, d_3 分别为 $\triangle A_1A_2A_3$ 内任意一点 P 到边 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 的距离,$A_2A_3 = a_1, A_3A_1 = a_2, A_1A_2 = a_3$,则有不等式

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3} \geqslant 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) \tag{a}$$

证明 式(a) 要应用如下:

引理 1 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边长为 a_1, a_2, a_3,面积为 Δ;$0 \leqslant \theta \leqslant 1$,则以 $a_1^{\theta}, a_2^{\theta}, a_3^{\theta}$ 为边可作面积为 $\Delta(\theta)(\Delta(1) = \Delta)$ 的三角形,且有

$$\Delta(\theta) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\theta} \tag{b}$$

显然,当 $\theta = 0$ 时,$\Delta(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$;当 $\theta = 1$ 时,$\Delta(1) = \Delta$;

当 $0 < \theta < 1$ 时,式(b) 等号成立,仅当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

特别地,当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时,式(b) 化为

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \left[\Delta\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\Delta \Leftrightarrow$$

$$2\sum bc - \sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta \Leftrightarrow \sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta + \sum (b-c)^2 \tag{c}$$

这正好是“费 - 哈”不等式.

先请欣赏那位老师对式(a) 的漂亮证明.

(1) 我们先证

$$\left(\sum a_1\right) a_1a_2a_3 \geqslant 4\sqrt{\sum a_2^2a_3^2}\,\Delta \Leftrightarrow \tag{①}$$

$$\left(\sum a_1\right)^2(a_1a_2a_3)^2 \geqslant \left(\sum a_2^2a_3^2\right)\left(\sum a_1\right)\prod (a_2 + a_3 - a_1) \Leftrightarrow$$

$$\sum a_1 \geqslant \left(\sum \frac{1}{a_1^2}\right)\prod (a_2 + a_3 - a_1) \tag{②}$$

令

$$\begin{cases} x = a_2 + a_3 - a_3 > 0 \\ y = a_3 + a_1 - a_2 > 0 \\ z = a_1 + a_2 - a_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = (y+z)/2 \\ a_2 = (z+x)/2 \\ a_3 = (x+y)/2 \end{cases}$$

代入式 ② 得

$$\sum x \geqslant \left[\sum\left(\frac{2}{y+z}\right)^2\right] xyz \tag{③}$$

但

$$xyz\sum\left(\frac{2}{y+z}\right)^2 \leqslant xyz\sum\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2 = xyz\sum\frac{1}{yz} = \sum x$$

即式 ③ 成立,等号成立仅当 $x = y = z \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3$.

(2) 根据面积公式和柯西不等式有

$$2\Delta\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}\right) = \left(\sum a_1d_1\right)\left(\sum\frac{1}{d_1}\right) \geqslant \left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2 \Rightarrow \sum\frac{1}{d_1} \geqslant \frac{\left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2}{2\Delta} \tag{④}$$

由式 ④ 知,欲证明式 ①,须证明

$$\frac{\left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2}{2\Delta} \geqslant 2\sqrt{3}\sum\frac{1}{a_1} \Leftrightarrow \tag{⑤}$$

$$\left(\sum\sqrt{a_1}\right)\prod\sqrt{a_1} \geqslant 2(\sqrt[4]{3})\sqrt{\sum a_2a_3}\,\sqrt{\Delta} \tag{⑥}$$

又在式 ① 中应用引理有

$$\left(\sum\sqrt{a_1}\right)\sqrt{a_1a_2a_3}\geqslant 4\sqrt{\sum a_2a_3}\Delta\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant$$

$$4\sqrt{\sum a_2a_3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{4\Delta}{\sqrt{3}}}\right)=2(\sqrt[4]{3})\sqrt{\sum a_2a_3}\cdot\sqrt{\Delta}$$

这表明式 ⑥ 成立,从而逆推之式 ① 成立,等号成立仅当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

注 (1) 上述证法颇显妙不可言,美不胜收.就难度和妙度而言,Hetomg 不等式可与 IMO 试题竞美.

(2) 由平均值不等式易得

$$2\sqrt{3}\sum\frac{1}{a_1}=\frac{\sqrt{3}}{R}\sum\csc A_1\geqslant\frac{6}{R}\Rightarrow\sum\frac{1}{d_1}\geqslant 2\sqrt{3}\sum\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{6}{R}\tag{d}$$

因此式(d) 是式(a) 的完善,而式(a) 又是

$$\sum\frac{1}{d_1}\geqslant\frac{6}{R}\tag{e}$$

的加强,唯这一加强多么来之不易.

(3) 笔者发现,式(a) 可从指数方面推广为:

推广 4 设 d_1,d_2,d_3 分别为 $\triangle A_1A_2A_3$ 内任意一点 P 到三边 A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 的距离,设 $A_2A_3=a_1,A_3A_1=a_2,A_1A_2=a_3,\theta\in[0,1]$,求证:

$$d_1^{-\theta}+d_2^{-\theta}+d_3^{-\theta}\geqslant(2\sqrt{3})^{\theta}(a_1^{-\theta}+a_2^{-\theta}+a_3^{-\theta})\tag{f}$$

显然,当 $\theta=0$ 时,式(f) 化为等式 $3=3$,成立;当 $\theta=1$ 时,式(f) 化为式(a),成立;因此,我们只须证明当 $0<\theta<1$ 时,式(f) 成立即可.

证明 当 $0<\theta<1$ 时,由式 ⑥ 有

$$\left(\sum\sqrt{a_1}\right)\sqrt{a_1a_2a_3}\geqslant 2(\sqrt[4]{3})\sqrt{\sum a_2a_3}\cdot\sqrt{\Delta}$$

应用前面的引理有

$$\left(\sum\sqrt{a_1^{\theta}}\right)\sqrt{(a_1a_2a_3)^{\theta}}\geqslant 2(\sqrt[4]{3})\cdot\sqrt{\sum(a_2a_3)^{\theta}}\cdot\sqrt{\Delta(\theta)}\geqslant$$

$$\sqrt{3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\theta}}\cdot\sqrt{\sum(a_2a_3)^{\theta}}\Rightarrow\left(\sum\sqrt{a_1^{\theta}}\right)^2\geqslant$$

$$3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\theta}\cdot\frac{\sum(a_2a_3)^{\theta}}{(a_1a_2a_3)^{\theta}}=3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\theta}\cdot\sum a_1^{-\theta}\tag{⑦}$$

又

$$2\Delta=\sum a_1d_1=a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3$$

注意到 $0<\theta<1$ 应用幂平均不等式有

$$\frac{2}{3}\Delta\geqslant\left[\frac{\sum(a_1d_1)^{\theta}}{3}\right]^{1/\theta}\Rightarrow$$

$$3\left(\frac{2}{3}\Delta\right)^{\theta}\geqslant(a_1d_1)^{\theta}+(a_2d_2)^{\theta}+(a_3d_3)^{\theta}\text{(应用柯西不等式)}\Rightarrow$$

$$3\left(\frac{2}{3}\Delta\right)^{\theta}\sum d_1^{-\theta} \geqslant \sum(a_1d_1)^{\theta}\cdot\sum d_1^{-\theta} \geqslant \left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2(\text{应用式⑦}) \geqslant$$

$$3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta\right)^{\theta}\sum a_1^{-\theta} \Rightarrow \sum d_1^{-\theta} \geqslant (2\sqrt{3})^{\theta}\cdot\sum a_1^{-\theta}$$

即式(f)成立,等号成立仅当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形.

7

题 7(第 38 届 IMO 预选题)　设 $ABCDEF$ 是凸六边形,且 $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$,证明:

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2} \tag{N}$$

这是一道简洁优美的趣味几何题,如果巧妙地应用托勒密定理,证明不难.为了将它打扮得"如花似玉,貌若天仙",我们建立它的两个加权推广:

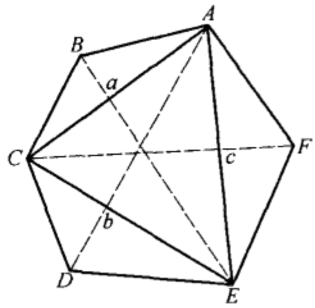


图 7

$$\lambda\left(\frac{BC}{BE}\right)+u\left(\frac{DE}{DA}\right)+v\left(\frac{FA}{FC}\right) \geqslant \sqrt{uv}+\sqrt{v\lambda}+\sqrt{\lambda u}-\frac{1}{2}(\lambda+u+v) \tag{O}$$

$$(u+v)\frac{BC}{BE}+(v+\lambda)\frac{DE}{DA}+(\lambda+u)\frac{FA}{FC} \geqslant \sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)} \tag{P}$$

(其中 λ, u, v 为任意正数),显然,当 $\lambda=u=v$ 时,(O),(P)两式化为式(N).

式(O)的证明:记 $AC=a, CE=b, AE=c$,在四边形 $ACEF$ 中运用托勒密定理有

$$AC\cdot EF+CE\cdot AF \geqslant AE\cdot CF \Rightarrow \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{c}{a+b}\quad(\text{因 } EF=AF)$$

同理可证

$$\frac{DE}{DA} \geqslant \frac{b}{c+a},\quad \frac{BC}{BE} \geqslant \frac{a}{b+c}$$

现在我们设

$$\begin{cases} b+c=2x>0 \\ c+a=2y>0 \\ a+b=2z>0 \\ s=x+y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=s-2x \\ b=s-2y \\ c=s-2z \end{cases} \Rightarrow T_{\lambda}=$$

$$\lambda\left(\frac{BC}{BE}\right)+u\left(\frac{DE}{DA}\right)+v\left(\frac{FA}{FC}\right) \geqslant \frac{\lambda a}{b+c}+\frac{ub}{c+a}+\frac{vc}{a+b}=$$

$$\frac{\lambda}{2x}(s-2x)+\frac{u}{2y}(s-2y)+\frac{v}{2z}(s-2z)=\frac{s}{2}\left(\frac{\lambda}{x}+\frac{u}{y}+\frac{v}{z}\right)-(\lambda+u+v)=$$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{\lambda}{x}+\frac{u}{y}+\frac{v}{z}\right)-(\lambda+u+v)(\text{应用柯西不等式}) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{u}+\sqrt{v})^2-\frac{1}{2}(\lambda+u+v) \Rightarrow T_{\lambda} \geqslant \sqrt{uv}+\sqrt{v\lambda}+\sqrt{\lambda u}-\frac{1}{2}(\lambda+u+v)$$

即式(O)得证.

证明式(P)要用到如下:

引理2 对于任意正数 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3,有不等式

$$[(a_2+a_3)b_1+(a_3+a_1)b_2+(a_1+a_2)b_3]^2 \geqslant 4(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)(b_2b_3+b_3b_1+b_1b_2) \quad ①$$

等号成立仅当
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

式(P)的证明:我们令

$$M=\frac{BC}{BE}\cdot\frac{DE}{DA}+\frac{DE}{DA}\cdot\frac{FA}{FC}+\frac{FA}{FC}\cdot\frac{BC}{BE}\geqslant \frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}= \frac{(ab)^2}{(ab+ca)(bc+ab)}+\frac{(bc)^2}{(bc+ab)(ca+bc)}+\frac{(ca)^2}{(ca+bc)(ab+ca)} \quad ②$$

记

$$S=(ab+ca)(bc+ab)+(bc+ab)(ca+bc)+(ca+bc)(ab+ca)\leqslant$$
(应用三元对称不等式)
$$\frac{1}{3}[(ab+ca)+(bc+ab)+(ca+bc)]^2=\frac{4}{3}(bc+ca+ab)^2 \quad ③$$

于是

$$\frac{4}{3}(bc+ca+ab)^2M\geqslant SM\geqslant \sum(ab+ca)(bc+ab)\cdot \sum\frac{(ab)^2}{(ab+ca)(bc+ab)}\text{(应用柯西不等式)}\geqslant (bc+ca+ab)^2\Rightarrow M\geqslant\frac{3}{4} \quad ④$$

应用引理有

$$P_x=(u+v)\frac{BC}{BE}+(v+\lambda)\frac{DE}{DA}+(\lambda+u)\frac{FA}{FC}\geqslant 2\sqrt{(uv+v\lambda+\lambda u)M}\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{4}(uv+v\lambda+\lambda u)}=\sqrt{3(uv+v\lambda+\lambda u)} \quad ⑤$$

即式(P)成立.

易推得(O),(P)两式等号成立仅当 $\lambda=u=v$,且 $a=b=c$,即 $ABCDEF$ 为正六边形.

8

从上例可见,如将几何与代数巧妙结合,就可以将一些优美的几何不等式打扮得更漂亮.我们接着再举一例:

题 8 设 $P \in \triangle ABC, AP \cap BC = D, BP \cap CA = E, CP \cap AB = F, \alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$，且满足条件 $\alpha + \beta + \gamma = 3$，求证：

$$\left(\frac{AP}{PD}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{BP}{PE}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{CP}{PF}\right)^{\gamma} \geqslant \frac{27}{m} \quad (\mathrm{Q})$$

其中

$$m = \sqrt[3]{p^p q^q \gamma^{\gamma}} \quad ①$$

$$(p, q, \gamma) = (4 - 3\alpha, 4 - 3\beta, 4 - 3\gamma) \quad ②$$

我们先证明式(Q)，然后再作简要的评注.

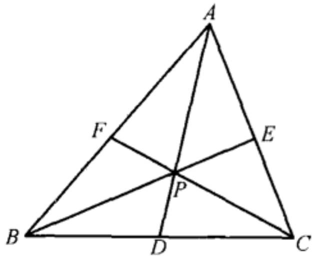


图 8

证明 记 $x = AP/PD, y = BP/PE, z = CP/PF$，$\triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPA$ 的面积分别记为 S_1, S_2, S_3，注意到 $\triangle APB$ 有 $\triangle BPD$ 等高，则

$$x = \frac{AP}{PD} = \frac{S_1}{S_{\triangle BPD}} = \frac{S_3}{S_{\triangle CPD}} = \frac{S_1 + S_3}{S_{\triangle BPD} + S_{\triangle CPD}} = \frac{S_1 + S_3}{S_2} \Rightarrow x = \frac{S_1 + S_3}{S_2}$$

同理可得

$$z = \frac{S_2 + S_3}{S_1}, \quad y = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$$

再证 $S = S_1 + S_2 + S_3$，有

$$xyz = \frac{(S - S_1)(S - S_2)(S - S_3)}{S_1 S_2 S_3} = \frac{S_3 - S_2 \sum S_1 + S \sum S_2 S_3 - S_1 S_2 S_3}{S_1 S_2 S_3} =$$

$$\frac{S \sum S_2 S_3}{S_1 S_2 S_3} - 1 = (S_1 + S_2 + S_3)\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) - 1 =$$

$$\sum\left(\frac{S_2 + S_3}{S_1} + 1\right) - 1 =$$

$$\sum\left(\frac{S_2 + S_3}{S_1}\right) + 2 = x + y + z + 2 \Rightarrow$$

$$xyz = x + y + z + 2 \quad ①$$

注意到 $p, q, \gamma > 0$，且

$$p + q + \gamma + 1 = (4 - 3\alpha) + (4 - 3\beta) + (4 - 3\gamma) + 1 = 12 - 3(\alpha + \beta + \gamma) + 1 = 4$$

应用加权不等式，有

$$xyz = x + y + z + 2 = p\left(\frac{x}{p}\right) + q\left(\frac{y}{q}\right) + \gamma\left(\frac{z}{\gamma}\right) + 2 \geqslant$$

$$4\left[\left(\frac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\frac{y}{q}\right)^q \cdot \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma} \times 2\right]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow (xyz)^4 \geqslant 2^q\left(\frac{x^p y^q z^{\gamma}}{p^p q^q \gamma^{\gamma}}\right) \Rightarrow$$

$$x^{4-p} \cdot y^{4-q} \cdot z^{4-\gamma} \geqslant \left(\frac{27}{m}\right)^3 \Rightarrow (x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma})^3 \geqslant \left(\frac{27}{m}\right)^3 \Rightarrow$$

$$x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \geqslant \frac{27}{m} \quad ②$$

这正好是式(Q),等号成立仅当

$$\begin{cases}\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{z}{\gamma}=2\\ p+q+\gamma=3\end{cases}$$

且
$$x+y+z+2=xyz$$

注 (1)本题的已知条件简单,而要求证明的结论式(Q)却不平凡,但当我们在推出了式①后,巧妙地应用加权不等式,成功地推导出了式(Q),达到了我们要证明的目的。

(2)如果我们设 $t=\sqrt[3]{xyz}$,由式①

$$\begin{aligned}xyz=x+y+z+2\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}+2\Rightarrow t^3\geqslant 3t+2\Rightarrow\\ t^3-t-2(t+1)\geqslant 0\Rightarrow(t+1)(t^2-t-2)\geqslant 0\Rightarrow\\ (t+1)^2(t-2)\geqslant 0\Rightarrow t\geqslant 2\Rightarrow t^3=xyz\geqslant 8\end{aligned}\quad ③$$

这便是当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,式(Q)的特例.

应用平均值不等式易得

$$x+y+z\geqslant 6\quad ④$$

进一步地,易推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{S_1}{S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_3+S_1}+\frac{S_3}{S_1+S_2}(\text{应用切比雪夫不等式})\geqslant\\ \frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3)\sum\frac{1}{S_2+S_3}=\\ \frac{1}{6}\sum(S_2+S_3)\sum\frac{1}{S_2+S_3}(\text{应用柯西不等式})\geqslant\\ \frac{1}{6}\times 3^2\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{3}{2}\end{aligned}\quad ⑤$$

可见,式③是式④的加强,而式④与式⑤既互相平行,又互相配对,却不能相互推出.这就是我们过去熟知的传统结论.

(3)仿照上一节中的方法技巧,对于正数 λ,u,v,立刻可建立③,④,⑤三个式子的加权推广

$$\frac{\lambda}{x}+\frac{u}{y}+\frac{v}{z}\geqslant\sum\sqrt{uv}-\frac{1}{2}\sum\lambda\quad ⑥$$

$$\frac{u+v}{x}+\frac{v+\lambda}{y}+\frac{\lambda+u}{z}\geqslant\sqrt{3\sum uv}\quad ⑦$$

$$\lambda x+uy+vz\geqslant 2\sum\sqrt{uv}\quad ⑧$$

此外,应用式(Q)和加权不等式有

$$\alpha x+\beta y+\gamma z\geqslant\frac{9}{\sqrt[3]{m}}\quad ⑨$$

可见,式④和式⑤均有两个加权推广,简直是“好事成双”.

9

让我们静下心来，先任意画一个$\triangle ABC$,假设 D,E,F 三点分别在三边 BC, CA,AB 上，且不与三顶点重合，然后设$\triangle ABC$,$\triangle AEF$,$\triangle BDF$,$\triangle CDE$,$\triangle DEF$ 的面积分别为 S,S_1,S_2,S_3,S_x,则有

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_x \geqslant 4\sqrt[4]{S_1S_2S_3S_x} \Rightarrow$$

$$S_x \leqslant \frac{(S/4)^4}{S_1S_2S_3} \qquad ①$$

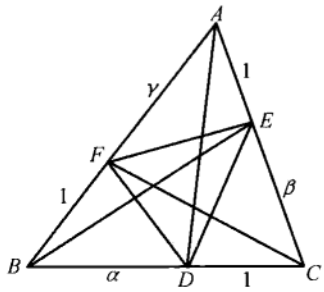


图 9

感官告诉我们,虽然式 ① 来得轻松,但却很美,既然它很美,就不会“孤单寂寞”,应当有个漂亮的“伴侣”,那么,谁又和它“天生一对，地配一双”呢?为此,李世杰先生为它寻找到了

$$S_x \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S}} \qquad ②$$

它俩“合二为一”,即为

$$\frac{(S/4)^4}{S_1S_2S_3} \geqslant S_x \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S}} \qquad ③$$

很遗憾,由于笔者漂泊在外,手中资料奇缺,至今未欣赏到李先生的证明,只好提供下述证法,如有雷同,敬请见谅.

证明　$\alpha,\beta,\gamma > 0$,且

$$BD : BC = 2 : 1, CE : EA = \beta : 1, AF : FB = \gamma : 1 \Rightarrow$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{1+\beta}$$

同理

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{1+\gamma}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow \frac{S_1S_2S_3}{S^3} = \frac{t}{m^2} \Rightarrow$$

$$2 \cdot \sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S}} = \frac{2\sqrt{t} \cdot S}{m} \qquad ④$$

其中 $t = \alpha\beta\gamma, m = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$,又

$$\frac{S_x}{S} = 1 - \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right) = 1 - \left[\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+\gamma)} + \frac{\beta}{(1+\beta)(1+\alpha)} + \frac{\gamma}{(1+\gamma)(1+\beta)}\right] =$$

$$\frac{1+t}{m} \geqslant \frac{2\sqrt{t}}{m} \Rightarrow S_x \geqslant \frac{2\sqrt{t}}{m}S = 2 \cdot \sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{S}}$$

即式②成立,从而式③成立. 等号成立仅当 $t = 1$,即 AD,BE,CF 三线共点于$\triangle ABC$内,

反之,如果 AD, BE, CF 三线共点于 $\triangle ABC$ 内,由塞瓦定理知,$t=\alpha\beta\gamma=1$,式②成为等式,并且 $m\geqslant\prod(2\sqrt{\alpha})=8\sqrt{\alpha\beta\gamma}=8$,有

$$\frac{S_x}{S}=\frac{1+t}{m}=\frac{2}{m}\leqslant\frac{1}{4}\Rightarrow S_x\leqslant\frac{1}{4}S \tag{5}$$

这是一个传统的好结论,同时还有

$$S_1S_2S_3\leqslant\frac{1}{64}S^3=\left(\frac{S}{4}\right)^3 \tag{6}$$

可见,我们的身边并非缺少美,而是缺少对美的发现.人因为可爱而美,数学因为美而可爱!

谈一道叶中豪提出的几何题的证法

唐传发[①]

叶中豪先生曾提出如下一道优美的几何题：已知，E,F 是 $\triangle ABC$ 内两点，满足 $\angle EAB = \angle FAC$，作 $\angle FBD = \angle ABE$，$\angle ECD = \angle FCA$，两线相交于 D；M,N 分别为 BC,AD 的中点，H_1,H_2 分别是 $\triangle EAB$，$\triangle FAC$ 的垂心，求证：$H_1H_2 \perp MN$. 叶先生给出了一个精彩的证明. 本文再给出另一个本质不同的证法. 为使读者能一目了然地看清笔者的解题思路. 我把证明过程分成几个引理加以叙述.

引理1 如图1，已知 E,F 是 $\triangle ABC$ 内两点，$\angle BAE = \angle CAF$，H_1,H_2 分别是 $\triangle ABE$，$\triangle ACF$ 的垂心，M,Q 分别是 BC,EF 的中点，求证：$MQ \perp H_1H_2$.

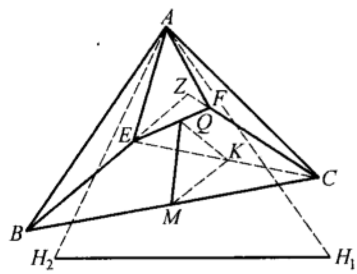


图1

证明 延长 BE,CF 交于 Z，联结 EC，取 EC 中点 K，联结 MK,QK，联结 AH_1,AH_2. 因为

$$AH_1 = BE\cot\angle BAE,\ AH_2 = CF\cot\angle FAC$$

$$\angle BAE = \angle FAC$$

所以 $\dfrac{AH_1}{AH_2} = \dfrac{BE}{CF}$，由 $AH_1 \perp BE$，$AH_2 \perp CF$，所以 $\angle H_1AH_2 = \angle BZC$，又因为 $QK \mathrel{\underline{\mathbin{/\mkern-6mu/}}} \dfrac{1}{2}FC$，$MK \mathrel{\underline{\mathbin{/\mkern-6mu/}}} \dfrac{1}{2}BE$，所以 $\dfrac{MK}{QK} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AH_1}{AH_2}$，$\angle MKQ = \angle BSC$，所以 $\angle H_1AH_2 = \angle MKQ$，故 $\triangle MKQ \backsim \triangle AH_1H_2$，又因为 $AH_1 \perp BE$，所以 $AH_1 \perp MK$，同理 $AH_2 \perp QK$，所以 $H_1H_2 \perp MQ$.

引理2 如图2，已知四边形 $ABDC$，M,N 分别为 BC,AD 中点. 存在一点 Q，使得 $S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABDC}$，求证：点 Q 在 MN 上.

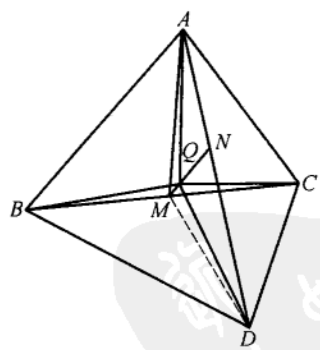


图2

---

① 安徽省枞阳县汤沟中学，邮编：246716.

证明 $S_{\triangle AQM}=S_{\triangle AQB}+S_{\triangle BQM}-S_{\triangle ABM}=S_{\triangle AQB}+\frac{1}{2}S_{\triangle BQC}-\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=$

$$S_{\triangle AQB}+\frac{1}{2}(S_{\triangle BQD}+S_{\triangle CQD}-S_{\triangle BCD})-\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=$$

$$S_{\triangle AQB}+\frac{1}{2}S_{\triangle BQD}+\frac{1}{2}S_{\triangle CQD}-\frac{1}{2}S_{ABDC}$$

$$S_{\triangle AQN}=\frac{1}{2}S_{\triangle AQD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle AQC}+S_{\triangle QCD}-S_{\triangle ACD})$$

所以

$$S_{\triangle AQM}+S_{\triangle AQN}=\frac{1}{2}S_{\triangle BQD}+\frac{1}{2}S_{\triangle AQC}+S_{\triangle AQB}+S_{\triangle QCD}-\frac{1}{2}S_{ABDC}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}=$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}S_{ABDC}+\frac{1}{2}S_{ABDC}-\frac{1}{2}S_{ABDC}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}=$$

$$\frac{1}{4}S_{ABDC}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$$

又因为

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}S_{\triangle AMD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle AMC}+S_{\triangle MCD}-S_{\triangle ACD})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}-S_{\triangle ACD})=$$

$$\frac{1}{4}S_{ABDC}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$$

引理3 如图3,已知四边形 $ABDC$,E,F 为其内部两点,$\angle EAB=\angle FAC$,$\angle EBA=\angle FBD$,$\angle FCA=\angle ECD$.求证:$\angle EDB=\angle FDC$,且 $EJ_1\cdot FK_1=EJ_2\cdot FK_2=EJ_3\cdot FK_3=EJ_4\cdot FK_4$.

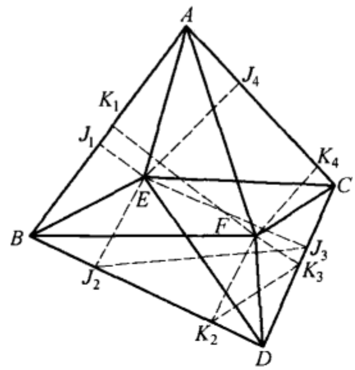


图3

证明 过点 E 向四边形各边引垂线段,垂足分别为 J_1,J_2,J_3,J_4,过点 F 分别向四边形各边引垂线段,垂足分别为 K_1,K_2,K_3,K_4,联结 J_2J_3,K_2K_3.

易知 $\triangle AK_1F\backsim\triangle AJ_4E$,所以

$$\frac{AK_1}{AJ_4}=\frac{AF}{AE}=\frac{FK_1}{EJ_4}$$

$\triangle AJ_1E\backsim\triangle AK_4F$,所以$\frac{AJ_1}{AK_4}=\frac{AE}{AF}=\frac{EJ_1}{FK_4}$.

从而,$AK_1\cdot AJ_1=AK_4\cdot AJ_4$,且 $EJ_1\cdot FK_1=EJ_4\cdot FK_4$.

即 J_1,K_1,J_4,K_4 四点共圆,且 $EJ_1\cdot FK_1=EJ_4\cdot FK_4$.

同理 J_1,K_1,K_2,J_2 四点共圆,且 $EJ_1\cdot FK_1=EJ_2\cdot FK_2$.

同理 K_3,J_3,K_4,J_4 四点共圆,且 $EJ_3\cdot FK_3=EJ_4\cdot FK_4$.

从而可得 $J_1,K_1,J_4,K_4,J_3,K_3,K_2,J_2$ 共圆,且

$$EJ_1\cdot FK_1=EJ_2\cdot FK_2=EJ_3\cdot FK_3=EJ_4\cdot FK_4$$

由 E,J_2,D,J_3 共圆,知 $\angle J_2ED=\angle J_2J_3D$,由 J_2,J_3,K_3,K_2 共圆得 $\angle J_2J_3D=$

$\angle K_3K_2D$，由 F,K_3,D,K_2 共圆知 $\angle K_3K_2D=\angle K_3FD$，综上可知 $\angle J_2ED=\angle K_3FD$，从而 $\angle EDB=\angle FDC$.

引理4 如图4，已知四边形 $ABDC$，E,F 为其内部两点，$\angle EAB=\angle FAC$，$\angle EBA=\angle FBD$，$\angle FCA=\angle ECD$，求证：$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CDE}=S_{\triangle BDF}+S_{\triangle ACF}$.

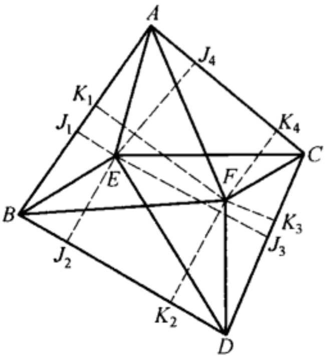


图4

证明 过点 E 向各边引垂线段 EJ_1,EJ_2,EJ_3,EJ_4，过点 F 向各边引垂线段，垂足分别为 K_1,K_2,K_3,K_4，由引理3知

$$\angle EDB=\angle FDC$$

$$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}(AB\cdot EJ_1+CD\cdot EJ_3)=$$

$$\frac{1}{2}[(FK_1\cot\angle BAF+FK_1\cot\angle ABF)EJ_1+(FK_3\cot\angle FCD+FK_3\cot\angle FDC)EJ_3]=$$

$$\frac{1}{2}[FK_1\cdot EJ_1(\cot\angle BAF+\cot\angle ABF)+FK_3\cdot EJ_3(\cot\angle FCD+\cot\angle FDC)]$$

由引理3知 $FK_1\cdot EJ_1=FK_3\cdot EJ_3$，故

$$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}FK_1\cdot EJ_1(\cot\angle BAF+\cot\angle ABF+\cot\angle FCD+\cot\angle FDC)$$

同理

$$S_{\triangle BDF}+S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}FK_4\cdot EJ_4(\cot\angle EAC+\cot\angle EBD+\cot\angle ECA+\cot\angle EDB)$$

由 $\angle BAE=\angle FAC$ 知 $\angle BAF=\angle EAC$，同理 $\angle EBD=\angle ABF$，又因为 $\angle FCD=\angle ECA$，$\angle FDC=\angle EDB$，由引理3知 $FK_1\cdot EJ_1=FK_4\cdot EJ_4$，综上比较可知

$$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CDE}=S_{\triangle BDF}+S_{\triangle ACF}$$

引理5 如图5，已知四边形 $ABDC$，E,F 为其内部两点，Q 为 EF 的中点，$\angle EAB=\angle FAC$，$\angle EBA=\angle FBD$，$\angle FCA=\angle ECD$. 求证：$S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QCD}=\frac{1}{2}S_{ABDC}$.

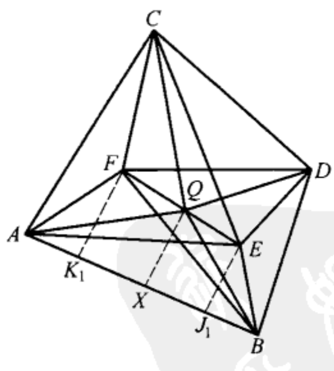


图5

证明 作 $EJ_1\perp AB$，$FK_1\perp AB$，$QX\perp AB$，则 $FK_1 /\!/ QX /\!/ EJ_1$，又 Q 为 EF 中点，所以易知 $QX=\frac{1}{2}(EJ_1+FK_1)$，从而

$$S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}(S_{\triangle FAB}+S_{\triangle EAB})$$

同理 $$S_{\triangle QCD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle FCD}+S_{\triangle ECD})$$

所以 $$S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QCD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle FAB}+S_{\triangle FCD}+S_{\triangle EAB}+S_{\triangle ECD})$$

由引理4知 $$S_{\triangle EAB}+S_{\triangle ECD}=S_{\triangle FDB}+S_{\triangle FAC}$$

所以 $$S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QCD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle FAB}+S_{\triangle FCD}+S_{\triangle FDB}+S_{\triangle FAC})=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}.$$

下面回到原题:

如图6,联结 EF,并取 EF 中点 Q,由引理5和引理2可知点 Q 在 MN 上,而由引理1可知 $MQ\perp H_1H_2$,故 $MN\perp H_1H_2$.证毕.

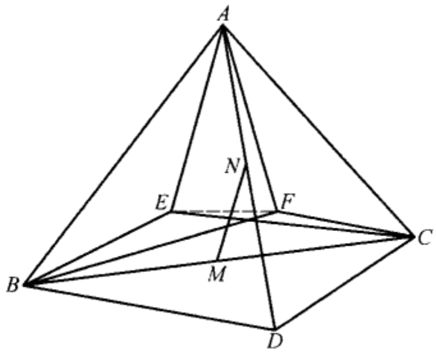


图6

(1) 笔者在引理3的证明中,由 J_1,K_1,J_4,K_4 四点共圆,J_1,K_1,J_2,K_2 四点共圆,J_3,K_3,J_4,K_4 四点共圆,而直接得到 $J_1,K_1,J_4,K_4,J_3,K_3,J_2,K_2$ 这八点共圆,这一步写得过简,考虑到这一步还需引辅助线,为严密起见,下面把这一步的证明过程写出来,已知 E,F 是四边形 $ABDC$ 内两点 $EJ_1\perp AB,EJ_2\perp BD,EJ_3\perp CD,EJ_4\perp AC,FK_1\perp AB,FK_2\perp BD,FK_3\perp CD,FK_4\perp AC$ 且 J_1,K_1,J_2,K_2 四点共圆,J_3,K_3,J_4,K_4 四点共圆,J_1,K_1,J_4,K_4 四点共圆,求证:$J_1,J_2,J_3,J_4,K_1,K_2,K_3,K_4$ 这八点共圆.

证明　如图7,取 EF 中点 O,过点 O 分别引 $OT_1\perp K_1J_1,OT_2\perp K_2J_2,OT_3\perp K_3J_3,OT_4\perp K_4J_4$.

因为 $FK_1\perp AB,EJ_1\perp AB$,所以 $EJ_1\parallel OT_1\parallel FK_1$.又因为 O 为 EF 中点,所以 T_1 为 J_1K_1 中点,即 OT_1 垂直且平分 J_1K_1,故 $OJ_1=OK_1$,同理 $OJ_2=OK_2$,又因为 J_1,K_1,J_2,K_2 四点共圆,所以 $OJ_1=OK_1=OJ_2=OK_2$,同理 $OK_1=OJ_4=OK_4=OK_3=OJ_3$,从而 $OJ_1=OK_1=OJ_4=OK_4=OK_3=OJ_3=OK_2=OJ_2$,故 $J_1,J_2,J_3,J_4,K_1,K_2,K_3,K_4$ 这八点共圆,且圆点为 EF 中点 O.

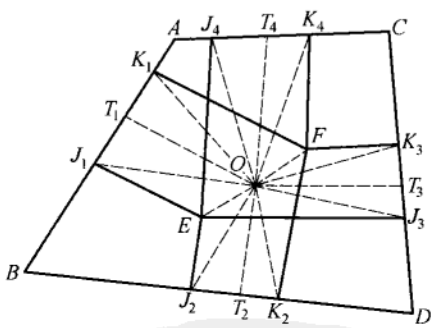


图7

(2) 笔者在证明的探索过程中,还发现如下结论,不知是否为新发现,现也把它写出来,供读者自我训练.

如图8,已知四边形 $\angle BAE=\angle CAF,\angle ABE=\angle FBD,\angle ACF=\angle ECD$,则
$$\frac{AE\cdot BE+CE\cdot DE}{AF\cdot DF+BF\cdot CF}=\frac{AD\cdot BE+BC\cdot DE}{AB\cdot DF+BF\cdot DC}$$

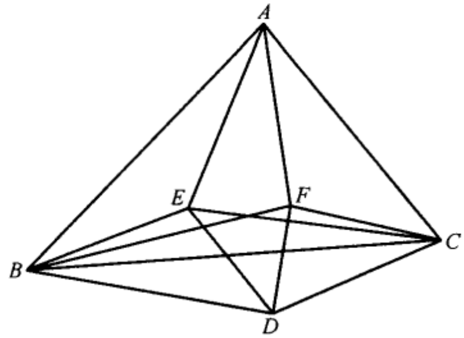


图 8

此题虽说难度不大,但若考虑得不好,将会陷入繁杂的运算,读者不妨一试.

一道优美几何题的证明

唐传发

平几专家叶中豪老师曾提出如下优美的几何题,笔者在此给出一种证法.

题目 如图1,P为$\triangle ABC$内任一点,O_A,O_B,O_C分别为$\triangle PBC,\triangle PAC,\triangle PAB$的外心;$O_{AB},O_{BC},O_{AC}$分别为$\triangle PO_AO_B,\triangle PO_BO_C,\triangle PO_AO_C$的外心.记$\triangle O_AO_BO_C$和$\triangle O_{AB}O_{BC}O_{AC}$的外心分别是$E_1,E_2$,$\triangle ABC$的外心为$O$,求证:$PO // E_1E_2$.

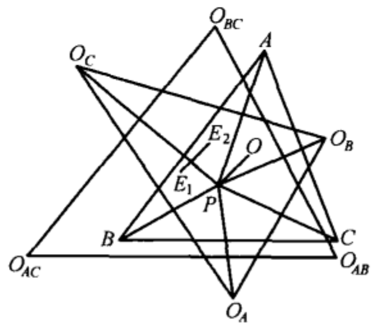


图1

证明 **引理1** E'_1为$\triangle O_1O_2O_3$内任一点,O'_1,O'_2,O'_3分别为E'_1O_1,E'_1O_2,E'_1O_3上的点,且满足$E'_1O_1\cdot EO'_1=E'_1O_2\cdot EO'_2=E'_1O_3\cdot EO'_3$,记$\triangle O_1O_2O_3$和$\triangle O'_1O'_2O'_3$的外心分别是$F_1,F_2$,求证$E'_1,F_1,F_2$三点共线.

引理1的证明 如图2,联结E'_1F_1并向两方延长交圆F_1于M',N'两点,并在这条直线上截取M,N有

$$E'_1M'\cdot E'_1M=E'_1O_1\cdot E'_1O'_1=E'_1O'_2\cdot E_1O_2$$

$$E'_1N'\cdot E'_1N=E'_1O_1\cdot E'_1O'_1$$

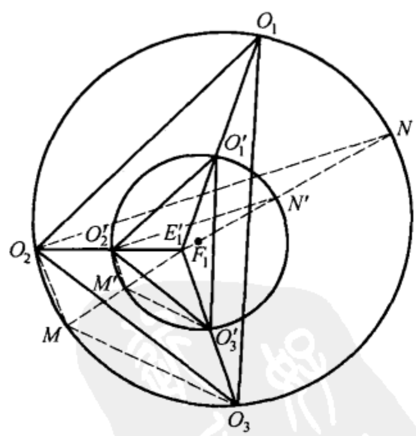


图2

易知O_2,O'_2,M',M四点共圆,O_3,O'_3,M',M四点共圆,所以

$$\angle O_2ME'_1=\angle E'_1O'_2M'$$

$$\angle O_3ME'_1=\angle E'_1O'_3M'$$

则 $\angle O_2MO_3=\angle E'_1O'_2M'+E'_1O'_3M'$

所以

$$\angle O_2MO_3=180°-\angle O'_1O'_2E'_1-\angle O'_1O'_3E'_1$$

又易知O_2,O'_2,O'_1,O_1四点共圆,O'_1,O_1,O_3,O'_3四点共圆,故

$$\angle O'_1O'_2E'_1=\angle O_2O_1O'_1,\angle O'_1O'_3E'_1=\angle O_3O_1O'_1$$

故 $\angle O_2MO_3=180°-\angle O_2O_1O'_1-\angle O_3O_1O'_1=180°-\angle O_2O_1O_3$

从而 M,O_3,O_1,O_2 四点共圆，即点 M 在 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆上，同理点 N 也在 $\triangle O_1O_2O_3$ 外接圆上，由 $E'_1O'_2\cdot E'_1O_2=E'_1M'\cdot E'_1M$ 知 $\angle M'O'_2E'_1=\angle O_2MN$，同理 $\angle E'_1O'_2N'=\angle O_2NM$，故 $\angle M'O'_2E'_1+\angle N'O'_2E'_1=\angle O_2MN+\angle O_2NM$，即 $90^\circ=\angle O_2MN+\angle O_2NM$，从而 E'_1F_1 过 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆的圆心 F_2.

引理2 已知 P,Q 为 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 的等角共轭点，E'_1 为 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 的外心；O_1,O_2,O_3 分别是 $\triangle PO_{B'}O_{C'},\triangle PO_{C'}O_{A'},\triangle PO_{A}'O_{B'}$ 的外心；O'_1,O'_2,O'_3 分别是 $\triangle QO_{B'}O_{C'},\triangle QO_{C'}O_{A'},\triangle QO_{B'}O_{A'}$ 的外心，$\triangle O_1O_2O_3$ 外心为 F_1，$\triangle O'_1O'_2O'_3$ 外心为 F_2，求证：E'_1,F_1,F_2 共线.

引理2的证明 如图3，联结 $O_1O'_1,O_2O'_2,O_3O'_3$ 分别延长它们，易知 $O_1O'_1,O_2O'_2,O_3O'_3$ 分别是 $O_{B'}O_{C'},O_{A'}O_{C'},O_{A'}O_{B'}$ 的中垂线，故它们的交点为 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 的外心 E'_1，又易知 $O_1O_3\perp PO_{B'}$，而 $O_1O'_1\perp O_{B'}O_{C'}$，所以 $\angle O'_1O_1O_3=\angle PO_{B'}O_{C'}$，同理 $\angle O_3O'_3O'_1=\angle QO_{B'}O_{A'}$，而 $\angle PO_{B'}O_{C'}=\angle QO_{B'}O_{A'}$，所以 $\angle O'_1O_1O_3=\angle O_3O'_3O'_1$ 故 O_1,O'_1,O_3,O'_3 四点共圆，同理可证 O_1,O'_1,O_2,O'_2 四点共圆；O_2,O'_2,O_3,O'_3 四点共圆，故 $E'_1O'_1\cdot E'_1O_1=E'_1O_2\cdot E'_1O'_2=E'_1O_3\cdot E'_1O'_3$，再由引理1可知 E'_1,F_1,F_2 三点共线.

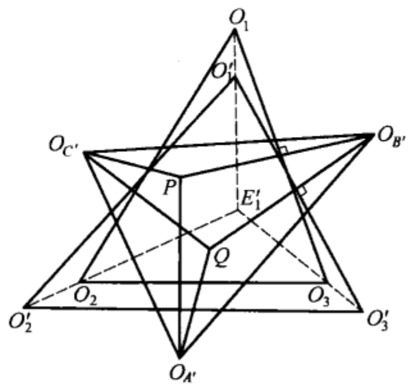


图3

引理3 已知 P,Q 为 $\triangle O_{B'}O_{A'}O_{C'}$ 的等角共轭点，O_1,O_2,O_3 分别为 $\triangle PO_{B'}O_{C'},\triangle PO_{C'}O_{A'},\triangle PO_{A'}O_{B'}$ 的外心；O'_1,O'_2,O'_3 分别为 $\triangle QO_{B'}O_{C'},\triangle QO_{C'}O_{A'},\triangle QO_{A'}O_{B'}$ 的外心；$\triangle O_1O_2O_3$ 的外心为 F_1，$\triangle O'_1O'_2O'_3$ 的外心为 F_2，求证 $F_1F_2\parallel PQ$.

引理3的证明 如图4，联结 $O_1O'_1,O_3O'_3$，易知 $O_1O'_1\perp O_{B'}O_{C'},O_3O'_3\perp O_{B'}O_{A'},O_1O_3\perp PO_{B'},O'_1O'_3\perp QO_{B'}$，所以 $\angle O'_1O_1O_3=\angle PO_{B'}O_{C'},\angle O'_1O'_3O_3=\angle QO_{B'}O_{A'}$，而 $\angle PO_{B'}O_{C'}=\angle QO_{B'}O_{A'}$，所以 $\angle O'_1O_1O_3=\angle O_3O'_3O'_1$，故 O'_1,O_1,O'_3,O_3 四点共圆，记 O_1O_3 与 $O'_1O'_3$ 的交点为 M，则点 M 在 $\triangle O_1O_2O_3$ 外接圆与 $\triangle O'_1O'_2O'_3$ 的外接圆的两圆根轴上，且因为 O_1O_3 垂直平分 $PO_{B'}$，$O'_1O'_3$ 垂足平分 $QO_{B'}$，故点 M 亦是 $\triangle PQO_{B'}$ 的外心.

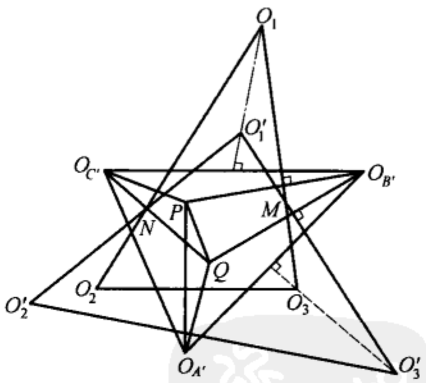


图4

同理可证 $\triangle PQO_{C'}$ 的外心 N 也在 $\triangle O_1O_2O_3$ 外接圆与 $\triangle O'_1O'_2O'_3$ 外接圆的两圆根轴上. 故 $MN\perp F_1F_2$，且 $MN\perp PQ$，则 $F_1F_2\parallel PQ$.

引理 4　已知 P 为 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 内任一点，$PA'\perp O_{B'}O_{C'}$，$PB'\perp O_{A'}O_{C'}$，$PC'\perp O_{A'}O_{B'}$，A'，B'，C' 为各自垂足，O' 为 $\triangle A'B'C'$ 的外心，Q 为 P 的关于 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 的等角共轭点，求证：P，O'，Q 三点共线.

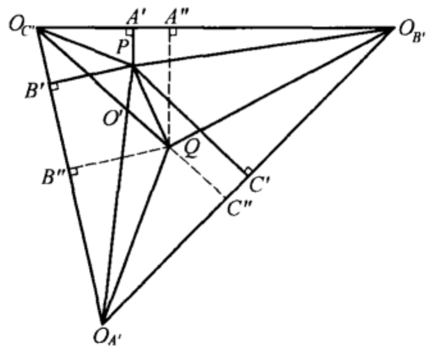


图 5

引理 4 的证明　如图 5，过 Q 点作 $QA''\perp O_{B'}O_{C'}$，$QC''\perp O_{A'}O_{B'}$，$QB''\perp O_{A'}O_{C'}$. 易知

$$\frac{QO_{B'}}{O_{B'}A''}=\frac{PO_{B'}}{O_{B'}C'} \quad ①$$

$$\frac{PO_{B'}}{O_{B'}A'}=\frac{QO_{B'}}{O_{B'}C''} \quad ②$$

由①②得到 $O_{B'}A'\cdot O_{B'}A''=O_{B'}C'\cdot O_{B'}C''$，从而 A'，A''，C'，C'' 四点共圆. 从而易知 $A'A''$ 的中垂线与 $C'C''$ 中垂线交于 PQ 上同一点记为 S，同理 BB' 中垂线与 AA' 中垂线交于 PQ 同一点 S，且 S 为 PQ 的中点，易知 S 到 A'，A''，B'，B''，C'，C'' 各点距离相等，从而 S 即为 $\triangle A'B'C'$ 的外心 O'，从而可证 P，O'，Q 三点共线.

有了以上几个引理，现在回到原题：

记 PO_A 与 $O_{AC}O_{AB}$ 的交点为 $O_{A'}$；

PO_B 与 $O_{AB}O_{BC}$ 的交点为 $O_{B'}$；

PO_C 与 $O_{AC}O_{BC}$ 的交点为 $O_{C'}$.

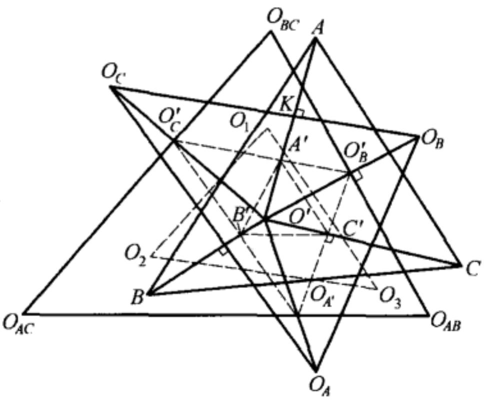


图 6

如图 6，联结 $O_{A'}O_{B'}$，$O_{B'}O_{C'}$，$O_{C'}O_{A'}$ 分别交 PC，PA，PB 于 C'，A'，B'，联结 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，易知 $PO_{B'}O_{BC}O_{C'}$ 为圆内接四边形，记其外心为 O_1；$PO_{C'}O_{AC}O_{A'}$ 外心为 O_2，$PO_{A'}O_{AB}O_{B'}$ 外心为 O_3，联结 O_1O_2，O_1O_3，O_2O_3，记 $\triangle A'B'C'$ 的外心为 O'，$\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 外心为 E'_1，$\triangle O_1O_2O_3$ 外心为 F_1. 易知 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 与 $O_AO_BO_C$ 是以 P 为位似中心，位似比为$\frac{1}{2}$；又易知 O_1，O_2，O_3 分别为 PO_{BC}，PO_{AC}，PO_{AB} 中点，所以 $\triangle O_1O_2O_3$ 与 $\triangle O_{AC}O_{BC}O_{AB}$ 也是以 P 为位似中心，位似比为$\frac{1}{2}$，而 $\triangle O_AO_BO_C$ 的外心与 $\triangle O_{AC}O_{BC}O_{AB}$ 外心分别为 E_1，E_2，而 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 的外心、$\triangle O_1O_2O_3$ 外心分别为 E'_1，F_1，故 $E_1E_2\parallel E'_1F_1$.

记 O_CO_B 与 PA 交点为 K，因为 $\triangle O_{A'}O_{B'}O_{C'}$ 与 $\triangle O_AO_BO_C$ 是以 P 为位似中心，位似比为$\frac{1}{2}$，所以 $PA'=\frac{1}{2}PK$，而 $PK=\frac{1}{2}PA$，所以 $PA'=\frac{1}{4}PA$. 同理 $PC'=\frac{1}{4}PC$，$PB'=\frac{1}{4}=PB$，所以 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 位似，而 $\triangle ABC$ 外心为 O，$\triangle A'B'C'$ 外心为 O'，故 P，O，O' 三点共线.

从而欲证 $E_1E_2\parallel PO$，只须证明 $E'_1F_1\parallel PO'$，由引理 2 知 E'_1，F_1，F_2 共线，由引理 4 知 P，O'，Q 共线，故只须证明 $F_1F_2\parallel PQ$，而这由引理 3 可知是成立的. 从而命题得证.

几个特殊角问题

武瑞新

田廷彦在参考文献[1]中总结了用三角法求解三角形和四边形中求某些特殊角问题的一般方法.本文指出一种常为人忽略的方法,作为对参考文献[1]的补充,或许不无裨益.

1.(布洛卡角问题)在$\triangle ABC$内求作点M使$\angle MAB=\angle MBC=\angle MCA=\theta$.$\theta$称为布洛卡角,其做法是众所周知的,以$A,B,C$表示$\triangle ABC$的三个内角,如图1所示.

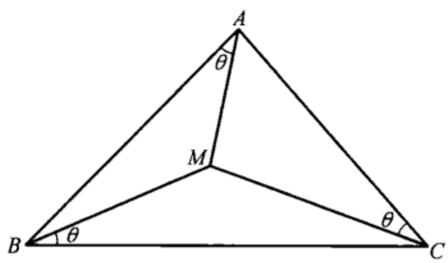


图1

$$\frac{AM}{BM}=\frac{\sin(B-\theta)}{\sin\theta}$$

$$\frac{BM}{CM}=\frac{\sin(C-\theta)}{\sin\theta}$$

$$\frac{CM}{AM}=\frac{\sin(A-\theta)}{\sin\theta}$$

三式相乘得

$$\sin^3\theta=\sin(A-\theta)\sin(B-\theta)\sin(C-\theta)(\sin A\cot\theta-\cos A)\cdot(\sin B\cot\theta-\cos B)(\sin C\cot\theta-\cos C)=1$$

$$\sin A\sin B\sin C\cot^3\theta-(\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B)\cot^2\theta+(\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B)\cot\theta-(\cos A\cos B\cos C+1)=0$$

注意$\cos(A+B+C)=-1$,用加法公式展开整理得

$$\cos A\cos B\cos C+1=\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B$$

并注意到熟知的恒等式$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$,所以

$$\cot^3\theta-(\cot A+\cot B+\cot C)\cot^2\theta+\cot\theta-(\cot A+\cot B+\cot C)=0$$

所以

$$\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$$

2.(蓝利问题)$\triangle ABC$为等腰三角形,$\angle B=\angle C=80^\circ$,$CF$与$AC$成$30^\circ$角,交$AB$于$F$,$BE$与$AB$成$20^\circ$角,交$AC$于$E$.

求证:$\angle BEF=30^\circ$.

证明 如图2,易知$\angle BEC=40^\circ$,$\angle EBC=60^\circ$,$\angle ECF=30^\circ$,设$\angle BEF=\theta$,由正弦定理得

$$\frac{EF}{BE}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin(20^\circ+\theta)}$$

$$\frac{BE}{EC}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{EC}{EF}=\frac{\sin(70^\circ+\theta)}{\sin 30^\circ}$$

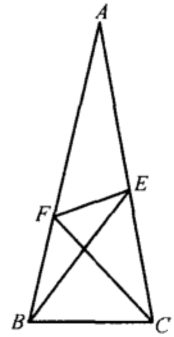


图 2

三式相乘得

$$\frac{\sin(70^\circ+\theta)}{\sin(20^\circ+\theta)}=\frac{\sin 60^\circ\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ\sin 80^\circ}=$$

$$\frac{4\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ\sin 80^\circ}=$$

$$2\sin 50^\circ=2\cos 40^\circ$$

所以 $\sin(70^\circ+\theta)=2\sin(20^\circ+\theta)\cos 50^\circ=\sin(70^\circ+\theta)-\sin(\theta-30^\circ)$

所以 $\sin(\theta-30^\circ)=0$

所以 $\theta=30^\circ$

3. 已知凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90^\circ$，$\angle DAB=96^\circ$，$\angle DCB=78^\circ$，$DA=2AB$，求 $\angle CAB$.

解 易知

$$BC>AD\cos 6^\circ>AD\cos 30^\circ=\sqrt{3}AB$$

故可在 BC 上取点 E，使 $\angle BAE=60^\circ$，联结 DE，$AE=AD=2AB$，$\angle DAE=36^\circ$，$\angle ADE=\angle AED=72^\circ$，$\angle DEC=\angle DCE=78^\circ$，$\angle CDE=24^\circ$，设 $\angle ACB=\theta$.

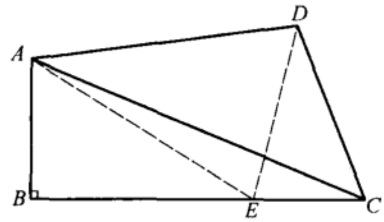


图 3

由正弦定理得

$$\frac{AE}{DE}=\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ},\frac{DE}{CE}=\frac{\sin 78^\circ}{\sin 24^\circ},\frac{CE}{AE}=\frac{\sin(30^\circ-\theta)}{\sin 24^\circ}$$

三式相乘得

$$\frac{\sin(30^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin 24^\circ\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ\sin 78^\circ}=\frac{4\sin 24^\circ\sin 36^\circ\sin 84^\circ}{4\sin 72^\circ\sin 78^\circ\sin 84^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{4\sin 72^\circ\cos 12^\circ\cos 6^\circ}=$$

$$\frac{\sin 6^\circ}{2\sin 12^\circ\cos 12^\circ}=\frac{\sin 6^\circ}{\sin 24^\circ}=\frac{\sin(30^\circ-24^\circ)}{\sin 24^\circ}$$

所以 $\sin 30^\circ\cot\theta-\cos 30^\circ=\sin 30^\circ\cot 24^\circ-\cos 30^\circ$

$$\cot\theta=\cot 24^\circ$$

$$\theta=24^\circ$$

所以 $\angle CAB=66^\circ$

4. 已知凸四边形 $ABCD$，$\angle BAC=30^\circ$，$\angle ABD=26^\circ$，$\angle DBC=51^\circ$，$\angle ACD=13^\circ$，求 $\angle CAD$

解 如图 4，设 $\angle CAD=\theta$.

则 $$\frac{BD}{AD}=\frac{\sin(30^\circ-\theta)}{\sin 26^\circ}$$

$$\frac{AD}{CD}=\frac{\sin 13^\circ}{\sin\theta}$$

$$\frac{CD}{BD}=\frac{\sin 51^\circ}{\sin 86^\circ}$$

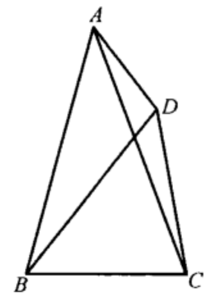


图 4

三式相乘得

$$\frac{\sin(30^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin 26^\circ\sin 86^\circ}{\sin 51^\circ\sin 13^\circ}=\frac{\sin 26^\circ\sin 86^\circ}{4\sin 17^\circ\sin 43^\circ\sin 77^\circ\sin 13^\circ}=$$

$$\frac{2\sin 26^\circ\sin 43^\circ\cos 43^\circ}{4\sin 17^\circ\sin 43^\circ\sin 13^\circ\cos 13^\circ}=\frac{\sin 47^\circ}{\sin 17^\circ}=$$

$$\frac{\sin(30^\circ+17^\circ)}{\sin 17^\circ}$$

所以
$$\sin 30^\circ\cot\theta+\cos 30^\circ=\sin 30^\circ\cot 17^\circ+\cot 30^\circ$$

所以 $\theta=17^\circ$.

这里我们三次用到“我特别珍爱的公式”

$$\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$$

5.已知 $\triangle ABC$ 中,AD 是角平分线,CE 为 AB 边上的高,若 $\angle CDA=45^\circ$,求 $\angle BED$.

解 如图 5,设 $\angle BED=\alpha$,$\angle BAC=2\theta$,易知 $\angle DCE=45^\circ+\theta$,$\angle DEC=90^\circ-\alpha$.

$$\frac{AD}{ED}=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$\frac{ED}{CD}=\frac{\sin(45^\circ+\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)}$$

$$\frac{CD}{AD}=\frac{\sin\theta}{\sin(45^\circ+\theta)}$$

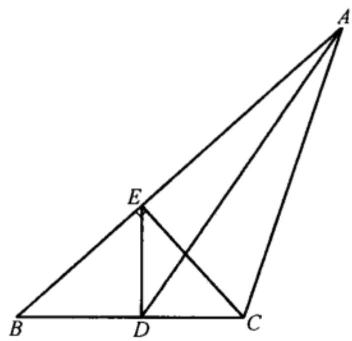


图 5

三式相乘得

$$\frac{\sin\alpha\sin\theta\sin(45^\circ+\theta)}{\sin\theta\sin(90^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\theta)}=1$$

所以
$$\sin\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$$

所以
$$\alpha=90^\circ-\alpha$$

所以
$$\alpha=45^\circ$$

6.已知 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=100^\circ$,$AB=AC$,延长 AB 至 D 使 $AD=BC$,求 $\angle BCD$.

解 在线段 BC 上取点 F,使 $BF=BD$,联结 AF,DF,则

$$AB=CF=AC$$

$$\angle BDF=\angle BFD=20^\circ$$

$$\angle CAF=\angle CFA=70^\circ$$

设
$$\angle BCD=\theta$$

$$\frac{AF}{DF}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{DF}{CF}=\frac{\sin\theta}{\sin(20^\circ-\theta)}$$

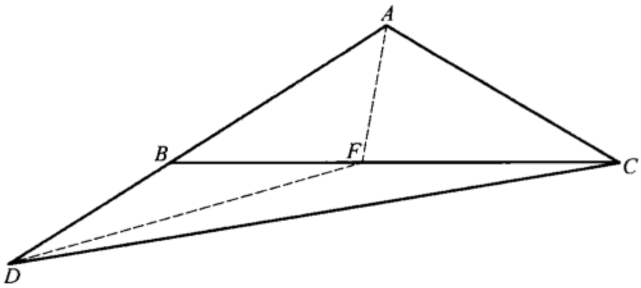


图 6

$$\frac{CF}{AF}=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}$$

三式相乘得

$$\frac{\sin(20^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin 20^\circ\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ\sin 40^\circ}=1$$

$$\sin(20^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$20^\circ-\theta=\theta$$

$$\theta=10^\circ$$

事实上,上述解法采用塞瓦定理的角元形式,塞瓦定理是解决共点、共线问题的有力工具,上述数例均系经典名题,用塞瓦定理的角元形式处理,非常简捷,给人以美的享受.

参考文献

[1] 田廷彦.三角与几何[M].上海:华东师范大学出版社,2007.

[2] 蒋声.高中三角妙题巧解[M].上海:上海科学技术出版社,1996.

[3] 虞金龙,马洪炎.平面几何[M].杭州:浙江大学出版社,2007.

一道几何竞赛题的证法探讨

武瑞新

题目 如图1,已知 AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的一条高,P 是线段 AD 上异于 A,D 的一点,延长 BP 交 AC 于 M,延长 CP 交 AB 于点 N,MN 交 AP 于 Q,过 Q 任作直线交 PN 于点 E,交 AM 于点 F,求证:$\angle EDA=\angle FDA$.

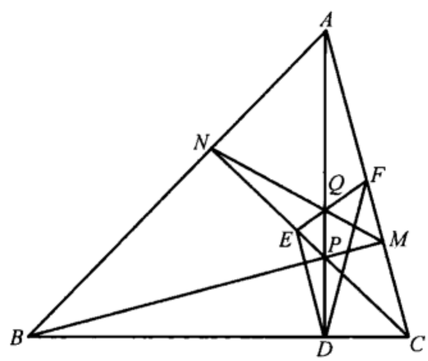


图1

证明 1.解析法

如图2,以 D 为原点建立直角坐标系,设 $D(0,0)$,$A(0,a)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$,$P(0,d)$,则

$$AB:\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$$

$$AC:\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$$

$$BP:\frac{x}{b}+\frac{y}{d}=1$$

$$CP:\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1$$

AC 与 BP 联立得

$$M\left(\frac{bc(a-d)}{ab-cd},\frac{ad(b-c)}{ab-cd}\right)$$

AB 与 CP 联立得

$$N\left(\frac{bc(a-d)}{ac-bd},\frac{ad(c-b)}{ac-bd}\right)$$

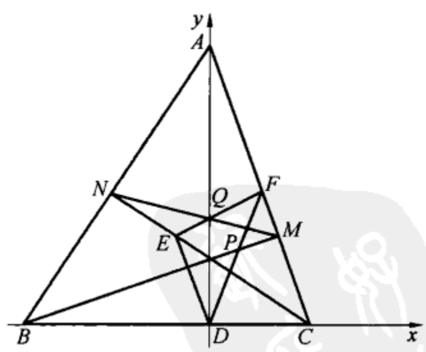


图2

故

$$k_{MN}=\frac{\frac{ad(b-c)}{ab-cd}-\frac{ad(c-b)}{ac-bd}}{\frac{bc(a-d)}{ab-cd}-\frac{bc(a-d)}{ac-bd}}=-\frac{ad(b+c)}{bc(a+d)}$$

所以直线 MN 的方程为

$$y-\frac{ad(b-c)}{ab-cd}=-\frac{ad(b+c)}{bc(a+d)}\left(x-\frac{bc(a-d)}{ab-cd}\right)$$

令 $x=0$ 得

$$Q\left(0,\frac{2ad}{a+d}\right)$$

设 EF 的斜率为 k,则 EF 的方程为

$$y = kx + \frac{2ad}{a+d}$$

联立 CP 与 EF 得

$$E\left(\frac{cd(d-a)}{(d+a)(d+ck)}, \frac{d(kdc+kac+2ad)}{(d+a)(d+ck)}\right)$$

联立 AC 与 EF 得

$$F\left(\frac{ac(a-d)}{(a+d)(a+ck)}, \frac{a(kdc+kac+2ad)}{(a+d)(a+ck)}\right)$$

故

$$k_{DE} = \frac{kac+kcd+2ad}{c(d-a)} \quad ①$$

$$k_{DF} = \frac{kac+kcd+2ad}{c(a-d)} \quad ②$$

故
$$k_{DE} = -k_{DF}$$
故
$$\angle BDE = \angle CDF, \angle EDA = \angle FDA$$

这里,我们指出:

(1)如果用截距式表示 EF 的方程虽可简化计算,但需讨论 EF 与 x 轴平行的情况,反而不便.此外由题设条件易知,解答中出现的所有算式都是有意义的.

(2)由证明过程可知,当 E 不在线段 PN 上,或 F 不在线段 AP 上时,①、②仍成立,但 $\angle EDA$ 和 $\angle FDA$ 不都是锐角,因此结论可以推广,图形变化很复杂,但只有两个结论 $\angle EDA = \angle FDA$ 或 $\angle EDA + \angle FDA = \pi$.因此,为严谨起见,本题必须对动点 P 及动直线 EF 的位置作出限制即给出具体图形.

2.三角法(面积法)

先证 $\angle MDA = \angle NDA$.

若 $MN \parallel BC$,则结论易证,故我们总假设 MN 与 BC 相交,设 MN 与 BC 交于 R.联结 AR, PR, DM, DN, AR, PR,如图3所示.

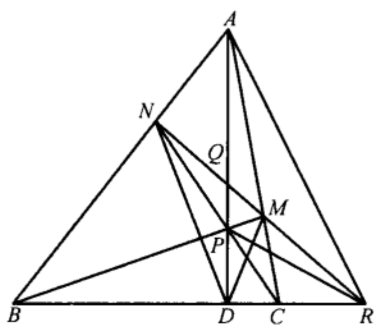


图3

设 $\angle MDA = \alpha, \angle NDA = \beta$.

$$\frac{S_{\triangle QDM}}{S_{\triangle QDN}} \cdot \frac{S_{\triangle NDR}}{S_{\triangle MDR}} = \frac{MQ}{NQ} \cdot \frac{NR}{MR} = \frac{S_{\triangle AMQ}}{S_{\triangle ANQ}} \cdot \frac{S_{\triangle ANR}}{S_{\triangle AMR}} =$$

$$\frac{AM\sin\angle QAM}{AN\sin\angle QAN} \cdot \frac{AN\sin\angle NAR}{AM\sin\angle MAR} =$$

$$\frac{\sin\angle QAM}{\sin\angle QAN} \cdot \frac{\sin\angle NAR}{\sin\angle MAR} = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB} \cdot \frac{\sin\angle BAR}{\sin\angle MAR} =$$

$$\frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle BAD}} \cdot \frac{S_{\triangle BAR}}{S_{\triangle CAR}} =$$

$$\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BR}{CR}=\frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle BPD}}\cdot\frac{S_{\triangle BPR}}{S_{\triangle CPR}}=$$
$$\frac{\sin\angle CPD}{\sin\angle BPD}\cdot\frac{\sin\angle BPR}{\sin\angle CPR}=$$
$$\frac{\sin\angle NPQ}{\sin\angle MPQ}\cdot\frac{\sin\angle MPR}{\sin\angle NPR}=\frac{S_{\triangle NPQ}}{S_{\triangle MPQ}}\cdot\frac{S_{\triangle MPR}}{S_{\triangle NPR}}=$$
$$\frac{NQ}{MQ}\cdot\frac{MR}{NR}=\frac{S_{\triangle QDN}}{S_{\triangle QDM}}\cdot\frac{S_{\triangle MDR}}{S_{\triangle NDR}}$$

所以
$$\left(\frac{S_{\triangle QDM}}{S_{\triangle QDN}}\right)^2=\left(\frac{S_{\triangle MDR}}{S_{\triangle NDR}}\right)^2$$

所以
$$\frac{S_{\triangle QDM}}{S_{\triangle QDN}}=\frac{S_{\triangle MDR}}{S_{\triangle NDR}}$$

所以
$$\frac{MD\sin\angle QDM}{ND\sin\angle QDN}=\frac{MD\sin\angle MDR}{ND\sin\angle NDR}$$

所以
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(90-\alpha)}{\sin(90+\beta)}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

所以
$$\tan\alpha=\tan\beta$$

所以
$$\alpha=\beta$$

故
$$\angle MDA=\angle NDA$$

因为
$$\frac{MF}{AF}=\frac{S_{\triangle MDF}}{S_{\triangle ADF}}=\frac{DM\sin\angle MDF}{AD\sin\angle ADF}$$

所以
$$\frac{\sin\angle MDF}{\sin\angle ADF}=\frac{AD\cdot MF}{DM\cdot AF}$$

同理
$$\frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle NDE}=\frac{PE\cdot ND}{PD\cdot NE}$$

所以
$$\frac{\sin\angle MDF}{\sin\angle ADF}\cdot\frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle NDE}=\frac{AD}{DM}\cdot\frac{MF}{AF}\cdot\frac{PE}{PD}\cdot\frac{ND}{NE}=\frac{AD}{PD}\cdot\frac{ND}{DM}\cdot\frac{S_{\triangle QFM}}{S_{\triangle QFA}}\cdot\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle QNE}}=$$
$$\frac{QM\angle\sin MQF}{AQ\angle\sin AQF}\cdot\frac{PQ\sin\angle PQE}{NQ\sin\angle NQE}\cdot\frac{AD}{PD}\cdot\frac{ND}{DM}=$$
$$\frac{QM}{NQ}\cdot\frac{ND}{DM}\cdot\frac{AD}{PD}\cdot\frac{PQ}{AQ}$$

由前证知
$$\frac{QM}{NQ}=\frac{DM}{ND}$$

故
$$\frac{QM}{NQ}\cdot\frac{ND}{DM}=1$$

$$\frac{AD}{PD}\cdot\frac{PQ}{AQ}=\frac{S_{\triangle PMQ}}{S_{\triangle AMQ}}\cdot\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle PMD}}=\frac{PM\sin\angle PMQ}{AM\sin\angle AMQ}\cdot\frac{AM\sin\angle AMD}{PM\sin\angle PMD}=$$
$$\frac{\sin\angle PMQ}{\sin\angle AMQ}\cdot\frac{\sin\angle AMD}{\sin\angle PMD}=\frac{\sin\angle RMB}{\sin\angle RMC}\cdot\frac{\sin\angle CMD}{\sin\angle BMD}=$$
$$\frac{S_{\triangle BMR}}{S_{\triangle RMC}}\cdot\frac{S_{\triangle CMD}}{S_{\triangle BMD}}=\frac{RB}{RC}\cdot\frac{CD}{BD}=\frac{S_{\triangle BRP}}{S_{\triangle CPR}}\cdot\frac{S_{\triangle CPD}}{S_{\triangle BPD}}=$$

$$\frac{\sin\angle BPR}{\sin\angle CPR}\cdot\frac{\sin\angle CPD}{\sin\angle BPD}=\frac{\sin\angle MPR}{\sin\angle NPR}\cdot\frac{\sin\angle NPQ}{\sin\angle MPQ}=$$

$$\frac{S_{\triangle MPR}}{S_{\triangle NPR}}\cdot\frac{S_{\triangle NPQ}}{S_{\triangle MPQ}}=\frac{MR}{NR}\cdot\frac{NQ}{MQ}=$$

$$\frac{S_{\triangle MAR}}{S_{\triangle NAR}}\cdot\frac{S_{\triangle NAQ}}{S_{\triangle MAQ}}=\frac{\sin\angle MAR}{\sin\angle NAR}\cdot\frac{\sin\angle NAQ}{\sin\angle MAQ}=$$

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\cdot\frac{\sin\angle CAR}{\sin\angle BAR}=\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}}\cdot\frac{S_{\triangle CAR}}{S_{\triangle BAR}}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CR}{BR}=$$

$$\frac{S_{\triangle BMD}}{S_{\triangle CMD}}\cdot\frac{S_{\triangle CMR}}{S_{\triangle BMR}}=\frac{\sin\angle BMD}{\sin\angle CMD}\cdot\frac{\sin\angle CMR}{\sin\angle BMR}=$$

$$\frac{\sin\angle PMD}{\sin\angle AMD}\cdot\frac{\sin\angle AMQ}{\sin\angle PMQ}=\frac{S_{\triangle PMD}}{S_{\triangle AMD}}\cdot\frac{S_{\triangle AMQ}}{S_{\triangle PMQ}}=\frac{PD}{AD}\cdot\frac{AQ}{PQ}$$

所以

$$\left(\frac{AD}{PD}\cdot\frac{PQ}{AQ}\right)^2=1$$

所以

$$\frac{AD}{PD}\cdot\frac{PQ}{AQ}=1$$

所以

$$\frac{\sin\angle MDF}{\sin\angle ADF}=\frac{\sin\angle NDE}{\sin\angle ADE}$$

设 $\angle EDA=\phi\angle FDA=\psi,\angle MDA\angle NDA=\theta$,所以

$$\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\psi}=\frac{\sin(\theta-\phi)}{\sin\phi}$$

$$\sin\theta\cot\psi=\sin\theta\cot\phi$$

所以

$$\phi=\psi$$

即

$$\angle EDA=\angle FDA$$

注 $\frac{AD}{PD}\cdot\frac{PQ}{AQ}=1$ 的证明可以简化为

$$\frac{AD}{PD}\cdot\frac{PQ}{AQ}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BPC}}\cdot\frac{S_{\triangle PNM}}{S_{\triangle ANM}}=\frac{AB\cdot AC\sin\angle BAC}{PB\cdot PC\sin\angle BPC}\cdot\frac{PM\cdot PN\sin\angle MAN}{AM\cdot AN\sin\angle MPN}=$$

$$\frac{AB\cdot AC}{AM\cdot AN}\cdot\frac{PM}{PB}\cdot\frac{PN}{PC}=\frac{AB\cdot AC}{AM\cdot AN}\cdot\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle ABD}}\cdot\frac{S_{\triangle AND}}{S_{\triangle ACD}}=$$

$$\frac{AB\cdot AC}{AM\cdot AN}\cdot\frac{AM\sin\angle MAD}{AB\sin\angle BAD}\cdot\frac{AN\sin\angle NAD}{AC\sin\angle CAD}=1$$

本题是 2003 年保加利亚数学奥林匹克竞赛题,本文的目的在于给出其不用赛瓦定理及梅涅劳斯定理的证明.利用完全四边形对角线的调和分割性质或赛瓦定理及梅涅劳斯定理可以给出纯几何证法或三角证法.

参考文献

[1] 沈文选.走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(全国高中数学联赛平面几何一题多解)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.

[2] 田廷彦.三角与几何[M].上海:华东师范大学出版社,2005.

再谈两道几何竞赛题的证明

武鹏程

笔者曾在《两道几何竞赛题的新证法》(《数学奥林匹克与数学文化》第二集(文化卷))一文中,给出一道IMO备选题(1994)及一道IMO试题(第42届)的证法,最近在新版的沈文选教授著《平面几何证明方法全书》附录中读到田廷彦先生《几何题究竟是怎样证明的》一文,欣喜之余,技痒效颦,重温一下上述两题的证明思路,对喜欢平面几何证明的"票友"或不无裨益.

1.如图1,直线 AB 过半圆的圆心 O,分别过 A,B 作圆 O 的切线,切圆 O 于 D,C. AC 与 BD 交于 E,自 E 作 AB 的垂线,垂足为 F,求证:EF 平分 $\angle CFD$.

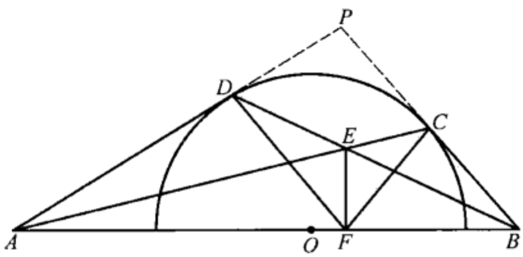


图1

分析 熟知下面题目:

如图2,设 AD 是 $\triangle ABC$ 的高,P 为 AD 上一点,BP 交 AC 于 E,CP 交 AB 于 F,求证:AD 平分 $\angle EDF$.

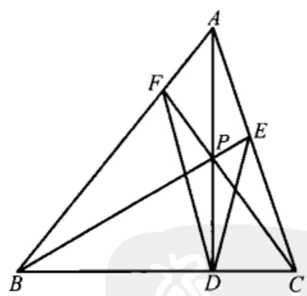


图2

受这题目的启发,我们很自然地要寻找一个三角形,使 AB 为它的一条边,而 F 是 AB 边上高的垂足,因此延长 AD,BC 交于 P,希望能证明 P,E,F 共线.在证明了 P,E,F 共线后,证明 EF 平分 $\angle CFD$ 的方法就很多了.

怎样证明 P,E,F 共线?很多人可能立即想到用塞瓦定理的逆定理,若你对该定理如数家珍,并运用自如,那当然是可以的,But,that's an old-old story.记得我一学完三角函数,老师要我用三角法证明下面这道题目:

如图3,四边形 $ABCD$ 的两组对边延长后交于 K,L,延长对角线 BD 交 KL 于 F,延长对角线 AC 交 KL 的延长线于 G.求证:$\dfrac{KF}{FL}=\dfrac{KG}{GL}$.

此题用塞瓦定理和梅涅劳斯定理可一挥而就,可华罗庚大师却用"冗长"的三角法向中学生们讲解这道题,老师要我一定掌握大师的解法.

下面我们用解析法证明 P,E,F 共线及命题结论.

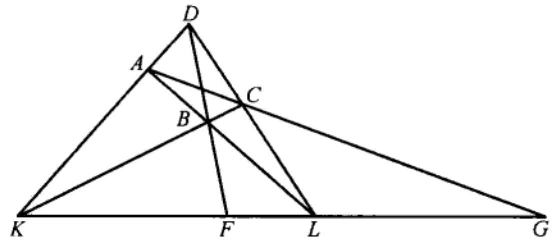


图 3

如图 4,建立直角坐标系,设 $\angle AOD=\alpha,\angle BOC=\beta$,圆 O 半径为 R.

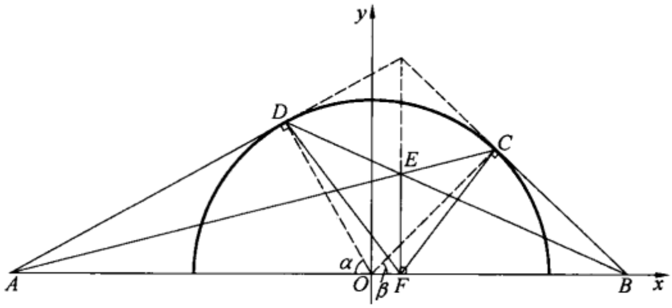


图 4

则 $A(-\dfrac{R}{\cos\alpha},0),B(\dfrac{R}{\cos\beta},0),D(-R\cos\alpha,R\sin\alpha),C(R\cos\beta,R\sin\beta)$.

$$AC:y=\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+1}(x+\frac{R}{\cos\alpha})\qquad ①$$

$$BD:y=-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+1}(x-\frac{R}{\cos\beta})\qquad ②$$

联立 ①② 解得

$$x_E=\frac{R(\sin\alpha-\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=R\cdot\frac{\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}$$

$$AD:y=\cot\alpha(x+\frac{R}{\cos\alpha})\qquad ③$$

$$BC:y=-\cot\beta(x-\frac{R}{\cos\beta})\qquad ④$$

联立 ③④ 解得

$$x_P=\frac{R(\csc\beta-\csc\alpha)}{\cot\alpha+\cot\beta}=R\cdot\frac{\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}$$

所以 $x_E=x_P$,故 P,E,F 共线.

$$k_{DF} = -\frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha - \frac{R(\sin\alpha - \sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}} = -\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$k_{CF} = \frac{R\sin\beta}{R\cos\beta - \frac{R(\sin\alpha - \sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

故 $\angle DFE = \angle CFE$，所以 EF 平分 $\angle CFD$.

这里应指出，本证法并不需要 P,E,F 共线这一事实.

2. 如图 5，在 $\triangle ABC$ 中，AP 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 P，BQ 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 Q，$\angle BAC = 60°$，且 $AB + BP = AQ + BQ$. 问 $\triangle ABC$ 各内角的度数的可能值是多少？

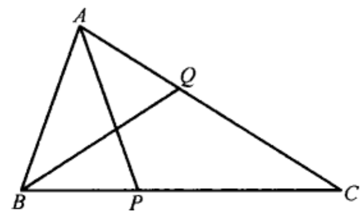


图 5

拿到这道题目，我立即就想到曾经做过这样一道题：

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 2\angle C$. 求证：$AQ + BQ = AC$.

这题目是很容易的，那么 $AP + BP$ 是否也等于 AC？非常幸运，我们很容易证明这结论是成立的，因此猜到，应有 $\angle B = 2\angle C$，即 $\angle B = 80°$，$\angle C = 40°$ 是一个解. 所以若延长 AB 至 M，使 $MB = PB$，再在 AC 上取点 N 使 $BQ = NQ$，那么点 C 应与 N 重合. 用同一法不难给出证明，这也是标准答案公布的解法，此不赘述. 还有别的可能值吗？这使我回忆起这样一道题：

如图 6，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 120°$，AP 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 P，BQ 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 Q，求证：$AB + BP = AQ + BQ$.

这题也不复杂.

因题目限制 $\angle BAC = 60°$.

故 $\angle ABC = 120°$，$\angle C = 0°$ 是一个退化解.

至此，本题的纯几何证法基本清楚了.

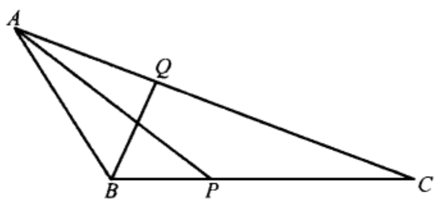


图 6

但我有点不太喜欢同一法，直接的纯几何证法一时难以找到，我便尝试三角计算法，设 $\angle ABC = 2\theta$，用正弦定理，将条件 $AB + BP = AQ + BQ$ 中所有线段都用 θ 的三角函数表示，通过不太轻松的化简工作，可求得 $\theta = 40°$ 或 $\theta = 60°$（舍）（欲知其详，可参见刘培杰老师主编的《历届 IMO 试题集》）.

有了纯几何法和三角法，还有没有更好的方法呢？解析法很难行得通，忽然想到，若设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c. 由角平分线定理和角平分线长公式，AB,BP,AQ,BQ 均可用 a,b,c 表示. 具体说

$$BP = \frac{ac}{b+c}, AQ = \frac{bc}{a+c}$$

$$BQ=\frac{\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]}}{a+c}$$

代入已知条件得

$$c+\frac{ac}{b+c}=\frac{bc}{a+c}+\frac{\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]}}{a+c} \qquad (*)$$

但将此等式去根号化简后得到很复杂的式子，一时没有什么办法，有一天我突然想到答案，$\angle B=2\angle C$！在代数上的对应关系是什么？对了，在学相似三角形时，曾在培优课上做过：

如图7，在$\triangle ABC$中，若$\angle B=2\angle C$，求证：$b^2=c(a+c)$.

退化解$\angle B=120°$，对应的代数关系式由余弦定理应为

$$b^2=a^2+ac+c^2$$

那么在式(*)去根号化简得到的关于a,b,c的代数式$f(a,b,c)$的分解式中必有因式$b^2-c(a+c)$及$b^2-(a^2+ac+c^2)$，通过分解果然得到

$$f(a,b,c)=(a+c)[b^2-c(a+c)][b^2-(a^2+ac+c^2)]$$

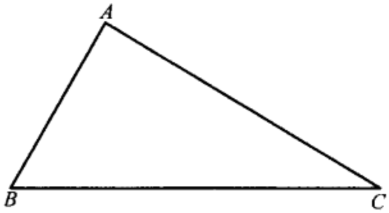


图7

所以由$f(a,b,c)=0$得

$$b^2=c(a+c) \text{ 或 } b^2=a^2+ac+c^2$$

从而，$\angle B=2\angle C$或$\angle B=120°$(舍).

若去掉条件$\angle BAC=60°$，则本题的解答为：

(1) 若$0<\angle BAC<60°$，则$\angle B=2\angle C$或$\angle B=120°$.

(2) 若$\angle BAC\geqslant 60°$，则$\angle B=2\angle C$.

(简化过程见拙文《两道几何竞赛题的新证法》)

由我们上述讨论可知，竞赛问题是复杂的，但只要我们勤于思考，并注意积累经典的重要的知识，竞赛题也不是高不可攀的，你不必期望达到金牌选手的水平，正如你参加体育锻炼不必期望与奥运会冠军比肩，只要能提高身体素质促进健康就是一种满足. 做做奥数试题，锻炼一下思维能力，与高考的目标是不冲突的. 相反你会获得居高临下“一揽众山小”的感觉. 不过记住，要从文化的角度看待奥数，善待数学，千万别钻牛角尖啊！

几道几何竞赛题新解

武鹏程

1.(IMO预选题)设圆 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆,圆 O_1 与 AB,AC 相切于D和E,与圆 O 内切于 P,求证:DE 的中点M 为 $\triangle ABC$ 的内心.

证明 如图1,设 AO_1 与圆 O 交于N,NO 与圆 O 交于S,经过 P,O_1 及 O 的直线交圆O 于T,联结 BN,O_1D,BM. 设 $SN=2R,O_1D=r$, 易得 $\mathrm{Rt}\triangle SBN\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADO_1$,所以

$$\frac{SN}{AO_1}=\frac{BN}{O_1D}$$

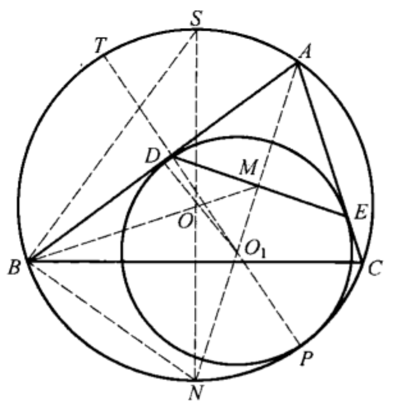


图1

所以 $2Rr=AO_1\cdot BN$

因为 $O_1D^2=O_1M\cdot AO_1$

所以 $r^2=O_1M\cdot AO_1$

因为 $PO_1\cdot O_1T=AO_1\cdot O_1N$

所以 $r(2R-r)=AO_1\cdot O_1N$

所以 $AO_1\cdot BN-O_1M\cdot AO_1=AO_1\cdot O_1N$

所以 $$BN=O_1N+O_1M=MN$$

因为 $$\angle MBN=\angle MBC+\angle NBC=\angle MBC+\angle NAC$$

$$\angle BMN=\angle ABM+\angle BAM$$

$$\angle BAM=\angle NAC$$

$$\angle BMN=\angle MBN$$

所以 $$\angle ABM=\angle MBC$$

所以 M 为 $\triangle ABC$ 的内心.

2.(第二届东南赛试题)已知直线 l 与单位圆S 相切于点P,点 A 与圆S 在l 的同侧,且 A 到l 的距离为$h(h>2)$,从点 A 作S 的两条切线,分别与 l 交于B,C 两点,求线段 PB 与线段 PC 的长度之乘积.

解 如图2,设 $BC=a,AC=b,AB=c$.

圆 S 的半径为r,$a+b+c=2p$,并用 Δ 表示 $\triangle ABC$ 的面积.则

$$PB=(p-b),PC=(p-c)$$

我们有 $$\Delta^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

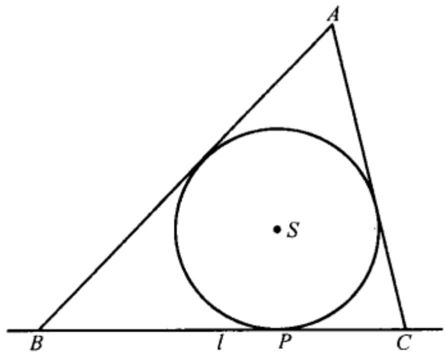


图 2

$$\Delta = pr = p$$

$$2\Delta = ah$$

所以

$$PB \cdot PC = (p-b)(p-c) = \frac{p}{p-a} =$$

$$\frac{2p}{2p-2a} = \frac{ah}{ah-2a} = \frac{h}{h-2}$$

3.(IMO 试题)设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点,满足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

证明 $AP \geqslant AI$,并说明等号成立的充分必要条件是 $P = I$.

如图 3,设 BI,CI 分别交 AC,AB 于 D,E,易知,满足条件的点 P 必在 $\triangle IBE$ 或 $\triangle ICD$ 的内部或与点 I 重合.无妨设点 P 在 $\triangle IBE$ 内,因为

$$PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

所以
$$2(\angle PBC + \angle PCB) =$$
$$\angle B + \angle C = 2(\angle IBC + \angle BCI)$$

所以
$$\angle BPC = \angle BIC$$

所以 B,P,I,C 四点共圆.若 P 不与 I 重合,则

$$\angle AIP = \angle AIB - \angle PIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C - \angle PCB =$$

$$90° + \angle PCI > 90°$$

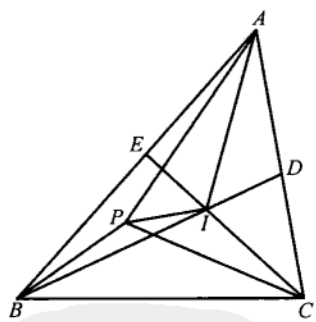


图 3

所以 $AP > AI$.

显然当且仅当 P 与 I 重合时 $AP = AI$.

4.(IMO 试题)在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BCA$ 的角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 R,与边 BC 的垂直平分线交与点 P,与边 AC 的垂直平分线交与点 Q.设 K 与 L 分别是边 BC 和 AC 的中点.证明:$\triangle RPK$ 和 $\triangle RQL$ 的面积相等.

证明 如图 4,以 A,B,C 表示 $\triangle ABC$ 的三个内角,r 为外接圆半径,则

$$CR = 2r\sin(A + \frac{C}{2}), CP = \frac{r\sin A}{\cos\frac{C}{2}}$$

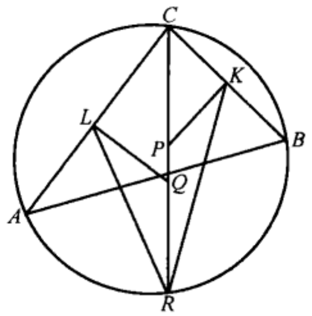


图 4

$\triangle RPK$ 中边 PR 上的高为 $r\sin A\sin\frac{A}{2}$，所以

$$S_{\triangle RPK} = \frac{1}{2}r\sin A\sin\frac{C}{2}\left[2r\sin\left(A + \frac{C}{2}\right) - \frac{r\sin A}{\cos\frac{C}{2}}\right] = \frac{1}{2}r^2\sin A\sin B\tan\frac{C}{2}$$

同理可得 $$S_{\triangle RQL} = \frac{1}{2}r^2\sin A\sin B\tan\frac{C}{2}$$

结论得证.

一个“猜想”的证明及其他

张鹄[①]

参考文献[1]给出了如下的一个“猜想”:

设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}a_i=1,k\in\mathbf{N}^*$,则有

$$\left(\frac{1}{a_1^k}-a_1^k\right)\left(\frac{1}{a_2^k}-a_2^k\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^k}-a_n^k\right)\geqslant\left(n^k-\frac{1}{n^k}\right)^n,n^k\geqslant 3$$

笔者研究发现,最近许多同志发文(如参考文献[2]～[5])对上面的类似不等式作了较深入的论证,但与全面解决此类不等式尚有一段距离.下面笔者对“猜想”给出一般性证明,以期对此作出较完整的归纳.

为此,先证如下的引理:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\geqslant\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}\right)^n$$

其中,$a_i>0,b_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

证明

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}}\leqslant$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+b_i}{a_i+b_i}=1$$

所以

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$$

即 $\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\geqslant\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}\right)^n$ 成立.

再证“猜想”如下:

证明 设 $a_i=\frac{x_i}{s}$,其中 $s=\sum_{i=1}^{n}x_i,t=\prod_{i=1}^{n}x_i$,则

① 湖北省武汉市第二中学,430010.

$$\frac{1}{a_i^k}-a_i^k=\frac{s^k}{x_i^k}-\frac{x_i^k}{s^k}=\frac{(s^k+x_i^k)(s^k-x_i^k)}{x_i^k\cdot s^k}$$

从而

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i^k}-a_i^k)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s^k+x_i^k)(s^k-x_i^k)}{t^k\cdot s^{nk}} \quad ①$$

由引理可知

$$\prod_{i=1}^{n}(s^k+x_i^k)\geqslant(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}s^k}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i^k})^n=(s^k+t^{\frac{k}{n}})^n \quad ②$$

另一方面

$$[\prod_{i=1}^{n}(s^k-x_i^k)]^2=\prod_{i=1}^{n}(s^k-x_i^k)^2=\prod_{i=1}^{n}(s^k-x_i^k)(s^k-x_{n+1-i}^k)=$$
$$\prod_{i=1}^{n}[s^k(s^k-x_i^k-x_{n+1-i}^k)+x_i^k\cdot x_{n+1-i}^k]$$

而

$$s^k-x_i^k-x_{n+1-i}^k=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k-x_i^k-x_{n+1-i}^k\geqslant$$
$$(n^k-2)\left(\frac{t^{k\cdot n^k}}{x_i^k\cdot x_{n+1-i}^k}\right)^{\frac{1}{n^k-2}}$$

所以

$$\prod_{i=1}^{n}(s^k-x_i^k)^2\geqslant\prod_{i=1}^{n}[(n^k-2)s^k\cdot\left(\frac{t^{k\cdot n^k}}{x_i^k\cdot x_{n+1-i}^k}\right)^{\frac{1}{n^k-2}}+x_i^k\cdot x_{n+1-i}^k]\geqslant$$
$$\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}s^k(n^k-2)\cdot\left(\frac{t^{n^k\cdot k}}{x_i^k\cdot x_{n+1-i}^k}\right)^{\frac{1}{n^k-2}}}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i^k\cdot x_{n+1-i}^k)}\right)^n=$$
$$[(n^k-2)s^k\cdot t^{\frac{k}{n}}+(t^{\frac{k}{n}})^2]^n=t^k[(n^k-2)\cdot s^k+t^{\frac{k}{n}}]^n$$

即

$$\prod_{i=1}^{n}(s^k-x_i^k)\geqslant t^{\frac{k}{2}}[(n^k-2)\cdot s^k+t^{\frac{k}{n}}]^{\frac{n}{2}} \quad ③$$

②,③ 代入 ① 整理可得

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i^k}-a_i^k)\geqslant\frac{[(n^k-2)\cdot s^k+t^{\frac{k}{n}}]^{\frac{n}{2}}\cdot(s^k+t^{\frac{k}{n}})^n}{t^{\frac{k}{2}}\cdot s^{nk}} \quad ④$$

又得

$$(n^k-2)s^k+t^{\frac{k}{n}}=\underbrace{\frac{s^k}{n^k}+\frac{s^k}{n^k}+\cdots+\frac{s^k}{n^k}}_{n^k(n^k-2)\text{个}}+t^{\frac{k}{n}}\geqslant$$
$$(n^k-1)^2\cdot(\frac{s^k}{n^k})^{\frac{n^k(n^k-2)}{(n^k-1)^2}}\cdot t^{\frac{k}{n(n^k-1)^2}} \quad ⑤$$

$$s^k+t^{\frac{k}{n}}=\underbrace{\frac{s^k}{n^k}+\frac{s^k}{n^k}+\cdots+\frac{s^k}{n^k}}_{n^k\text{个}}+t^{\frac{k}{n}}\geqslant$$

$$(n^k+1)\cdot(\frac{s^k}{n^k})^{\frac{n^k}{n^k+1}}\cdot t^{\frac{k}{n(n^k+1)}} \quad ⑥$$

⑤,⑥代入④得

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i^k}-a_i^k)\geqslant(n^k-1)^n\cdot(\frac{s^k}{n^k})^{\frac{n^{k+1}(n^k-2)}{2(n^k-1)^2}}\cdot t^{\frac{k}{2(n^k-1)^2}}\cdot(n^k+1)^n\cdot(\frac{s^k}{n^k})^{\frac{n^{k+1}}{n^k+1}}\cdot t^{\frac{k}{(n^k+1)}}=$$

$$\frac{(n^{2k}-1)^n\cdot(\frac{s^k}{n^k})^{\frac{n^{k+1}(n^k-2)}{2(n^k-1)^2}+\frac{n^{k+1}}{n^k+1}}\cdot t^{\frac{k}{2(n^k-1)^2}+\frac{k}{n^k+1}}}{t^{\frac{k}{2}}\cdot s^{nk}}=$$

$$\frac{(n^{2k}-1)^n\cdot s^{kn[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n^k-1)^2}-\frac{1}{n^k+1}]}}{(n^k)^{n[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n^k-1)^2}+\frac{n^k}{n^k+1}]}\cdot t^{\frac{k}{2}-\frac{k}{2(n^k-1)^2}-\frac{k}{n^k+1}}}$$

$n^k\geqslant3$,因为$\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n^k-1)^2}+\frac{n^k}{n^k+1}>0$,又$s\geqslant n\cdot t^{\frac{1}{n}}$,所以

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i^k}-a_i^k)\geqslant(n^{2k}-1)^n\cdot\frac{n^{nk[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n^k-1)^2}-\frac{1}{n^k+1}]}}{n^{nk[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n^k-1)^2}+\frac{n^k}{n^k+1}]}}=$$

$$(n^{2k}-1)^n\cdot\frac{1}{(n^k)^n}=(n^k-\frac{1}{n^k})^n$$

参考文献

[1] 蒋明斌.用“零件不等式”证明一类积式不等式[J].数学通讯,2004(17).

[2] 戴承鸿,刘天兵.一个猜想的证明[J].数学通讯,2002(23).

[3] 胡进新.也读$\prod(x_i+\frac{1}{x_i})>(n+\frac{1}{n})$的证明[J].数学通讯,1989(2).

[4] 徐文兵.用“零件不等式”证明一类带齐的分式不等式[J].数学通讯,2004(5).

[5] 周金峰,谷焕春.不等式$\prod(\frac{1}{x_i}-x_i)\geqslant(\frac{n}{k}-\frac{k}{n})^n$成立的另一限制条件[J].中学数学研究,2004(8).

关于几个不等式的证明

张鹄

罗增儒在 2004 年《中学数学教学参考》的《进退互化、成败相辅》一文中给出如下一组不等式:

已知:$x_i \in \mathbf{R}^+, i = 1,2,3,\cdots,n, k \in \mathbf{N}^*, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$,则

(1) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} + x_i\right) \geqslant \left(n + \frac{1}{n}\right)^n$;

(2) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k} + 1\right) \geqslant (n^k + 1)^n$;

(3) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k} + x_i^k\right) \geqslant \left(n^k + \frac{1}{n^k}\right)^n$;

(4) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k} - 1\right) \geqslant (n^k - 1)^n$;

(5) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - x_i\right) \geqslant \left(n - \frac{1}{n}\right)^n$(此处 $n \geqslant 3$).

文中对(5) 给出证明,而对(1) 至(4) 未给出证明.因此,本文则对前 4 个不等式进行证明.首先,证明两个引理.

引理 1 若 $a_i, b_i \in \mathbf{R}^+, i = 1,2,3,\cdots,n$,则 $\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

证明 此不等式等价于

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

因为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i + b_i}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i + b_i}$$

所以

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{a_i + b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i + b_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i + b_i}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i + b_i}{a_i + b_i}\right) = 1$$

引理 1 得证.

将引理 1 推广,又得下面引理 2.

引理 2 $a_{ij}\in\mathbf{R}^{+}, i=1,2,3,\cdots,n; j=1,2,3,\cdots,m$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}$$

证明 此不等式等价于

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}\leqslant 1$$

因为

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}}\right)$$

所以

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}}\right)\right]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}}=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{1}{n}\cdot n=1$$

引理 2 得证.

在下面的证明中,要用到如下的结论:

令 $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$,对 $f(x)$ 求导,得 $f(x)=1-\frac{1}{x^{2}}$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)=1-\frac{1}{x^{2}}<0, f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)=1-\frac{1}{x^{2}}>0, f(x)$ 单调递增;

当 $x=1$ 时,$f'(x)=0, f(x)$ 在 $x=1$ 时取最小值 2.

下面对不等式(1) ~ (4) 给出证明.

对(1),由引理 1

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_{i}+\frac{1}{x_{i}}\right)\geqslant\left[\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{i}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{n}$$

因为

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i}=\frac{1}{n}\leqslant 1$$

由上面结论,$f(x)$ 在$(0,1)$ 上单调递减,故 $f\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right] \geqslant f\left(\frac{1}{n}\right)$,即

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}} \geqslant \frac{1}{n} + n$$

从而

$$\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}\right]^n \geqslant \left(\frac{1}{n} + n\right)^n$$

对(2),同样运用引理 1,有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k} + 1\right) \geqslant \left[\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^k}\right)^{\frac{1}{n}} + 1\right]^n = \left(\frac{1}{\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^k} + 1\right)^n \geqslant$$

$$\left[\left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^k + 1\right]^n = (n^k + 1)^n$$

对(3),由引理 1

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k} + x_i^k\right) \geqslant \left[\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^k}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^k\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = \left\{f\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^k\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right\}^n$$

因为

$$\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^k \leqslant \left[\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^k = \frac{1}{n^k} \leqslant 1$$

所以

$$f\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^k\right)^{\frac{1}{n}}\right] = f\left\{\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^k\right\} \geqslant f\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

$$\left\{f\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^k\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right\}^n \geqslant \left[f\left(\frac{1}{n^k}\right)\right]^n$$

即

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^k + \frac{1}{x_i^k}\right) \geqslant \left[f\left(\frac{1}{n^k}\right)\right]^n = \left(n^k + \frac{1}{n^k}\right)^n$$

对(4),分两步证明.

(ⅰ)$k = 1$ 时,原不等式等价于 $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - 1\right) \geqslant (n-1)^n$. 由于

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - x_i}{x_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j\neq i, j=1}^{n} x_j}{x_i} \geqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{(n-1)\left(\prod_{j\neq i, j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n-1}}}{x_i} =$$

$$(n-1)^n\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n}x_j}{x_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}=$$

$$(n-1)^n\cdot\frac{\left[\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_j\right)^n\right]^{\frac{1}{n-1}}\Big/\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}=(n-1)^n$$

即 $k=1$ 时(4) 成立.

(ⅱ) 当 $k\geqslant 2$ 时,由于$(a^k-1)=(a-1)\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}a^i\right)$,那么

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k}-1\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{x_i}-1\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{x_i}\right)^j\right)\right]\geqslant(n-1)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{x_i}\right)^j\right]\geqslant(\text{由}(\text{Ⅰ}))$$

$$(n-1)^n\cdot\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^j\right]^{\frac{1}{n}}\right\}^n(\text{由引理 2})=$$

$$(n-1)^n\cdot\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}\right)^j\right]^n\geqslant(n-1)^n\cdot\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)^j\right]^n=$$

$$(n-1)^n\left(\sum_{j=0}^{k-1}n^j\right)^n=\left[(n-1)\left(\sum_{j=0}^{k-1}n^j\right)\right]^n=(n^k-1)^n$$

即 $k\geqslant 2$ 时(4) 成立.

以上利用引理 1、引理 2、平均值不等式作出整体上的调控,完成了对(1) ~ (4) 的证明.另外,还可对上述不等式作如下的推广:

若 $x_i\in\mathbf{R}^+$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant 1$,则不等式(1) ~ (5) 仍然成立.

这里,只须对$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i<1$ 给出证明.

事实上,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i+x_n<1$,选取 x'_n,使 $x'_n\in(x_n,1)$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i+x'_n=1$,则

$$1>(x'_n)^k>x_n^k,x_n+\frac{1}{x_n}>x'_n+\frac{1}{x'_n}$$

所以

$$\left(\frac{1}{x_n}+x_n\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}+x_i\right)\geqslant\left(\frac{1}{x'_n}+x'_n\right)\cdot\prod_{i=1}^{n-1}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$$

即(1) 成立.

又由$\frac{1}{x_n^k}\pm 1>\frac{1}{(x'_n)^k}\pm 1$ 得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i^k}\pm 1\right)>\left[\frac{1}{(x'_n)^k}\pm 1\right]\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i^k}\pm 1\right)\geqslant(n^k\pm 1)^n$$

即(2),(4) 成立.

由 $f[(x'_k)^k] < f(x_n^k)$,即 $x_n^k + \frac{1}{x_n^k} > (x'_n)^k + \frac{1}{(x'_n)^k}$,所以

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^k + \frac{1}{x_i^k}\right) > \left[\frac{1}{(x'_n)^k} + (x'_n)^k\right]\prod_{i=1}^{n-1}\left(x_i^k + \frac{1}{x_i^k}\right) \geqslant \left(n^k + \frac{1}{n^k}\right)^n$$

即(3) 成立.

由 $\frac{1}{x'_n} < \frac{1}{x^n}$, $-x'_n < -x_n$,得 $0 < \frac{1}{x'_n} - x'_n < \frac{1}{x_n} - x_n$,所以

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - x_i\right) > \left(\frac{1}{x'_n} - x'_n\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - x_i\right) \geqslant \left(n - \frac{1}{n}\right)^k$$

即式(5) 成立.

苦乐人生　数学相伴

邓寿才

笔者1962年7月13日出生于四川省泸州市纳溪区上马镇银坪村,1980年在上马高中毕业回乡.先后在3个县5所中学代任初中理科课程8年之久,担任过农村基层干部,1995～2000年在北京餐饮业任会计工作.

笔者8岁上小学,由于当时正值文革后期,在小学一至三年级都没有课本.在两年半日制初中,没见过物理、化学、外语教材.在两年的高中时期只有语文、数学、物理、化学成绩稍好些,1980年高考时数学才考了67分.

故乡鸟语花香,山青水秀,风光无限,但是经济文化相当落后,直到1990年才点上了电灯,外加家庭人口多,劳力少,我要耕种八分责任田,生活艰辛曲折.在空闲时,山村男人(也有女人)多数以打牌赌钱消磨时光(我的父母和兄弟特爱),苦中寻乐.在赌风浓厚的环境中,我的兴趣与众不同,别具一格:人们发现我的嗓音雄浑激越,常常叫我唱歌讲故事,以此丰富文化生活;另外,我爱好诗词,喜欢看书.

我的人生之路沧桑艰辛,在年少时一次被洪水冲走,一次一人上山砍柴落崖,两次均差点丧命.特别在1984年冬,本人考上了乡镇招聘干部,但情因自己"朝中无人莫做官,寒透青春心".次年婚后相继添了两个小新人,增添了人生之乐.

本人先有三个爱好:喜欢听歌、唱歌;喜欢欣赏书法;喜爱文学,特别喜欢散文和古典诗词中的名篇名句,并仿写诗词.1995年在专辑《闪光的青春》上发表了处女作《敬纪邓盛刚》诗三首.同年秋在北京参加首届中华诗词大赛,《清明散咏》获二等奖.并先后在《泸州报》上发表诗作多篇.2005年又在泸州教育网上发表组诗(共18首).

1986年春,我在县新华书店买书时,买了一本《古今数学趣话》(定价1.5元),回家后细读时,被书中的中外数学大师的精彩历程所打动,对他们产生了深深的敬慕之情.以前我觉得数学园林里浓烟弥漫,模糊不清,好像覆盖了一层神秘的面纱;觉得数学的围墙密不透风,高不可攀;觉得数学深奥难懂,枯燥无味;觉得数学难以理解,使人忘而却步……

当我怀着激动、敬慕的心情细细看完这本书时,我仿佛走进了美丽的数学世界,深深地陶醉于那无限的绮丽风光.从此我知道了什么是布洛卡尔点和费尔马点,什么是欧拉线和西姆松线,什么是费马大定理、哥德巴赫猜想、四色定理和拿破仑定理,什么是亲和数、完全数、无限数、四元数.

为了养家建房,我不仅做过会计工作,还拉过煤,当过建筑工,干过砖厂,进过花场和

玻璃厂,至今在耐奇锁厂.但是自从1986年读过《中外数学趣话》之后,我的业余爱好不仅是爱读文学书籍和写诗,而且戒烟省钱买高等数学书籍,订数学杂志及相关数奥书刊.由于生活所迫和时间关系,我爱好数学在时间上是断断续续的,不连续的,就像离散函数.但是,毕竟我爱到了今天.

记得当年我发现了些数学小结论,写成文后多次向几家数学刊物投寄,以期发表,但均未成功.没有不透风的墙,人们知道了便议论纷纷,风言风语 —— 数学那么高难,大学生都投稿难中,何况你一个山区农民,简直是白日做梦,异想天开 …… 但是,我已深深地爱上了数学,并因此而入迷,如痴如醉.终于,我在《厦门数学通迅》1987年第四期上发表了处女作《一个数学问题的新证》,后来又相继在《数学通迅》、《中等数学》等刊物上发表作品.

从此,我体会到数学具有和谐美、对称美、简捷美、奇异美.从此,我觉得数学是彩云,是星月,五彩缤纷,光彩照人;数学是乐曲,是歌声,清新悦耳,悠扬动听;数学是鲜花芳草,是玉液琼浆,芳香四溢,香甜可口,回味无穷;数学是美女,是天仙,美艳绝世,夺魄勾魂 ……

我曾幻想,如果数学是块玉石,我愿当一位雕刻匠,将它精雕细刻,铸成一件巧夺天工的艺术品;如果数学是粒珍贵的树种,我愿做一位园丁,辛勤地将它浇水施肥,修枝剪叶,看着它生根发芽,开花结果,长得枝繁叶茂,直到长成参天大树;如果数学是一片色彩耀目的彩锦,我多想成为一位绣花女,为它锦上添花 ……

附笔者诗作选:

采茶篇

春风伴我步茶园,翠碧千顷二月天.
巧手穿梭织锦绣,玉指弹琴谱新篇.
山歌飘出水村外,彩云映红桃花面.
满载新叶归何处?芳草池塘夕阳边.

方山春咏

最喜方山春来景,林木参天花满径.
石狮奇塔金座佛,罗汉香阁玉观音.
幽景千般飞烟云,佛珠一对照乾坤.
钟声招来天下客,风光无限非凡尘.

家　访

抽闲相邀同家访,夕阳无边挥汗行.
攀岩登峰观山水,谈笑风生话古今.
杯杯盏盏好客意,点点滴滴师生情.
立志辛勤育桃李,莫负家长一片心.

咏　竹

江南四季披绿绸，竹海泛波碧悠悠.
枝枝叶叶皆有用，野岭荒丘别无求.
风折雪压经冬夏，雨打霜侵傲春秋.
自古丹青偏爱竹，高风亮节比风流.

银坪风光

故乡本仙境，风光赛凡尘.
交错溪河碧，纵横岭峰青.
鸟吹无孔笛，蛙鸣不弦琴.
桃源何处觅?江南银坪村.

一个竞赛数学爱好者的学习历程

武瑞新

我没参加过数学竞赛，我的竞赛数学水平充其量也就是点“三脚猫”功夫，实在不足为外人道的，承蒙刘培杰老师错爱，在《数学奥林匹克与数学文化》上发表两篇小文，刘老师要我谈谈学习数学的经历，但我深知，我以往所学还不足以使我在数学方面说出有价值的东西，尤其是在《数学奥林匹克与数学文化》这样严谨的书籍上，更不敢造次．因刘培杰老师一再鼓励，惶恐再三，略陈中学时代所学和对当前中学数学教育的看法，以期与竞赛数学爱好者共勉．

我觉得自己很幸运，高中时，我的几位数学老师引导我走进数学的广阔天地，他们推荐我读了些现在看来是非常有用的书，记得那时(20世纪70年代末)书店里远不像现在，各种教辅书铺天盖地，但20世纪60年代初由华罗庚等大数学家写的一些“小册子”却有出售了，如华罗庚的《从孙子的神奇妙算谈起》，《从杨辉三角谈起》，《从祖冲之的圆周率谈起》，《数学归纳法》，《从单位圆谈起》，闵嗣鹤的《格点和面积》，江泽函的《拓扑》，蔡宗熹的《等周问题》，常庚哲、伍润生的《复数与几何》，史济怀的《平均》，龚昇的《从刘徽割圆谈起》，莫怀戚的《函数的极大极小问题》，《一笔画与邮递线路问题》(忘记作者)，许纯舫的几何著作里面的习题我几乎都做了．此外还自学了黄正中的《高等数学》(未学完)，这是当时我在新华书店里能见到的读物．遗憾的是上述著作多从老师及同学处借阅(经济原因)，待我有了条件欲购买时却已绝版了．真希望那套“数学小丛书”能够再版．此外读得比较透的是华罗庚作序的1978年全国中学数学竞赛题集．这书现在也不可得了，华老在序中给出的下文问题(6)的优美证明，当时使我非常震撼，尽管用Ceva定理及Menelaus定理可以轻易证明该题，但华老的三角证法，可谓令人叹为观止．大约在高二时，从一本杂志上读到Morely定理的余统定理证法，遂对公式 $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$(my pet formula)刻骨铭心．后来陆续读到一些纯几何证法(1982年上海市数学竞赛曾把Morely定理作为第二试的压轴题)。其实蒋声教授在1980年出版的《从单位根谈起》这本精彩的小书中，用复数的方法彻底研究了Morely三角形问题，发现了18个Morely正三角形而且给出Morely定理一个十分漂亮的复数证法．奇怪的是近年来不断有人重复蒋声的工作，并作为新的发现．

更让我觉得幸运的是，下面这些问题是我的老师在课堂上讲过或在测试中考过的：

(1) 对锐角 $\triangle ABC$，求证：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$．

(2) 对任意 $\triangle ABC$，求证：$\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\sqrt{3}$．

(3) 求证:等周长的所有三角形中,正三角形具有最大面积.

(4) 求证:等周长的所有四边形中,正方形具有最大面积.

(5) 求证:四边长固定的所有四边形中,圆内接四边形具有最大面积.

(6) 四边形 $ABCD$ 的两组对边 DA, CB 及 AB, DC 延长后相交于 K, L,对角线 DB 延长后交 KL 于 F,对角线 AC 延长后交 KL 之延长线于 G,如图 1 所示,求证

$$\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{GL}$$

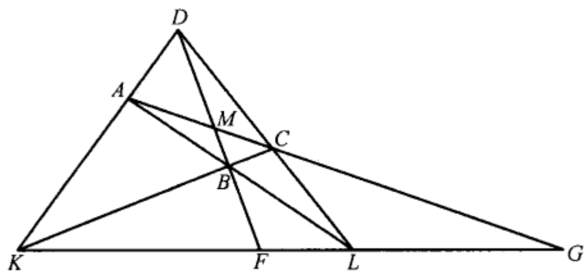


图 1

(关于题(6) 最好读一下华罗庚大师的精彩证明)

(7)
$$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha)$$
$$\tan 3\alpha = \tan\alpha\tan(60^\circ+\alpha)\tan(60^\circ-\alpha)$$

(8)
$$\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ = 1$$

(9) 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $P(x_0,y_0)$是椭圆外一点, PA, PB 是椭圆的两条切线, A, B 为切点, F 为椭圆的一个焦点,求证: $\angle PFA=\angle PFB$.

(10) 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $P(x_0,y_0)$是椭圆外一点, PA, PB 是椭圆的两条切线, A, B 为切点, F 为椭圆的一个焦点, Q 为椭圆上异于 A, B 的动点,过 Q 的动切线交 PA, PB 于 M, N,求证: $\angle MFN$ 为定值.

(11) 设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $a>0$, $b>0$,求$\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}$的最小值.

(12) 已知椭圆 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$, $M(x_0,y_0)$ 是椭圆内一点,直线 L: $Ax+By+C=0$ 过点 M,交椭圆于 P, Q 两点,且 M 为线段 PQ 的中点,过点 M 的直线

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0, L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

分别交椭圆于 E, G 及 F, H,直线 EH 及 FG 交直线 L 于 U, V,直线 EF 及 GH 交直线 L 于 S, T.求证: $US=TV$(结论对其他二次曲线亦成立)

……

在今天的奥赛选手看来,上述题目也许太老套了,根本不值一晒,但请注意,这些当年在重点中学很平常的问题,现在除了奥赛选手还有几个学生知道呢?

上述题目是我在高中时做过,而现在仍清晰地记得的题目,实在算不上难题,但每当有高中同学要我指导时,我便拿这些题目测试他们,令人吃惊的是很少有人知道并给出正确解答.

迄今为止,我在数学方面的思考可以说无足挂齿,我最“得意”的东西不过是高中时读了龚昇教授的《从刘徽割圆谈起》后利用龚昇教授证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$的方法算出$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$和$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}$.大一时,在高等代数课中学了对称多项式理论后,又算出$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}=\frac{\pi^8}{9\ 450}$及$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93\ 555}$,再往下算就不胜其繁了.待到学了傅里叶级数后,方知利用贝努利数可以方便地计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}(k\in\mathbf{N}^+)$.

我想指出的是,数学教育或教育数学都应当教给学生们正确的数学观念,数学不是“算术”或“算学”,更不仅仅是一种技能或一件工具.数学是一种语言,是美学,是哲学,是文化,数学思想是人类文明最为辉煌的成就;因此中学数学教育必须传授数学的经典内容,而不能以高考目标和能力要求制约高中数学教学水平和对学生的能力要求.否则将严重妨碍对青少年的智力开发和创新能力、研究能力的培养.

然而我们是怎样对待数学的呢,中小学课堂里的数学正在变成支离破碎的东西,数学教育在功利主义和高考指挥棒的控制下,已经变得俗不可耐,就像罗声雄教授在《数学的魅力》一书中所说的“即使你把中学数学减少到只剩下整数的四则运算,人们照样可以制造出成千上万道难题,不仅可以难为学生,而且可以难倒老师”.

可以说,现在成千上万的中学生正在接受不合格的数学教育,我们的教师们在应试教育的大棒指挥下,正在做这样一种“伟大的”工作 —— 教没有掌握数学的孩子们考数学(其他学科也一样)的高分,我不是在危言耸听,某些高二学生,期末数学考了140多分,可寒假作业上这样一道题:已知$x>0$,求$2x^2+\frac{3}{x}$的最小值却束手无策,而他们是某省级示范高中理科重点班的学生.

数学是解题的艺术,但解那些无聊、无用的应试八股,是对智力的摧残而不是锻炼.

我之所以喜欢竞赛数学,是因为竞赛数学对初等数学概念的演绎更接近数学的本质,更贴近数学文化,已故名师孙维刚在北京市22中的试验表明,掌握数学知识并不需要太多的(如果不是要当数学家的话)天赋,从中考成绩一般的学生中,也能培育出IMO的金牌选手,所以我建议那些被“应试技巧”害苦了的同学们,读一读刘培杰老师的书,跳出题海,享受数学带给我们的快乐.

我喜爱数学,因为数学具有一种至高无上的美,就像大数学家高斯所赞美的 —— 数学是科学的皇后.著名数学家徐利治在《科学文化人与审美意识》一文中说,数学是一门最美的科学,“没有哪一门艺术能比数学更有效地修饰人们的心灵”,数学教会人们客观地、公正地对待事物和处理问题,数学能杜绝人们的主观偏见,激发人们对真理的热爱,并增长人们追求真理的勇气和毅力.

我喜欢数学，还因为在数学的思考中，我们可以获得一种精神的满足(Intellectual Satisfaction)，因为没人会怀疑哈代的名言：想象的世界比真实的世界更美好('Imaginary' universes are so much more beautiful than this stupidly constructed 'real' one).

在经历一日，甚或数日数夜繁忙的警务活动，洗去疲劳，睡眠之前，躺在床上，在柔和的灯光下读几页一流作者的数学著作，感受心灵的宁静，那感觉真是太美好了！

春到人间　百花开放

—— 平均值不等式与数学文化

邓寿才

1　春到人间

众所周知，对于任意两个数 a_1, a_2，我们有

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \qquad ①$$

显然，式 ① 等号成立仅当 $a_1 = a_2$.

对于 3 个正数 a_1, a_2, a_3 而言，应用式 ①，并记 $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = G \Leftrightarrow a_1 a_2 a_3 = G^3$，有

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1 a_2} \\ a_3 + G \geqslant 2\sqrt{G a_3} \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + G \geqslant 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{G a_3}) \geqslant$$

$$4\sqrt[4]{a_1 a_2 \cdot G a_3} = 4\sqrt[4]{G^3 \cdot G} = 4G \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 3G \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \qquad ②$$

在没有诞生平均值不等式以前，用最原始的式 ①，巧妙组合，建立了式 ②.

此外，如果我们作代换

$$(a_1, a_2, a_3) = (x^3, y^3, z^3)$$

因式分解

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) =$$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz \Rightarrow$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

等号成立仅当

$$x - y = y - z = z - x = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

可见,用此法也能推出式②来,并且,细心的人会发现,从上述分解因式可知,只要 x,y,z 满足条件 $x+y+z\geqslant 0$,就会有

$$x+y+z\geqslant 0\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz \quad ③$$

反之,如果 $x+y+z\leqslant 0$,则

$$x+y+z\leqslant 0\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\leqslant 3xyz \quad ④$$

这充分表明:式②成立的充要条件,可以从"$a_1,a_2,a_3>0$"放宽为"$\sqrt[3]{a_1}+\sqrt[3]{a_2}+\sqrt[3]{a_3}\geqslant 0$",这是一点小小的新发现.

再继续,对于4个正数 a_1,a_2,a_3,a_4,我们依照式②的推导方法有

$$\begin{cases}a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2}\\ a_3+a_4\geqslant 2\sqrt{a_3a_4}\end{cases}\Rightarrow$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant 2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4})\geqslant 4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\Rightarrow$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \quad ⑤$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}a_1=a_2,a_3=a_4\\ \sqrt{a_1a_2}=\sqrt{a_3a_4}\end{cases}\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4$$

综述

仿照式⑤的推导技巧,对于 $n=2^m(m\in\mathbf{N})$,即当 n 为2的自然数次方幂时,有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad ⑥$$

其实,如果我们记 $n(n\in\mathbf{N})$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均值为 A_n,几何平均值为 G_n,那么有 $A_n\geqslant G_n$,即

定理1 设 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n(n\in\mathbf{N})$ 为 n 个正数,则有不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad (A_1)$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

关于式(A_1)的证法很多(约有20种),但只有用反向归纳法证明最简洁:

证明 (1)当 $n=1,2,3,4$ 时,我们已证明式(A_1)成立;

(2)假设当 $n=k+1$ 时,式(A_1)成立,则有

$$a_1+\cdots+a_k+G_k\geqslant(k+1)\sqrt[k+1]{a_1\cdots a_kG_k}=(k+1)\sqrt[k+1]{G_k^k\cdot G_k}=(k+1)G_k\Rightarrow$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\geqslant kG_k\Rightarrow\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$$

这表明当 $n=k$ 时式(A_1)也成立,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k=G_k$.

综合上述(1)和(2)知,对任意 $n\in\mathbf{N}$,式(A_1)成立.

放眼观望,式(A_1)确实结构对称,外观漂亮,形态优美,状如跃江大桥,靓如飞天彩虹.

爱追根溯源的"考古者"也许要问:"式(A_1)诞生于何时何地呢?""江人何时初见月,江月何年初照人?"其实,当你翻开那《人类数学发展史》时,便知道:法国著名数学家柯

西，早在1821年的著作中，就建立了不等式(A_1)．后来，人们习惯地把式(A_1)左边叫做 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均，记为 A_n 或 A，把右边叫做几何平均，记为 G_n 或 G，并把式(A_1)取名为"平均值不等式"或"算术－几何平均值不等式"．

显然，式(A_1)是式①②⑤的一个统一与推广，它的用途广泛而重要，便于记忆．在20世纪，人们围绕初等数学中这一重要不等式的证明、应用、加强、推广，数学工作者和爱好者们对它进行了广泛深入的探讨和卓有成效的研究，取得了一系列重要成果，深深地吸引了国内外众多的读者．特别是它那广泛的用途，如果至今人类还没有发现定理1，那么人类的数学至今可能也未发展壮大．

自从定理1的出现，人们就逐步把平均的概念和定义不断延伸、扩展、推广，新生了指数平均、对数平均、对称平均……，但重要而又常用的是调和平均、幂平均、加权平均及加权幂平均，自然地新生了不等式，如幂平均不等式

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad ⑦$$

其中 $\alpha>\beta$，并定义(可用极限求)

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^\theta}{n}\right)^{\frac{1}{\theta}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

因此，当取特例 $\alpha=1,\beta=0$ 时，式⑦化为式(A_1)，所以式⑦是式(A_1)的指数推广：

再将式⑦从系数方面进行推广，就是加权幂平均不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad ⑧$$

其中 $p_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$，且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$．

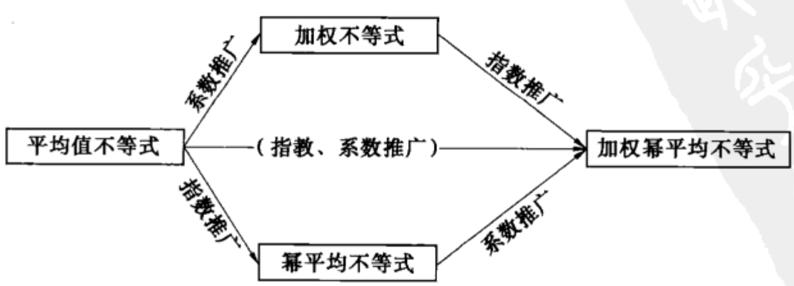
特别地，当 $p_i=\frac{1}{n}$ 时，式⑧化为式⑦，并定义

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}=a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}$$

自然地，当取 $\alpha=1,\beta=0$ 时，式⑧化为加权不等式

$$\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i} \quad ⑨$$

可见，上述不等式之间彼此有"血缘关系"，为清楚明白，我们把它图示如下：



可见,上图中的四个不等式关系复杂,盘根错节.关于这方面的系统介绍,简直可以写成一本内容丰富精彩的书,如史济怀教授著的《平均》.在数学欣赏上,笔者是唯美主义者,不美妙不欣赏,不精彩不收藏.故本文介绍一部分适合中学数奥,颇具启发性和趣味性的美妙结论.

在式 ⑨ 中,取 $n=3$,便得 3 元加权不等式

$$p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3\geqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3} \tag{⑩}$$

其中 $p_i\in(0,1)(i=1,2,3)$,且 $p_1+p_2+p_3=1$.

当取 $p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$ 时,式 ⑩ 化为式 ②

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

因此,式 ⑩ 是式 ② 的系数推广.

由于式 ② 的一个加强是 3 元对称不等式

$$(a_1+a_2+a_3)^2\geqslant 3(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) \tag{⑪}$$

而笔者在过去已介绍过上式的一个系数推广

$$[(\lambda_2+\lambda_3)a_1+(\lambda_3+\lambda_1)a_2+(\lambda_1+\lambda_2)a_3]^2\geqslant$$
$$4(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) \tag{⑫}$$

其中 $\lambda_i,a_i(i=1,2,3)$ 均为正数,等号成立仅当 $\lambda_1/a_1=\lambda_2/a_2=\lambda_3/a_3$.

显然,当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 时,式 ⑫ 即为式 ⑪.

在式 ⑫ 中应用 3 元平均不等式,有

$$[\sum(\lambda_2+\lambda_3)a_1]^2\geqslant 4(\sum\lambda_1\lambda_2)(\sum a_1a_2)\geqslant 12(\sum\lambda_1\lambda_2)\cdot(a_1a_2\cdot a_2a_3\cdot a_3a_1)^{\frac{1}{3}}=$$
$$12(\sum\lambda_1\lambda_2)(a_1a_2a_3)^{2/3}\Rightarrow$$
$$(\lambda_2+\lambda_3)a_1+(\lambda_3+\lambda_1)a_2+(\lambda_1+\lambda_2)a_3\geqslant$$
$$2\sqrt{3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \tag{⑬}$$

等号成立仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 及 $a_1=a_2=a_3$.

因此,式 ⑫ 是式 ② 的又一个系数推广.

联想到许多数奥资料上均可见到的三角母不等式

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2\geqslant 2(a_2a_3\cos A+a_3a_1\cos B+a_1a_2\cos C) \tag{⑭}$$

其中 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 之三内角,等号成立仅当

$$a_1\csc A+a_2\csc B=a_3\csc C \tag{⑮}$$

式 ⑭ 配方为

$$(a_1+a_2+a_3)^2\geqslant 2\sum a_2a_3(1+\cos A)=$$
$$4(a_2a_3\cos^2\frac{A}{2}+a_3a_1\cos^2\frac{B}{2}+a_1a_2\cos^2\frac{C}{2}) \tag{⑯}$$

于是,我们又得到了式 ⑪ 的一个新的系数推广.

由此可见,3 元平均不等式与 3 元对称不等式均有两个系数推广,真是好事成双.

2 百花芬芳

有了定理 1 作强而有力的武器,我们就能解证许多妙题.

结论 1 设 $x,y,z>0$,求证:

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\left(\frac{z+x}{2}\right)^2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xyz\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \tag{B_1}$$

一看(B_1)的外形就优美庞大,好像在向我们挑战.如果按常规思路将式(B_1)两边展开再进行配方比较,那复杂程度真是让人望而却步,因此,对付这类题目宜用代换法智取.

证法 1 令

$$\begin{cases} y+z=2a>0 \\ z+x=2b>0 \\ x+y=2c>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x=b+c-a>0 \\ y=c+a-b>0 \\ z=a+b-c>0 \end{cases}$$

由此可见以 a,b,c 为三边长可以构成面积为Δ 的 $\triangle ABC$,则

$$16\Delta^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

且式(B_1)化为

$$(abc)^2 \geqslant \frac{1}{27}(a+b+c)^2 \cdot 16\Delta^2 \tag{①}$$

应用公式 $\Delta=\frac{abc}{4R}$(R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径),得

$$a+b+c \leqslant 3\sqrt{3}/P \Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3} \tag{②}$$

上式为熟知的三角形正弦和不等式,等号成立仅当

$$A=B=C=60^\circ \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow x=y=z$$

即式(B_1)成立.等号成立仅当 $x=y=z$.

以上简洁漂亮的代换证法,简直是"智取华山",难题巧解.其实,事情只有相对,并非绝对,只要方法得当,不用代换法,我们仍然可巧解难题.

证法 2 由于

$$\sum\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \sum\frac{1}{x^2} \geqslant \sum\frac{1}{yz} \Rightarrow \left(\sum\frac{1}{x}\right)^2 \geqslant 3\sum\frac{1}{yz} \Rightarrow$$

$$\left(\sum yz\right)^2 \geqslant 3xyz\left(\sum x\right) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{9}\left(\sum x\right)\left(\sum yz\right)\right]^2 \geqslant xyz\left(\frac{\sum x}{3}\right)^3 \tag{③}$$

从式 ③ 可知,欲证明式(B_1),只须证明

$$\prod\left(\frac{y+z}{2}\right) \geqslant \frac{1}{9}\left(\sum x\right)\left(\sum yz\right) \tag{④}$$

记

$$t=\sum x(y^2+z^2)\geqslant\sum 2xyz=6xyz \quad ⑤$$

式④两边展开得

$$9(t+2xyz)\geqslant 8(t+3xyz)\Rightarrow t\geqslant 6xyz$$

即式④成立,从而式(B_1)成立.等号成立仅当$x=y=z$.

如果我们应用平均值不等式,易将式(B_1)完善成一个双向不等式

$$\left(\frac{\sum x}{3}\right)^6\geqslant\prod\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\geqslant xyz\left(\frac{\sum x}{3}\right)^3 \quad (B'_1)$$

如果设$xyz=\left(\frac{4}{3}\right)^3$,那么式$(B_1)$简化为

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\geqslant(x+y+z)^3 \quad ⑥$$

与式(B_1)形状结构相关的有:

结论2 设$x,y>0$,则

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4\geqslant\left(\frac{2x+y}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{x+2y}{3}\right)^2\geqslant\sqrt{xy}\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \quad (B_2)$$

证明 记式(B_2)中间量为P,则应用平均值不等式有

$$P\leqslant\left[\frac{(2x+y)+(x+2y)}{6}\right]^4=\left(\frac{x+y}{2}\right)^4$$

即式(B_2)左边不等式成立,等号成立仅当$x=y$.设

$$\left.\begin{matrix}x+y=a\\ xy=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^2\geqslant 4b>0\Rightarrow$$

$$P=\left(\frac{a+x}{3}\cdot\frac{a+y}{3}\right)^2=\left[\frac{a^2+a(x+y)+b}{3^2}\right]^2=$$

$$\left(\frac{2a^2+b}{9}\right)^2=\left[\frac{8\left(\frac{a^2}{4}\right)+b}{9}\right]^2\geqslant$$

$$\left[\left(\frac{a^2}{4}\right)^8\cdot b\right]^{\frac{2}{9}}=\left[\left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{27}{4}}\cdot\left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{5}{4}}\cdot b\right]^{\frac{2}{9}}\geqslant$$

$$\left[\left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{27}{4}}\cdot b^{\frac{5}{4}}\cdot b\right]^{\frac{2}{9}}=\left(\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}\sqrt{b}a^3\Rightarrow$$

$$P\geqslant\left(\frac{a}{2}\right)^3\sqrt{b}=\sqrt{xy}\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$$

即式(B_2)成立,等号成立仅当$x=y$.

可知,式(B_2)从难度上讲,它也不是一盏省油的灯,但由于我们代换得巧妙,自然证得轻松,且此证法技巧启示我们:式(B_2)可以推广为一个漂亮的

结论3 设$x,y>0,p,q>0$,且$10pq>3(p^2+q^2)$,则有

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4\geqslant\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)^2\left(\frac{py+qx}{p+q}\right)^2\geqslant\sqrt{xy}\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \quad (B_3)$$

显然,当$p=2,q=1$时,式(B_3)化为式(B_2),当$p=q=1$时,式(B_3)式仍然成立.因此,式(B_3)是式(B_2)的系数推广.

分析　观察式(B_3)右边的分子,如果应用柯西不等式,有

$$(px+qy)(py+qx)\geqslant(p\sqrt{xy}+q\sqrt{xy})^2=(p+q)^2xy$$

或

$$(px+qy)(qx+py)\geqslant(\sqrt{pq}x+\sqrt{pq}y)^2=pq(x+y)^2$$

因此,如果仍记式(B_3)中间量为 P,那么应用柯西不等式只能得到

$$P\geqslant(xy)^2$$

或

$$P\geqslant\frac{(pq)^2}{(p+q)^4}(x+y)^4$$

而得不到式(B_3)右边的结果.

另一方面,应用平均值不等式有

$$(px+qy)(py+qx)\leqslant[\frac{(px+qy)+(py+qx)}{2}]^2=$$

$$(p+q)^2(\frac{x+y}{2})^2\Rightarrow P\leqslant(\frac{x+y}{2})^4$$

这就是式(B_3)左边结论.因此,我们只须另辟新路,证明

$$P\geqslant\sqrt{xy}(\frac{x+y}{2})^3$$

即可.

证明　由已知条件有

$$10pq>3(p^2+q^2)\Rightarrow16pq>3(p+q)^2$$

记

$$T=(px+qy)(qx+py)=pq(x^2+y^2)+(p^2+q^2)xy=$$

$$4pq(\frac{x+y}{2})^2+(p-q)^2(\sqrt{xy})^2$$

设 $\left.\begin{array}{l}(x+y)/2=a\\ \sqrt{xy}=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\geqslant b>0$

记 $S=4pq+(p-q)^2=(p+q)^2$

$\Rightarrow T=4pqa^2+(p-q)^2b^2$(应用加权不等式)$\geqslant$

$$S[a^{4pq}\cdot b^{2(p-q)^2}]^{1/S}\Rightarrow P=(\frac{T}{S})^2\geqslant a^{\alpha}b^{\beta}$$

其中

$$\alpha=16pq/S,\beta=4(p-q)^2/S$$

再设

$$t=\alpha-3=(16pq-3S)/S=\frac{16pq-3(p^2+q^2)}{S}$$

则 $t>0$,于是

$$t+\beta=\alpha+\beta-3=\frac{16pq+4(p-q)^2}{S}-3=$$

$$\frac{4(p+q)^2}{S}-3=4-3=1\Rightarrow$$

$$P\geqslant a^{\alpha}b^{\beta}=a^3\cdot a^{\alpha-3}\cdot b^{\beta}=a^3\cdot a^t\cdot b^{\beta}\geqslant$$

$$a^3\cdot b^t\cdot b^{\beta}=a^3\cdot b^{t+\beta}=a^3b\Rightarrow$$

$$P\geqslant a^3b=\sqrt{xy}(\frac{x+y}{2})^3$$

综合上述,式(B_3)成立,等号成立仅当 $x=y$.

更奇妙的是,如果应用结论 3,我们还可得到更美妙的:

结论 4 设 $x,y,z,p,q,r>0$,且有 $10pq>3(p^2+q^2)$,$10qr>3(q^2+r^2)$,$10rp>3(r^2+p^2)$,记 $P=ABC$,其中

$$\begin{cases} A=\left(\dfrac{px+qy}{p+q}\right)\cdot\left(\dfrac{qx+py}{p+q}\right) \\ B=\left(\dfrac{qz+ry}{q+r}\right)\cdot\left(\dfrac{rz+qy}{q+r}\right) \\ C=\left(\dfrac{rx+pz}{r+p}\right)\cdot\left(\dfrac{rz+px}{r+p}\right) \end{cases}$$

则有不等式

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^6\geqslant P\geqslant\left[(xyz)^5\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^9\right]^{\frac{1}{4}} \tag{B_4}$$

可见,式(B_4)左边的结果与式(B_1)一致,应用式(B_1)和平均值不等式易证,但右边结论与式(B_1)右边结果相比

$$(xyz)^{\frac{5}{4}-1}\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{9}{4}-3}=\left[(xyz)\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{4}}\leqslant 1$$

即式(B_4)的右边比式(B_1)的右边要弱一点,尽管如此,式(B_4)仍然是一个"胖美人".

综述

证明 利用结论 3 有

$$A\geqslant\sqrt[4]{xy}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{3/2}$$

$$B\geqslant\sqrt[4]{yz}\left(\frac{z+y}{2}\right)^{3/2}$$

$$C\geqslant\sqrt[4]{zx}\left(\frac{z+x}{2}\right)^{3/2}$$

于是 $P=ABC=\sqrt{xyz}\left[\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{z+x}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}}$(应用式($B_1$))$\geqslant$

$$(\sqrt{xyz})\cdot\left[xyz\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\right]^{\frac{3}{4}}\Rightarrow P\geqslant\left[(xyz)^5\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^9\right]^{\frac{1}{4}}$$

等号成立仅当 $x=y=z$.

为了给式(B_1)寻找"配偶",我们先将它"化妆"成

$$\left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\geqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\sqrt[3]{xyz}$$

结论 5 设 $x,y,z>0$,求证:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)}\geqslant\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}{3} \tag{B_5}$$

由于式(B_5)与式(B_1)的左边一致,而右边却截然不同,因此其代换技巧也应更新.

证明 我们作代换

$$\begin{cases}\sqrt{yz}=p>0\\ \sqrt{zx}=q>0\\ \sqrt{xy}=r>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=qr/p\\ y=rp/q\\ z=pq/r\end{cases}\Rightarrow$$

$$\text{式}(B_5) \Leftrightarrow \prod \frac{p}{2}\left(\frac{q}{r}+\frac{r}{p}\right) \geqslant \left(\frac{p+q+r}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\prod\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right) \geqslant pqr\left(\frac{p+q+r}{3}\right)^3 \tag{7}$$

应用式(B_1)有

$$\prod\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right) \geqslant \prod\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \geqslant pqr\left(\frac{p+q+r}{3}\right)^3$$

即式 ⑦ 成立,逆推之式(B_5)成立,等号成立仅当 $p=q=r \Leftrightarrow x=y=z$.

有许多优美的不等式,不仅有配对式,而且还不只一个,式(B_1)就是如此,它的第二个配对式是:

结论 6 设 $x,y,z>0$,则

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+y+z}{3}+\sqrt[3]{xyz}\right) \geqslant \frac{1}{3}(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}) \tag{B_6}$$

证法 1 (调整法)为了方便起见,我们先作置换$(x,y,z) \to (a,b,c)$,这样式(B_6)化为

$$a+b+c+3\sqrt[3]{abc} \geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \tag{8}$$

根据对称性,不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$,并作如下调整:$a=a'$,$b=b'=c'=\sqrt{bc}=\sqrt{A^2}$,则

$$f(a',b',c') = (a+2A+3a^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{2}{3}}) - 2[A+2(aA)^{\frac{1}{2}}] =$$

$$a+3a^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{2}{3}} - 4(aA)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$4[a \cdot (a^{\frac{1}{3}}A^{\frac{2}{3}})^3]^{\frac{1}{4}} - 4(aA)^{\frac{1}{2}} = 0$$

等号成立仅当 $a=b=c$.

再证明

$$f(a,b,c) \geqslant f(a',b',c')$$

因为 $\quad f(a,b,c)-f(a',b',c') = b+c-2a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}-2A^{\frac{1}{2}})-2A$

由于 $a \leqslant A$,$\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 2\sqrt{A}$,所以

$$f(a,b,c)-f(a',b',c') \geqslant b+c-2\sqrt{A}(\sqrt{b}+\sqrt{c}-2\sqrt{A})-2A =$$

$$b+c-2(\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{A}+2A =$$

$$(\sqrt{b}-\sqrt{A})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{A})^2 \geqslant 0$$

从而 $f(a,b,c) \geqslant 0$,式(B_6)成立.

证法 2 (代换法)不妨设

$$\left.\begin{array}{l} \mu^6 = x^2/yz \\ v^6 = y^2/zx \\ w^6 = z^2/xy \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \mu v w = 1 \\ (\mu,v,w>0) \end{array} \Rightarrow \tag{9}$$

$$\mu^2+v^2+w^2+3 \geqslant 2\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) \tag{10}$$

由于 μ,v,w 具有对称性,不妨设

$$\mu \geqslant 1, v \geqslant 1, w \leqslant 1$$

或

$$\mu \leqslant 1, v \leqslant 1, w \geqslant 1$$

把 $w = \frac{1}{\mu v}$ 代入式 ⑩ 得

$$P' = \mu^4 v^2 + \mu^2 v^4 + 3\mu^2 v^2 - 2\mu v^2 - 2\mu^2 v - 2\mu^3 v^3 + 1 \geqslant 0 \quad ⑪$$

但 $$P' = (\mu^4 v^2 + \mu^2 v^4 - 2\mu^3 v^3) + (\mu^2 v^2 + 1) + 2(\mu^2 v^2 - \mu v^2 - \mu^2 v) = \mu^2 v^2 (\mu - v)^2 + (\mu v - 1)^2 + 2\mu v(1 - \mu)(1 - v) \geqslant 0$$

即式(B_6) 成立. 等号成立仅当

$$\left.\begin{matrix} \mu = v, \mu v = 1 \\ (1-\mu)(1-v) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu = v = 1 \\ \mu v \omega = 1 \end{cases} \Rightarrow \mu = v = \omega = 1 \Rightarrow x = y = z$$

有趣的是:

(1) 如果我们设 $\triangle ABC$ 的三内角为 A, B, C, 并令 $x = (\tan\frac{A}{2})^2, y = (\tan\frac{B}{2})^2, z = (\tan\frac{C}{2})^2$, 再应用熟知的三角恒等式

$$\sum \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$$

立即将式(B_6) 转化为一个美妙的三角不等式

$$\sum (\tan\frac{A}{2})^2 + 3(\prod \tan\frac{A}{2})^3 \geqslant 2 \quad ⑫$$

(2) 如果我们在式 ⑩ 中作置换

$$(\mu, v, w) \to (x, y, z)$$

则有结论:

设 $x, y, z > 0$, 且 $xyz = 1$, 则

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geqslant 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \quad (a)$$

(3) 奇妙的是, 式(a) 还有配对式:

设 $x, y, z > 0$, 且 $xy + yz + zx = 1$, 则

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 9 \geqslant 2(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}) \quad (b)$$

关于式(b) 的证明, 我们安排在后面, 以成系统.

3 瓜果飘香

如果我们在(B_1), (B_5), (B_6) 三式中作置换

$$(x, y, z) \to (a_1, a_2, a_3)$$

就会立刻“旧貌变新颜”:

$$\sqrt[3]{(\frac{a_1 + a_2}{2})^2 \cdot (\frac{a_2 + a_3}{2})^2 \cdot (\frac{a_3 + a_1}{2})^2} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3})$$

$$\sqrt[3]{(\frac{a_1+a_2}{2})(\frac{a_2+a_3}{2})(\frac{a_3+a_1}{2})} \geqslant \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1}}{3} \leqslant \frac{a_1+a_2+a_3+3\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{6}$$

这三个不等式的已知条件都一致,很简单,仅仅 $a_1,a_2,a_3 \geqslant 0$ 就足够了,且等号成立的条件已一致,均为 $a_1=a_2=a_3$.

但对于4个正数 a_1,a_2,a_3,a_4 则就不够了,需添加一定的已知条件才行.在20世纪90年代,我国的莫颂清老师带领一个初等数学研究小组,建了两个非常漂亮的结论:

结论 7(莫颂清等)　如果 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$,或者 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4>0$,则有

$$(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})(\frac{a_2+a_3+a_4}{3})(\frac{a_3+a_4+a_1}{3})(\frac{a_4+a_1+a_2}{3}) \geqslant$$

$$(\frac{a_1+a_2}{2})(\frac{a_2+a_3}{2})(\frac{a_3+a_4}{2})(\frac{a_4+a_1}{2}) \tag{B$_7$}$$

证明　我们先证

$$(2a_3+2a_4+2a_1)(2a_4+2a_1+2a_2) \geqslant$$
$$(2a_1+3a_4+a_3)(2a_1+2a_2+a_3+a_4) \tag{①}$$

令 $A=2a_1+a_2+a_3+2a_4$,上式化为

$$左边 = (A-a_2+a_3)(A+a_2-a_3) = A^2-(a_2-a_3)^2$$
$$右边 = (A-a_2+a_4)(A+a_2-a_4) = A^2-(a_2-a_4)^2$$

又

$$-(a_2-a_3)^2+(a_2-a_4)^2 = (2a_2-a_3-a_4)(a_3-a_4) =$$
$$(2a_2-a_3-a_4)(a_3-a_4) =$$
$$[(a_2-a_3)+(a_2-a_4)](a_3-a_4) \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$A^2-(a_2-a_3)^2 \geqslant A^2-(a_2-a_4) \tag{②}$$

因此式②成立,等号成立仅当 $a_3=a_4$ 或 $2a_2=a_3+a_4$.

利用式①及平均值不等式,有

$$P=\prod(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})=\frac{1}{3}\prod(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\frac{a_3+a_1}{2}) \geqslant$$
$$(\frac{a_1+a_4}{2})(\frac{a_2+a_3}{2})[(\frac{a_3+a_4}{3})^2(\frac{a_1+a_2}{2})^2(\frac{a_1+a_3}{2})(\frac{a_2+a_4}{2})]^{\frac{1}{3}} \tag{③}$$

又

$$(\frac{a_1+a_3}{2})(\frac{a_2+a_4}{2})-(\frac{a_1+a_2}{2})(\frac{a_3+a_4}{2}) =$$
$$\frac{1}{4}(a_1a_2+a_3a_4-a_1a_3-a_2a_4) =$$
$$\frac{1}{4}(a_1-a_4)(a_2-a_3) \geqslant 0 \Rightarrow (\frac{a_1+a_3}{2})(\frac{a_2+a_4}{2}) \geqslant$$
$$(\frac{a_1+a_2}{2})(\frac{a_3+a_4}{2}) \tag{④}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_4$ 或 $a_2 = a_3$.

由式③和④可推得式(B_7)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

从上述精彩的证明可见,虽然式(B_7)外形庞大,但在已知条件下证明并非很难,我们应当吸取这种高超的证法技巧.

无独有偶,莫颂清研究小组还建立了式(B_7)的配对形式:

结论 8(莫颂清等) 设 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$ 或 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 > 0$,则有

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{a_2a_3a_4} + \sqrt[3]{a_3a_4a_1} + \sqrt[3]{a_4a_1a_2} \leqslant \sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_3a_4} + \sqrt{a_4a_1} \qquad (B_8)$$

结论 8 与结论 7 的已知条件是一致的,而将式(B_7)从"积 - 和"形式改变为"根 - 和"形式,便成为式(B_8).

证明 设 $a_i = x_i^6 (i = 1,2,3,4)$,且 $x_i > 0$,于是式(B_8)化为

$$(x_1x_2)^3 + (x_2x_3)^3 + (x_3x_4)^3 + (x_4x_1)^3 \geqslant (x_1x_2x_3)^2 + (x_2x_3x_4)^2 + (x_3x_4x_1)^2 + (x_4x_1x_2)^2 \qquad ⑤$$

(1) 先证

$$(x_3x_4x_1)^2 + (x_4x_1x_2)^2 \leqslant (x_1x_4)^2x_3x_4 + (x_1x_2)^2x_3x_4 = \qquad ⑥$$

$$\text{式⑥左边} - \text{右边} = x_1^2x_4(x_3 - x_4)(x_2^2 - x_3x_4) \geqslant 0$$

即式⑥成立.

又

$$(x_1x_2)^3 + (x_3x_4)^3 - (x_1x_3)^3 - (x_2x_4)^3 = (x_1^3 - x_4^3)(x_2^3 - x_3^3) \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$(x_1x_2)^3 + (x_3x_4)^3 \geqslant (x_1x_3)^3 + (x_2x_4)^3 \qquad ⑦$$

(2) 于是

$$\begin{aligned}\text{式⑤右边} \leqslant\ & (x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_1) + (x_2x_3)(x_3x_4)(x_4x_2) + \\ & (x_1x_4)(x_1x_4)(x_3x_4) + (x_1x_2)(x_1x_4)(x_2x_3) \leqslant \\ & \frac{1}{3}[(x_1x_2)^3 + (x_2x_3)^3 + (x_3x_1)^3] + \\ & \frac{1}{3}[(x_2x_3)^3 + (x_3x_4)^3 + (x_4x_2)^3] + \\ & \frac{1}{3}[2(x_1x_4)^3 + (x_3x_4)^3] + \frac{1}{3}[(x_1x_2)^3 + (x_1x_4)^3 + (x_2x_3)^3] = \\ & (x_1x_4)^3 + (x_2x_3)^3 + \\ & \frac{1}{3}[2(x_3x_4)^3 + 2(x_1x_2)^3 + (x_1x_3)^3 + (x_4x_2)^3] \leqslant \\ & (x_1x_2)^3 + (x_2x_3)^3 + (x_3x_4)^3 + (x_4x_1)^3\end{aligned}$$

即式⑤成立,因此式(B_8)成立.易知等号成立仅当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

和平均相关的优美结论,还有

结论 9 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0 (n \in \mathbf{N})$,求证:

综述

$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{n+1} \geqslant \frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n} \quad (B_9)$$

此结论的美妙之处在于:$2n+1$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$,只要满足条件

$$a_n-2a_{n+1}+a_{n+2} \geqslant 0$$

那么 $n+1$ 个奇数项的算术平均就会大于等于 n 个偶数项的算术平均,这确是一个有趣的结论.

证明 (1) 当 $n=1$ 时,由已知有

$$a_1-2a_2+a_3 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{a_1+a_3}{2} \geqslant a_2$$

命题成立.

(2) 假设对于 $n-1$ 时命题成立,即有

$$(n-1)(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}) \geqslant n(a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}) \quad ⑧$$

由于

$$\begin{aligned}a_n-2a_{n+1}+a_{n+2} \geqslant 0 \Rightarrow\ & a_{2n-1}-2a_{2n}+a_{2n+1} \geqslant 0 \Rightarrow a_{2n+1}-a_{2n} \geqslant a_{2n}-a_{2n-1} \Rightarrow \\ & a_{2n+1}-a_{2n} \geqslant a_{2n}-a_{2n-1} \geqslant a_{2n-1}-a_{2n-2} \geqslant \cdots\cdots \geqslant \\ & a_3-a_2 \geqslant a_2-a_1 \Rightarrow \quad ⑨ \\ & a_{2n+1}-a_{2n} \geqslant a_{2n}-a_{2n-1} \geqslant \\ & a_{2n-2}-a_{2n-3} \geqslant \cdots \geqslant a_4-a_3 \geqslant a_2-a_1 \Rightarrow \quad ⑩ \\ & n(a_{2n+1}-a_{2n}) \geqslant (a_{2n}-a_{2n-1})+(a_{2n-2}- \\ & a_{2n-3})+\cdots+(a_4-a_3)+(a_2-a_1)= \\ & (a_2+a_4+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}) \Rightarrow \\ & na_{2n+1}+(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}) \geqslant \\ & (a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2})+(n+1)a_{2n} \quad ⑪\end{aligned}$$

$$⑧+⑪ \Rightarrow n(a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}) \geqslant (n+1)(a_2+a_4+\cdots+a_{2n}) \quad ⑫$$

即对于 n 时,命题也成立.故对任意 $n \in \mathbf{N}$ 命题成立.

从上述证明已知,如果我们在得到递推式链 ⑨ 后直接相加:只能得

$$\begin{aligned}2n(a_{2n+1}-a_{2n}) \geqslant\ & (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+ \\ & (a_{2n}-a_{2n-1})=a_{2n}-a_1 \Rightarrow \\ & 2na_{2n+1} \geqslant -a_1+(2n+1)a_{2n}\end{aligned}$$

这样推不出式 ⑪ 就达不到证明的目的,而需要"忍痛割爱"地"抛弃"无用项:

$$a_3-a_2,a_5-a_4,\cdots,a_{2n-1}-a_{2n-2}$$

得到式 ⑩,再加得到式 ⑪,与假设的式 ⑫ 合并,才能得到式 ⑫.这就是本题的技巧所在.

仿照上述技巧,我们能轻松地建立式(B_9)的配对式.

结论 10 设正数列$\{a_n\}(n \in \mathbf{N})$满足 $a_na_{n+2} \geqslant a_{n+1}^2(n \in \mathbf{N})$,则有

$$\sqrt[n+1]{a_1a_3\cdots a_{2n+1}} \geqslant \sqrt[n]{a_2a_4\cdots a_{2n}} \quad (B_{10})$$

一看便知,结论 10 是结论 9 的配对结论

$$(a_n + a_{n+2} \geqslant 2a_{n+1}) \to (a_n a_{n+2} \geqslant a_{n+1}^2)$$

即将已知条件作如上置换之后,相应地式(B_9)中的算术平均就置换成了几何平均.

证明 由已知条件有:

(1) 当 $n = 1$ 时,有

$$a_1 a_3 \geqslant a_2^2 \Rightarrow \sqrt{a_1 a_3} \geqslant a_2$$

命题成立.

(2) 假设对于 $n-1$ 时命题成立,即

$$\sqrt[n]{a_1 a_3 \cdots a_{2n-1}} \geqslant \sqrt[n-1]{a_2 a_4 \cdots a_{2(n-1)}} \Rightarrow$$
$$(a_1 a_3 \cdots a_{2n-1})^{n-1} \geqslant (a_2 a_4 \cdots a_{2n-2})^n \quad ⑬$$

于是
$$a_n a_{n+2} \geqslant a_{n+1}^2 \Rightarrow a_{2n-1} a_{2n+1} \geqslant a_{2n}^2 \Rightarrow \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \geqslant \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \Rightarrow$$
$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \geqslant \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \geqslant \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow$$
$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \geqslant \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \geqslant \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-3}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{a_4}{a_3} \geqslant \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow$$
$$\left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right)^n \geqslant \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2n}}{a_1 a_3 \cdots a_{2n-1}} \Rightarrow$$
$$a_1 a_3 \cdots a_{2n-1} a_{2n+1}^n \geqslant$$
$$a_2 a_4 \cdots a_{2n-2} a_{2n}^{n+1} \quad ⑭$$
$$⑬ \times ⑭ \Rightarrow (a_1 a_3 \cdots a_{2n+1})^n \geqslant (a_2 a_4 \cdots a_{2n})^{n+1} \Rightarrow$$
$$\sqrt[n+1]{a_1 a_3 \cdots a_{2n+1}} \geqslant \sqrt[n]{a_2 a_4 \cdots a_{2n}}$$

即对于 n 时命题仍然成立,等号成立仅当

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

从上述证明可知,如果把结论 9 中的已知条件改为 $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \leqslant 0$,那么式($B_9$)反向;同样,将结论 10 中的已知条件 $a_n a_{n+2} \geqslant a_{n+1}^2$ 改为 $a_n a_{n+2} \leqslant a_{n+1}^2$,那么式($B_{10}$)也要反向.

更有趣的是,如果我们将结论 10 中的已知条件略加改动,我们就可以旧翻新,得到:

结论 11 设正实数序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$,满足 $a_{i-1} a_{i+1} \leqslant a_i^2 (i = 1,2,\cdots)$. 证明:对一切 $n > 1$,有

$$\left(\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1}\right)\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right) \geqslant$$
$$\left(\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n}\right)\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \quad (B_{11})$$

观察式(B_{11})两边的组成和结构,发现它们难分雌雄,大同小异,个个秀美. 证明时得充分利用已知条件,以左边第二个括号(最小)为突破口就会成功在望,曙光在前头.

证明 由已知条件有

$$a_{i-1}a_{i+1} \leqslant a_i^2 \Rightarrow \frac{a_{i-1}}{a_i} \leqslant \frac{a_i}{a_{i+1}} \Rightarrow \frac{a_0}{a_1} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \leqslant \frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow$$

$$a_0 a_n \leqslant a_1 a_{n-1} \leqslant a_2 a_{n-2} \leqslant a_3 a_{n-3} \leqslant \cdots \leqslant a_n a_{n-k} \quad ⑮$$

令

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

这样式(B_{11})化为

$$n^2(S + S_0 + a_n)S \geqslant (n^2 - 1)(S + a_0)(S + a_n) \Leftrightarrow$$

$$(S + a_0)(S + a_n) \geqslant n^2 a_0 a_n \quad ⑯$$

应用平均值不等式并结合式 ⑮ 有

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_k + a_{n-k}}{2}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{a_k a_{n-k}} \geqslant (n-1)\sqrt{a_0 a_n} \Rightarrow$$

$$(S + a_0)(S + a_n) = S^2 + a_0 a_n + (a_0 + a_n)S \geqslant$$

$$S^2 + a_0 a_n + 2\sqrt{a_0 a_n}S =$$

$$(S + \sqrt{a_0 a_n})^2 \geqslant n^2 a_0 a_n$$

即式 ⑯ 成立，逆推之，式(B_{11})成立，等号成立仅当 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$.

从上述证明可知，本题的已知条件不可更改，从而式(B_{11})不能反向，否则不可推导.

在已知条件不变的情况下，我们可给式(B_{11})"牵线搭桥"，"成亲配对"：

结论 12 设正实数序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，满足 $a_{i-1}a_{i+1} \leqslant a_i^2 (i = 1, 2, \cdots)$. 证明：对一切 $n > 1$ 有

$$\left(\sqrt[n+1]{a_0 a_1 \cdots a_n}\right)\left(\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}\right) \geqslant \left(\sqrt[n]{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}\right)\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\right) \quad (B_{12})$$

略证 设

$$P = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \Rightarrow (B_{12}) \Leftrightarrow (a_0 a_n)^{\frac{1}{n+1}} \cdot P^{\frac{1}{n-1}} \geqslant (a_0 P)^{\frac{1}{n}} \cdot (a_n P)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow$$

$$P^{\left(\frac{2n}{n^2-1} - \frac{2}{n}\right)} \geqslant (a_0 a_n)^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow P^{\frac{2}{n(n^2-1)}} \geqslant (a_0 a_n)^{\frac{1}{n(n+1)}} \Leftrightarrow$$

$$P^2 \geqslant (a_0 a_n)^{n-1} \quad ⑰$$

由于

$$P^2 = \prod_{k=1}^{n-1}(a_k a_{n-k}) \geqslant \prod_{k=1}^{n-1}(a_0 a_n) = (a_0 a_n)^{n-1}$$

即式 ⑰ 成立，从而式(B_{12})成立，等号成立仅当 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$.

可见，从上述推导可知，如果将已知条件 $a_{i-1}a_{i+1} \leqslant a_i^2$ 更改为 $a_{i-1}a_{i+1} \geqslant a_i^2$ 时，式(B_{12})反向.

但却不能更改为 $a_{i-1} + a_{i+1} \geqslant 2a_i$，或 $a_{i-1} + a_{i+1} \leqslant 2a_i$，否则式$(B_{12})$就无配对式，只好形单影只了.

4 双龙入海

定理 1 中平均值不等式 $A_n \geqslant G_n$ 的美艳绝世是众所周知的，而且，由它生产的一对"双胞胎"则更是"如花似玉，貌若天仙"：

定理 2 记 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算术平均为 A_n，几何平均为 G_n，则有不等式

$$(n+1)(A_{n+1}-G_{n+1}) \geqslant n(A_n-G_n) \tag{A_2}$$

$$(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}})^{n+1} \geqslant (\frac{A_n}{G_n})^n \tag{A_3}$$

证明　注意到

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)A_{n+1}-nA_n=a_{n+1}\\ a_{n+1}G_n^n=G_{n+1}^{n+1}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&(n+1)(A_{n+1}-G_{n+1})-n(A_n-G_n)=\\&a_{n+1}+nG_n-(n+1)G_{n+1}\geqslant\\&(n+1)\cdot\sqrt[n+1]{a_{n+1}G_n^n}-(n+1)G_{n+1}=\\&(n+1)\cdot G_{n+1}-(n+1)G_{n+1}=0\end{aligned}$$

等号成立仅当 $a_{n+1}=G_n$.

另外,式(A_3)即为

$$[(\frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1})/\sqrt[n+1]{G_n^na_{n+1}}]^{n+1}\geqslant(\frac{A_n}{G_n})^n\Leftrightarrow$$

$$(\frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1})^{n+1}\geqslant a_{n+1}A_n^n\Leftrightarrow$$

$$a_{n+1}+nA_n\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{a_{n+1}A_n^n}$$

由平均值不等式知,上式显然成立,因此式(A_3)成立,等号成立仅当 $a_{n+1}=A_n$.

观察式(A_2)和式(A_3),它们的外形和结构有相似之处,也有相异之处,具体地讲,将它们两式的结构对比

$$\underset{\text{倍差结构}}{n(A_n-G_n)}\rightarrow\underset{\text{商幂结构}}{(\frac{A_n}{G_n})^n}$$

知,式(A_2)是关于 A_n 与 G_n 的倍差结构,等号成立的充要条件是 $a_{n+1}=G_n$;而式(A_3)是商幂结构,等号成立的条件是 $a_{n+1}=A_n$;这两种结构互相置换,互相配对,真是天生一对,地配一双.

另一方面,从函数的意义上讲,如果我们设关于自然数 n 的函数为

$$f(n)=n(A_n-G_n),g(n)=(\frac{A_n}{G_n})^n$$

从递推数列的意义上表征式(A_2),(A_3),有

$$\begin{cases}f(n+1)\geqslant f(n)\geqslant\cdots\geqslant f(2)\geqslant f(1)=0 & \text{(c)}\\ g(n+1)\geqslant g(n)\geqslant\cdots\geqslant g(2)\geqslant g(1)=1 & \text{(d)}\end{cases}$$

这既像一闪光的金项链,又像奔腾的双龙,相邀入海.

其实,式(A_2)就是著名的拉多(R・Rado)不等式,式(A_3)就是泡泡维奇(Popovic)不等式,它们来源于平均值不等式,并随着平均值不等式的发展而“茁壮成长”.

首先,在20世纪90年代,我国的杨克昌老师和叶军各自建立了相同的结论(下面的式(A_4)),后来刘晓波老师又建立了第二个配对结论(下面的式(A_5)).

定理3　设 $0<p\leqslant a_i\leqslant q(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,则有

$$A_n - G_n \geqslant \frac{(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2}{n} \tag{A_4}$$

$$\frac{A_n}{G_n} \geqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \tag{A_5}$$

显然,以上两式不仅在形态和结构上互相配对,而且它们是平均值不等式的一对加强式,多么匀称的结构,多么漂亮的外观,多么迷人的风采.

证明(刘晓波) 由对称性,不妨设 $a_1=p,a_2=q$,应用拉多不等式,有

$$\begin{aligned} n(A_n-G_n) &\geqslant (n-1)(A_{n-1}-G_{n-1}) \geqslant \cdots \geqslant \\ &2(A_2-G_2)=a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}= \\ &(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})^2=(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2 \Rightarrow \\ &A_n-G_n \geqslant \frac{(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2}{n} \end{aligned}$$

等号成立仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n(2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 中有1个取 p,1个取 q,其余 $n-2$ 个均取$\sqrt{pq}$.

另外,应用泡泡维奇不等式有

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \geqslant \left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1} \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{A_2}{G_2}\right)^2=\left(\frac{a_1+a_2}{2\sqrt{a_1a_2}}\right)^2=$$

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}+\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{A_n}{G_n} \geqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}}{2}\right)^{\frac{2}{n}}$$

等号成立仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中1个取 p,1个取 q,其余$(n-2)$个均取$\frac{p+q}{2}$(大家自己验证).

可见,式(A_4),(A_5)正是平均值不等式(A_1)的一对加强式,因此(A_2),(A_3)两式既来源于式(A_1)(恰似式(A_1)的一对"儿女"),它们又"回报"于式(A_1),使得(A_1)得到了加强.

并且,式(A_2),(A_3)还不仅仅是"如花似玉","貌若天仙",它也和许多美妙的不等式一样赶"时尚",也可以进行参数推广.在20世纪90年代,我国的张先觉老师就用微分法建立了式(A_2),即拉多不等式的参数推广:

定理4(张先觉) 设 $\lambda>0$ 为常数,则有

$$(n+1)(A_{n+1}-\lambda G_{n+1}) \geqslant n(A_n-\lambda^{\frac{n+1}{n}}G_n) \tag{A_6}$$

等号成立仅当 $a_{n+1}=\lambda^{\frac{n+1}{n}}\cdot G_n$.

显然,当 $\lambda=1$ 时,式(A_6)化为拉多不等式.

更令惊叹的是

(1) 若取

$$A_{n+1}-\lambda G_{n+1}=0\Rightarrow\lambda=\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\Rightarrow n(A_n-\lambda^{\frac{n+1}{n}}G_n)\leqslant 0\Rightarrow\lambda^{\frac{n+1}{n}}\geqslant\frac{A_n}{G_n}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}\geqslant\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n$$

这正好是泡泡维奇不等式.

(2) 若取

$$A_n-\lambda^{\frac{n+1}{n}}G_n=0\Rightarrow\lambda=\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\Rightarrow$$

$$A_{n+1}-\lambda G_{n+1}\geqslant 0\Rightarrow\lambda\leqslant\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\Rightarrow\left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}\geqslant\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n$$

又得到泡泡维奇不等式.

这充分表明:拉多不等式虽然被参数推广了,但它却“重情重义”—— 念念没有忘记它的伙伴泡泡维奇不等式.

综述

其实,式(A_6) 是将拉多不等式和泡泡维奇不等式和谐地统一在了一起,使它们“夫妻团圆”,永不分离,这真是趣味无穷、美不胜收的数学奇观,使我们眼界大开.

现在我们用初等的方法证明定理 4,使之显得通俗易懂,妙不可言.

证明 式(A_6) 化为

$$[(n+1)A_{n+1}-nA_n]+n\lambda^{\frac{n+1}{n}}G_n\geqslant(n+1)\lambda G_{n+1}\Leftrightarrow$$

$$a_{n+1}+n(\lambda^{\frac{n+1}{n}}G_n)\geqslant(n+1)\lambda G_{n+1} \qquad ①$$

应用平均值不等式,式 ① 左边大于等于

$$(n+1)[a_{n+1}\cdot(\lambda^{\frac{n+1}{n}}G_n)^n]^{\frac{1}{n+1}}=$$

$$(n+1)(a_{n+1}\lambda^{n+1}G_n^n)^{\frac{1}{n+1}}=(n+1)\lambda G_{n+1}$$

即式 ① 成立,从而式(A_6) 成立,等号成立仅当 $a_{n+1}=\lambda^{\frac{n+1}{n}}\cdot G_n$.

特别地,当取 $\lambda=1$ 时,式(A_6) 还原于式(A_2).

无独有偶,泡泡维奇不等式“龙凤呈祥好运来”,据笔者初探,它也可以参数推广成:

定理 5 设 $0<\lambda<n$ 是常数,则有

$$\left(\frac{A_n}{G_n^\lambda}\right)^n\geqslant K\left(\frac{A_{n-1}^\theta}{G_{n-1}^\lambda}\right)^{n-1} \qquad (A_7)$$

其中 $K=\frac{1}{\lambda^\lambda}\left(\frac{n-1}{n-\lambda}\right)^{n-\lambda},\theta=\frac{n-\lambda}{n-1}$.

特别地,当 $\lambda=1$ 时,$K=1,\theta=1$,式(A_7) 回到“娘家” 泡泡维奇不等式.

粗略一看,式(A_7) 外观庞大,似乎很难,其实,只要方法巧妙,我们定会“智取威虎山”.

证明 将式(A_7)变形为

$$K \cdot A_{n-1}^{(n-1)\theta} \cdot \left(\frac{G_n^n}{G_{n-1}^{n-1}}\right)^{\lambda} \leqslant A_n^n \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda^{\lambda}}\left(\frac{n-1}{n-\lambda}\right)^{n-\lambda} \cdot A_{n-1}^{n-\lambda} \cdot a_n^{\lambda} \leqslant A_n^n \Leftrightarrow$$

$$a_n^{\lambda} \cdot \left[\left(\frac{n-1}{n-\lambda}\right)\lambda A_{n-1}\right]^{n-\lambda} \leqslant (\lambda A_n)^n \tag{②}$$

设式②左边为 P,注意到 $0 < \lambda < n$ 及 $\lambda + (n-\lambda) = n$,应用加权不等式有

$$P \leqslant \left[\frac{\lambda a_n + (n-\lambda) \cdot \left(\frac{n-1}{n-\lambda}\lambda A_{n-1}\right)}{\lambda + (n-\lambda)}\right]^n =$$

$$\left[\frac{a_n + (n-1)A_{n-1}}{n}\right]^n \lambda^n = A_n^n \cdot \lambda^n = (\lambda A_n)^n$$

即式②成立,从而式(A_7)成立,等号成立仅当 $a_n = \left(\frac{n-1}{n-\lambda}\right)\lambda A_{n-1}$.

我们知道,加权不等式是平均值不等式的一个推广:

加权不等式:设 $p_i \in (0,1)$, $a_i > 0(i = 1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \tag{③}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

如果设 $q_i > 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} q_i$,并令 $p_i = q_i / S_n(1 \leqslant i \leqslant n)$,那么式③又"摇身一变","焕然一新":

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i}{S_n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i}\right)^{\frac{1}{S_n}} \tag{④}$$

现在我们记式④左边为 A'_n,右边为 G'_n,在20世纪80年代,我国已有数学界人士将拉多不等式和泡泡维奇不等式推广到加权不等式中去:

定理6 在加权不等式中有:

$$S_{n+1}(A'_{n+1} - G'_{n+1}) \geqslant S_n(A'_n - G'_n) \tag{A_8}$$

$$\left(\frac{A'_{n+1}}{G'_{n+1}}\right)^{S_{n+1}} \geqslant \left(\frac{A'_n}{G'_n}\right)^{S_n} \tag{A_9}$$

证明 式(A_8)变形为

$$(S_{n+1}A'_{n+1} - S_n A'_n) + S_n G'_n \geqslant S_{n+1} G'_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$q_{n+1} a_{n+1} + S_n G'_n \geqslant S_{n+1} G'_{n+1} \tag{⑤}$$

应用加权不等式有

$$q_{n+1} a_{n+1} + S_n G'_n \geqslant (q_{n+1} + S_n)(a_{n+1}^{q_{n+1}} \cdot G'^{S_n}_n)^{\frac{1}{q_{n+1}+S_n}} = S_{n+1} G'_{n+1}$$

即式⑤成立,从而式(A_8)成立,等号成立仅当 $a_{n+1} = G'_n$.

另外,式(A_9)变形于

$$A'^{S_n}_n \cdot \left(\frac{G'^{S_{n+1}}_{n+1}}{G'^{S_n}_n}\right) \leqslant A'^{S_{n+1}}_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$A'^{S_n}_n \cdot a^{q_{n+1}}_{n+1} \leqslant A'^{S_{n+1}}_{n+1} \tag{⑥}$$

应用加权不等式有

$$A'^{S_n}_n \cdot a^{q_{n+1}}_{n+1} \leqslant \left(\frac{S_nA'_n + q_{n+1}a_{n+1}}{S_n + q_{n+1}}\right)^{S_{n+1}} = A'^{S_{n+1}}_{n+1}$$

即式⑥成立,从而式(A_9)成立,等号成立仅当$a_{n+1} = A'_n$.

现在,该是我们建立式(A_8)、(A_9)参数推广的时候了.

定理 7 设$\lambda > 0$为常数,则有

$$S_{n+1}(A'_{n+1} - \lambda G'_{n+1}) \geqslant S_n(A'_n - \lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \cdot G'_n) \tag{A_{10}}$$

等号成立仅当
$$a_{n+1} = \lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \cdot G'_n$$

显然,当

$$A'_{n+1} - \lambda G'_{n+1} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{A'_{n+1}}{G'_{n+1}} \Rightarrow$$

$$S_n(A'_n - \lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \cdot G'_n) \leqslant 0 \Rightarrow \lambda^{S_{n+1}} \geqslant \left(\frac{A'_n}{G'_n}\right)^{S_n} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{A'_{n+1}}{G'_{n+1}}\right)^{S_{n+1}} \geqslant \left(\frac{A'_n}{G'_n}\right)^{S_n}$$

这便是式(A_9).

当

$$A'_n - \lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \cdot G'_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^{S_{n+1}} = \left(\dfrac{A'_n}{G'_n}\right)^{S_n} \\ A'_{n+1} - \lambda G'_{n+1} \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{A'_n}{G'_n}\right)^{S_n} = \lambda^{S_{n+1}} \leqslant \left(\frac{A'_{n+1}}{G'_{n+1}}\right)^{S_{n+1}}$$

证明 将式(A_{10})化为

$$(S_{n+1}A'_{n+1} - S_nA'_n) + S_nG'_n\lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \geqslant \lambda S_{n+1}G'_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$q_{n+1}a_{n+1} + S_nG'_n\lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \geqslant \lambda S_{n+1} \cdot G'_{n+1} \tag{⑦}$$

由于

$$q_{n+1}a_{n+1} + S_nG'_n\lambda^{S_{n+1}/S_n} \geqslant (q_{n+1} + S_n)[a^{q_{n+1}}_{n+1} \cdot (G'_n\lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}})^{S_n}]^{\frac{1}{q_n+S_n}} =$$

$$S_{n+1}(a^{q_{n+1}}_{n+1}G'^{S_n}_n \cdot \lambda^{S_{n+1}})^{1/S_{n+1}} =$$

$$S_{n+1}\lambda(G'^{S_{n+1}}_{n+1})^{1/S_{n+1}} = \lambda S_{n+1}G'_{n+1}$$

即式⑦成立,从而式(A_{10})成立,等号成立仅当$a_{n+1} = \lambda^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \cdot G'_n$.

为了配对,我们最后将式(A_9)参数推广为

定理 8 设 $0<\lambda<S_n/q_n, a_i>0, q_i>0(1\leqslant i\leqslant n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,则有

$$\left(\frac{A'_n}{G'^{\lambda}_n}\right)^{S_n}\geqslant K\left(\frac{A'^{\theta}_{n-1}}{G'^{\lambda}_{n-1}}\right)^{S_{n-1}} \tag{A_{11}}$$

其中

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}q_i$$

$$\theta=\frac{S_n-\lambda q_n}{S_{n-1}}$$

$$K=\frac{1}{\lambda^{\lambda q_n}}\left(\frac{S_{n-1}}{S_n-\lambda q_n}\right)^{S_n-\lambda q_n}$$

特别地,当 $\lambda=1$ 时,$\theta=k=1$,式(A_{11})化为式(A_9).

证明 将式(A_{11})变形为

$$S_{n-1}+q_n=S_n$$

$$q_na_n+S_{n-1}A'_{n-1}=S_nA'_n$$

及

$$G'^{S_n}_n/G'^{S_{n-1}}_{n-1}=a_n^{q_n}$$

于是

$$(A_{11})\Leftrightarrow KA'^{\theta S_{n-1}}_{n-1}\cdot\left(\frac{G'^{S_n}_n}{G'^{S_{n-1}}_{n-1}}\right)^{\lambda}\leqslant A'^{S_n}_n\Leftrightarrow KA'^{\theta S_{n-1}}_{n-1}\cdot(a_n^{q_n})^{\lambda}\leqslant A'^{S_n}_n\Leftrightarrow$$

$$a_n^{\lambda q_n}\cdot\left(\frac{\lambda S_{n-1}}{S_n-\lambda q_n}A'_{n-1}\right)^{S_n-\lambda q_n}\leqslant(\lambda A'_n)^{S_n} \tag{8}$$

记式⑧左边为 P,则应用加权不等式并注意到 $\lambda q_n+(S_n-\lambda q_n)=S_n$ 得

$$P\leqslant\left[\frac{\lambda q_na_n+(S_n-\lambda q_n)\left(\frac{\lambda S_{n-1}}{S_n-\lambda q_n}A'_{n-1}\right)}{\lambda q_n+(S_n-\lambda q_n)}\right]^{S_n}=$$

$$\left[\frac{\lambda(q_na_n+S_{n-1}A'_{n-1})}{S_n}\right]^{S_n}=(\lambda A'_n)^{S_n}$$

即式⑧成立,从而式(A_{11})成立,等号成立仅当 $a_n=\left(\frac{\lambda S_{n-1}}{S_n-\lambda q_n}\right)A'_{n-1}$.

关于拉多不等式和泡泡维奇不等式,它们不仅有参数推广和在加权不等式中的推广,而且还可以将它俩推广到加权幂平均不等式中去.限于篇幅和难度,略去.

5 又发新花

我们在上一节系统介绍了拉多不等式式(A_2)与泡泡维奇不等式.还有与它们结构相关,形态相似的不等式吗?如果有,那会是谁呢?据 Beckembach 和 Benllman 合写的名著《Inequalities》(1961 年)第 5 页上记载了:

定理 9(凡基不等式) 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,记 $A(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$,

$G(x)=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}$，则

(1) 若 $0<x_i\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$\frac{A(x)}{G(x)}\geqslant\frac{A(1-x)}{G(1-x)} \tag{A_{12}}$$

(2) 若 $\frac{1}{2}\leqslant x_i<1$，则

$$\frac{A(x)}{G(x)}\leqslant\frac{A(1-x)}{G(1-x)} \tag{A'_{12}}$$

(3) 若 $x_i>1$，则

$$\frac{A(x)}{G(x)}\leqslant\frac{A(x-1)}{G(x-1)} \tag{A''_{12}}$$

可见，凡基建立的上述3个漂亮的不等式，结构对称紧凑，恰似娟秀可爱、光彩照人的"三姐妹"。它们的外形与泡泡维奇不等式颇有几分相似之处，但含义却各不相同。

综述

分析 当 $0<x_i\leqslant\frac{1}{2}$ 时，设 $\sum\limits_{i=1}^{n}$ 为 $\sum$，$\prod\limits_{i=1}^{n}$ 为 $\prod$，由于 $\sum x_i\geqslant nG(x)$ 有

$$G(1-x)=\sqrt[n]{\prod(1-x)}\leqslant\frac{1}{n}\sum(1-x)=$$

$$\frac{1}{n}\left(n-\sum x_i\right)\leqslant\frac{1}{n}(n-nG(x))\Rightarrow$$

$$G(1-x)\leqslant 1-G(x) \tag{①}$$

因此，如果

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A(x)}{G(x)}\geqslant\frac{A(1-x)}{G(1-x)}\\&G(1-x)\leqslant 1-G(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{A(x)}{G(x)}\geqslant\frac{A(1-x)}{1-G(x)}\Rightarrow$$

$$A(x)(1-G(x))\geqslant G(x)(1-A(x))\Rightarrow A(x)\geqslant G(x)$$

但是，以上步骤不能步步可逆，这是因为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A(x)}{G(x)}\geqslant\frac{A(1-x)}{G(1-x)}\\&\frac{A(1-x)}{1-G(x)}\geqslant\frac{A(1-x)}{G(1-x)}\end{aligned}\right\}\not\Rightarrow\frac{A(x)}{G(x)}\geqslant\frac{A(1-x)}{G(1-x)}$$

所以不能用此法证明式(A_{12})，从而也不能用此法证明式(A'_{12}).

但是，我们可用此法证明(A''_{12}).

证明 (3) 当 $x_i>1(1\leqslant i\leqslant n)$ 时，式(A''_{12})化为

$$\left[\frac{\prod(x_i-1)}{\prod x_i}\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\sum(x_i-1)}{\sum x_i} \tag{②}$$

记式②左边为 P，则

$$P=\left(\prod\frac{x_i-1}{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum\frac{x_i-1}{x_i}=\frac{1}{n}\sum\left(1-\frac{1}{x_i}\right)=$$

$$1-\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i}(\text{应用柯西不等式})\leqslant$$

$$1-\frac{n}{\sum x_i}=\frac{\sum x_i-n}{\sum x_i}=\frac{\sum(x_i-1)}{\sum x_i}$$

即式 ② 成立，从而式(A''_{12})成立，等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

凡基不等式(A_{12}) ~ (A''_{12})的三个形式，均是以此值的外形构建. 由于

$$\begin{cases}A(x)\geqslant G(x)\\A(1-x)\geqslant G(1-x)\end{cases}\Rightarrow A(x)A(1-x)\geqslant G(x)G(1-x)\tag{$A_{12}^{(3)}$}$$

从结构上讲，可将式 $A_{12}^{(3)}$ 视为凡基不等式的一个配对式.

易知，$A(1-x)=1-A(x)$，$G(1-x)\leqslant 1-G(x)$，且我们可将式 $A_{12}^{(3)}$ 加强为：

(1) 当 $0<x_i\leqslant\frac{1}{2}$ 时

$$A(x)[1-A(x)]\geqslant G(x)[1-G(x)]\tag{$A_{12}^{(4)}$}$$

(2) 当 $\frac{1}{2}\leqslant x_i$ 时

$$A(x)[1-A(x)]\leqslant G(x)[1-G(x)]\tag{$A_{12}^{(5)}$}$$

这是因为

$$\begin{aligned}A(x)&=A(x)[1-A(x)]-G(x)[1-G(x)]=\\&A(x)-G(x)-[A^2(x)-G^2(x)]=\\&[A(x)-G(x)][1-A(x)-G(x)]\end{aligned}$$

当 $0<x_i\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow 0<G(x)\leqslant A(x)\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow 0<A(x)+G(x)\leqslant 1\Rightarrow A(x)\geqslant 0$

即式($A_{12}^{(4)}$)成立；

当

$$\frac{1}{2}\leqslant x_i\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant G(x)\leqslant A(x)\Rightarrow A(x)+G(x)\geqslant 1\Rightarrow A(x)\leqslant 0$$

即式($A_{12}^{(5)}$)成立.

最后，由前面的式 ① 有：当 $x_i\leqslant 1$ 时

$$\left.\begin{aligned}&G(1-x)\leqslant 1-G(x)\Rightarrow G(x)+G(1-x)\leqslant 1\\&A(x)+A(1-x)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$A(x)+A(1-x)\geqslant G(x)+G(1-x)\tag{$A_{12}^{(6)}$}$$

总结前述：关于 $A(x)$，$G(x)$，$A(1-x)$，$G(1-x)$ 的和、积、商形式的不等式我们均建立起了，且推导比较简单，这些都是凡基不等式的产物.

现在，就只有差形式的结论没有建立，这可能吗？首先，我们考虑当 $0<x_i<1$ 时

$$\begin{aligned}A(x)-A(1-x)&=A(x)-(1-A(x))=2A(x)-1\geqslant\\&2G(x)-1=G(x)-(1-G(x))\end{aligned}$$

但 $$1-G(x)\geqslant G(1-x)\Rightarrow G(x)-(1-G(x))\leqslant G(x)-G(1-x)$$

因此，不能推导出

$$A(x)-A(1-x)\geqslant G(x)-G(1-x)$$

其实,只有我们转变思维方向,是能够建立的:

定理 10 设 $x_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,记 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均为 $A_n(x)$,几何平均为 $G_n(x)$,则有

(1) 当 $x_i \geqslant 1$ 时,有

$$A_n(x) - G_n(x) \geqslant A_n(\frac{1}{x}) - G_n(\frac{1}{x}) \tag{A$_{13}$}$$

(2) 当 $0 < x_i \leqslant 1$ 时,有

$$A_n(x_i) - G_n(x) \leqslant A_n(\frac{1}{x}) - G_n(\frac{1}{x}) \tag{A$'_{13}$}$$

证明 我们只须证明式(A_{13})成立即可.

(1) 当 $n = 1$ 时,式(A_{13})显然成立;

当 $n = 2$ 时,设

$$\begin{cases} x_1 = a^2 \geqslant 1 \\ x_2 = b^2 \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow ab \geqslant 1 \Rightarrow A_2(x) - G_2(x) \geqslant A_2(\frac{1}{x}) - G_2(\frac{1}{x}) \Leftrightarrow \tag{③}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab} \Leftrightarrow$$

$$(a^2 + b^2)a^2b^2 - 2(ab)^3 \geqslant a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow$$

$$(ab)^2(a^2 + b^2 - 2ab) \geqslant a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow$$

$$(ab - 1)(ab + 1)(a - b)^2 \geqslant 0 \tag{④}$$

逆推之,式③成立,等号成立仅当

$$a = b \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

(2) 假设当 $n = k + 1$ 时,式(A_{13})成立,并取 $x_{k+1} = G_k(x) = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{1/k} \geqslant 1$,则有

$$A_{k+1}(x) - G_{k+1}(x) \geqslant A_{k+1}(\frac{1}{x}) - G_{k+1}(\frac{1}{x}) \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i + G_k(x)}{k + 1} - \left[\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right) \cdot G_k(x)\right]^{\frac{1}{k+1}} \geqslant$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{G_k(x)}}{k + 1} - \left[\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i}\right) \cdot \frac{1}{G_k(x)}\right]^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + G_k(x) - (k + 1)\{[G_k(x)]^k \cdot G_k(x)\}^{\frac{1}{k+1}} \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{G_k(x)} - (k + 1)\{[G_k(x)]^{-k} \cdot G_k^{-1}(x)\}^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i - kG_k(x) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} - \frac{k}{G_k(x)} \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} - G_k(x) \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i}}{k} - G_k(\frac{1}{x}) \Rightarrow$$

$$A_k(x) - G_k(x) \geqslant A_k(\frac{1}{x}) - G_k(\frac{1}{x})$$

即当 $n = k$ 时式(A_{13})也成立,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$.

综合上述,对任意 $n \in \mathbf{N}$,定理成立.

定理 13 中的两个不等式,是凡基不等式的一个配对形式之一,它结构紧凑,外形简洁,优美漂亮,便于记忆.

但是,至今我们才只证明了凡基不等式的三分之一,还有三分之二未证明,为此,我们不妨先将它推广到加权不等式中去,再证明.

定理 11　设 $x_i > 0, p_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$ 且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,并记 $A_p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, $G_p(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$,则

(1) 当 $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时

$$\frac{A_p(x)}{A_p(1-x)} \geqslant \frac{G_p(x)}{G_p(1-x)} \tag{A_{14}}$$

(2) 当 $\frac{1}{2} \leqslant x_i < 1(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时

$$\frac{A_p(x)}{A_p(1-x)} \geqslant \frac{G_p(x)}{G_p(1-x)} \tag{A'_{14}}$$

显然,当 $p_i = \frac{1}{n}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时,式(A_{14})和式(A'_{14})化为凡基不等式.

证明　我们简记 $\sum_{i=1}^{n}$ 为 $\sum$, $\prod_{i=1}^{n}$ 为 $\prod$,设关于 $x \in (0,1)$ 的函数为

$$f(x) = \ln(\frac{1}{x} - 1)(0 < x < 1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-1)} < 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}$$

(1) 当 $0 < x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) \geqslant 0$ 时,$f(x)$ 为凸函数;设 $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}(1 \leqslant i \leqslant n)$,应用 Jensen 不等式,有

$$\sum p_i f(x_i) \geqslant f(\sum p_i x_i) \Rightarrow \sum p_i \ln\left(\frac{1}{x_i} - 1\right) \geqslant \ln\left(\frac{1}{\sum p_i x_i} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\ln \prod \left(\frac{1}{x_i} - 1\right)^{p_i} \geqslant \ln\left(\frac{1}{\sum p_i x_i} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\prod \left(\frac{1}{x_i} - 1\right)^{p_i} \geqslant \frac{1}{\sum p_i x_i} - 1 \Rightarrow \frac{\prod (1-x_i)^{p_i}}{\prod x_i^{p_i}} \geqslant$$

$$\frac{1 - \sum p_i x_i}{\sum p_i x_i} = \frac{\sum p_i (1-x_i)}{\sum p_i x_i} \Rightarrow \frac{\sum p_i x_i}{\prod x_i^{p_i}} \geqslant$$

$$\frac{\sum p_i(1-x_i)}{\prod(1-x_i)^{p_i}} \Rightarrow \frac{A_p(x)}{G_p(x)} \geqslant \frac{A_p(1-x)}{G_p(1-x)}$$

此即为式(A_{14}).

(2) 当$\frac{1}{2} \leqslant x_i < 1 \Rightarrow f''(x) \leqslant 0$时,则有反向 Jensen 不等式

$$\sum p_i f(x_i) \leqslant f\left(\sum p_i x_i\right)$$

同理可得式(A'_{14}).

综合上述(1) 和(2) 知,定理成立,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n \in (0,1)$.

如果我们记

$$M_0(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\theta}}{n}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

在20世纪90年代,我国的陈计老师又将凡基不等式推广到幂平均不等式中.

定理12(陈计) 设 $0 < x_i < 1(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,对于 $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0 \leqslant \beta \leqslant 1$,有

(1) 当 $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时,有

$$\frac{M_\alpha(x)}{M_\beta(x)} \leqslant \frac{M_\alpha(1-x)}{M_\beta(1-x)} \tag{A_{15}}$$

(2) 当$\frac{1}{2} \leqslant x_i < 1(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时,有

$$\frac{M_\alpha(x)}{M_\beta(x)} \geqslant \frac{M_\alpha(1-x)}{M_\beta(1-x)} \tag{A'_{15}}$$

仅当 $\alpha = \beta = 0$ 或 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n \in (0,1)$ 时成立.

特别地,当 $\alpha = 0, \beta = 1$ 时,即得凡基不等式.

更令人惊叹的是,还可以把凡基不等式推广到加权幂平均不等式中去,但证明太难.

我们在前面新建的定理10,就是凡基不等式的最简洁美妙的配对式,现在,我们把它推广到加权不等式中去.

定理13 设 $x_i > 0, p_i > 0(i = 1,2,\cdots,n; n \in \mathbf{N})$,且$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,并记 $A_p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, G_p(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$,则有

(1) 当 $0 < x_i \leqslant 1$ 时

$$A_p(x) - A_p\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant G_p(x) - G_p\left(\frac{1}{x}\right) \tag{A_{16}}$$

(2) 当 $x_i \geqslant 1(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$ 时

$$A_p(x) - G_p(x) \geqslant A_p\left(\frac{1}{x}\right) - G_p\left(\frac{1}{x}\right) \tag{A'_{16}}$$

这个新的结论,可用微分法证明,但较难.现在我们仍用反向归纳法证明它.

证明 (1) 当 $n=1$ 时,定理显然成立.

当 $n=2$ 时,式(A_{16})式化为

$$p_1x_1+p_2x_2-x_1^{p_1}x_2^{p_2}\geqslant\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}-\left(\frac{1}{x_1}\right)^{p_1}\left(\frac{1}{x_2}\right)^{p_2} \quad ⑤$$

令 $q_1,q_2>0$,且 $p_1=q_1/(q_1+q_2)$,$p_2=q_2/(q_1+q_2)$,于是式 ⑤ 化为

$$\frac{q_1x_1+q_2x_2}{q_1+q_2}-(x_1^{q_1}x_2^{q_2})^{\frac{1}{q_1+q_2}}\geqslant\frac{\dfrac{q_1}{x_1}+\dfrac{q_2}{x_2}}{q_1+q_2}-\left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{q_1}\left(\frac{1}{x_2}\right)^{q_2}\right]^{\frac{1}{q_1+q_2}} \quad ⑥$$

当 $q_1,q_2\in\mathbf{N}$ 时,由定理 10 知,式 ⑥ 显然成立;

当 $q_1,q_2\in\mathbf{Q}^+$ 时,设 $(q_1,q_2)=\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2},\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)$,且 $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbf{N}$,$(\lambda_1,\lambda_2)=1$,$(\mu_1,\mu_2)=1$,代入式 ⑥ 得

$$\frac{\lambda_1\mu_2x_1+\lambda_2\mu_1x_2}{\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1}-(x_1^{\lambda_1\mu_2}\cdot x_2^{\lambda_2\mu_1})^{\frac{1}{\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1}}\geqslant$$

$$\frac{\dfrac{\lambda_1\mu_2}{x_1}+\dfrac{\lambda_2\mu_1}{x_2}}{\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1}-\left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\lambda_1\mu_2}\left(\frac{1}{x_2}\right)^{\lambda_2\mu_1}\right]^{\frac{1}{\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1}} \quad ⑦$$

由于 $\lambda_1\mu_2,\lambda_2\mu_1\in\mathbf{N}$,因此式 ⑤ 成立;

当 $q_1,q_2,\in\mathbf{R}^+$ 时,应用实数逼近有理数的原理知,式 ⑤ 仍然成立.

综合前述知,当 $n=2$ 时式(A_{16})成立;等号成立仅当 $x_1=x_2=1$.

(2) 假设当 $n=k+1$ 时,式(A_{16})成立,记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}q_i\Rightarrow S_{k+1}=S_k+q_{k+1}$,取 $x_{k+1}=G=\left(\prod\limits_{i=1}^{k}x_i^{q_i}\right)^{1/S_k}$,$p_i=q_i/S_k(1\leqslant i\leqslant k\in\mathbf{N})$,于是有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}q_ix_i+q_{k+1}G}{S_{k+1}}-\left[\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{q_i}\right)\cdot G^{q_{k+1}}\right]^{\frac{1}{S_{k+1}}}\geqslant$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{q_i}{x_i}+\dfrac{q_{k+1}}{G}}{S_{k+1}}-\left[\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{q_i}\cdot\left(\frac{1}{G}\right)^{q_{k+1}}\right]^{\frac{1}{S_{k+1}}}\Rightarrow$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}q_ix_i+q_{k+1}G}{S_{k+1}}-(G^{S_k}\cdot G^{q_{k+1}})^{\frac{1}{S_{k+1}}}\geqslant$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{q_i}{x_i}+\dfrac{q_{k+1}}{G}}{S_{k+1}}-\left[\left(\frac{1}{G}\right)^{S_k}\cdot\left(\frac{1}{G}\right)^{q_{k+1}}\right]^{\frac{1}{S_{k+1}}}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k}q_ix_i+q_{k+1}G-S_{k+1}G\geqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{x_i}+\frac{q_{k+1}}{G}-\frac{S_{k+1}}{G}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k} q_i x_i - S_k G \geqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{x_i} - \frac{S_k}{G} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i x_i}{S_k} - \left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{q_i}\right)^{\frac{1}{S_k}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{x_i}}{S_k} - \left[\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{q_i}\right]^{\frac{1}{S_k}} \qquad ⑧$$

等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$.

式 ⑧ 表明,当 $n = k$ 时,式(A_{16}) 成立:

综合上述知,对于任意 $n \in \mathbf{N}$,定理成立(式(A'_{16}) 类似可证),等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

在本节的末尾,我们建立更新更妙的:

定理 14 设 $x_i > 0, p_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,并记 $A_p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, $G_p(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$, $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_m > 0(2 \leqslant m \in \mathbf{N})$,则有

$$\frac{A_p(x^{\theta_1})}{G_p(x^{\theta_1})} \geqslant \frac{A_p(x^{\theta_2})}{G_p(x^{\theta_2})} \geqslant \cdots \geqslant \frac{A_p(x^{\theta_m})}{G_p(x^{\theta_m})} \qquad (A_{17})$$

综述

上式既像五彩缤纷的彩带,更像闪光的金项链,证明时须应用切比雪夫不等式的加权推广.

证明 设 $\alpha \geqslant \beta > 0$,我们先证明:

$$\frac{A_p(x^{\alpha})}{G_p(x^{\alpha})} \geqslant \frac{A_p(x^{\beta})}{G(x^{\beta})} \qquad ⑨$$

当 $\alpha = \beta$ 时,式 ⑨ 显然成立;当 $\alpha > \beta > 0$ 时,由对称性不妨设

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \Rightarrow \begin{cases} x_1^{\alpha-\beta} \geqslant x_2^{\alpha-\beta} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\alpha-\beta} \\ x_1^{\beta} \geqslant x_2^{\beta} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\beta} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A_p(x^{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\beta+(\alpha-\beta)} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i x_i^{\beta} \cdot x_i^{\alpha-\beta})\text{(应用切比雪夫不等式的加权推广)} \geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\beta}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\alpha-\beta}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\beta}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\alpha-\beta} =$$

$$A_p(x^{\beta}) \cdot [G_p(x)]^{\alpha-\beta} = A_p(x^{\beta}) \cdot [G_p(x)]^{\alpha}/[G_p(x)]^{\beta} =$$

$$A_p(x^{\beta}) \cdot G_p(x^{\alpha})/G_p(x^{\beta}) \Rightarrow \frac{A_p(x^{\alpha})}{G_p(x^{\alpha})} \geqslant \frac{A_p(x^{\beta})}{G_p(x^{\beta})}$$

即式 ⑨ 成立,等号成立仅当 $\alpha = \beta$ 或 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

应用式 ⑨,立刻得到式(A_{17}).

其实,应用式 ⑨,再结合我们在前面介绍的泡泡维奇不等式,有

$$\left(\frac{A_{n+1}(x^{\alpha})}{G_{n+1}(x^{\alpha})}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{A_n(x^{\alpha})}{G_n(x^{\alpha})}\right)^{n} \geqslant \left(\frac{A_n(x^{\beta})}{G_n(x^{\beta})}\right)^{n}$$

这样,我们立即得到泡泡维奇不等式的指数推广:

定理 15 设 $\alpha \geqslant \beta > 0, n \in \mathbf{N}$,则有

$$\left(\frac{A_{n+1}(x^{\alpha})}{G_{n+1}(x^{\alpha})}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{A_n(x^{\beta})}{G_n(x^{\beta})}\right)^{n} \tag{A_{18}}$$

显然,当 $\alpha = \beta = 1$ 时,式(A_{18})化为泡泡维奇不等式

$$\left(\frac{A_{n+1}(x)}{G_{n+1}(x)}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{A_n(x)}{G_n(x)}\right)^{n}$$

因此式(A_{18})等号成立的条件是:(1)当 $\alpha = \beta$ 时,$x_{n+1}^{\alpha} = A_n(x^{\alpha})$;(2)当 $\alpha > \beta > 0$ 时,$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$.

6 再度加强

我们在第三节应用拉多不等式和泡泡维奇不等式介绍了平均值不等式的一对加强式,下面我们从另一个新的方面介绍平均值不等式的新加强.

定理 16 设 $a_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N}$;约定 $a_{n+1} \equiv a_1)$,则有

$$A_n - G_n \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}})^2}{2n} \tag{A_{19}}$$

$$\frac{A_n}{G_n} \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}} + \sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{A_{20}}$$

这两个加强式外观漂亮,结构井然有序.如果我们假定 $0 < p \leqslant a_i \leqslant q(1 \leqslant i \leqslant n)$,那么有

$$(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}})^2 \leqslant (\sqrt{q} - \sqrt{p})^2 \Rightarrow \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_{i+1}})^2 \leqslant K(\sqrt{q} - \sqrt{p})^2 \tag{①}$$

其中

$$K = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n} = \frac{2n + (-1)^n - 1}{4n} = \begin{cases}\frac{1}{2}(\text{当 } n \text{ 为偶数时}) \\ \frac{n-1}{2n}(\text{当 } n \text{ 为奇数时})\end{cases} \tag{②}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}} - \sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}} + \sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}} - \sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}}\right)^2 + 4 \leqslant$$

$$\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 + 4 = \left(\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}}+\sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}}{2}\right)^{2K} \quad ③$$

①,③ 两式等号成立仅当 $a_i = p, a_{i+1} = q(i = 1,3,5,\cdots,)$

现在我们证明定理 16.

证明 (1) 应用平均值不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ia_{i+1}} \geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_ia_{i+1}}\right)^{\frac{1}{n}} = n\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -2nG_n &\geqslant -\sum_{i=1}^{n}2\sqrt{a_ia_{i+1}} \\ 2nA_n &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1}) \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$2n(A_n - G_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - 2\sqrt{a_ia_{i+1}} + a_{i+1}) \Rightarrow$$

$$A_n - G_n \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}})^2$$

综述

(2) 仍然应用平均值不等式

$$\left.\begin{aligned} 2nA_n &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1}) \geqslant n\left[\prod_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})\right]^{\frac{1}{n}} \\ G_n &= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_ia_{i+1}}\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{2A_n}{G_n} \geqslant \left(\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_ia_{i+1}}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i+a_{i+1}}{\sqrt{a_ia_{i+1}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}}+\sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$\frac{A_n}{G_n} \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}}+\sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}}}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

从上述证明过程可知,平均值不等式完全应用自身的力量,自力更生,自强不息.而且,它还可以再加强为:

定理 17 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 均为正数,则

$$A_n - G_n \geqslant \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\sqrt{a_{2i-1}}-\sqrt{a_{2i}})^2 \quad (A_{21})$$

$$\frac{A_n}{G_n} \geqslant \prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{\sqrt{\frac{a_{2i-1}}{a_{2i}}}+\sqrt{\frac{a_{2i}}{a_{2i-1}}}}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \quad (A_{22})$$

观察知,定理 17 中的两式与定理 16 中的两式既有相似之处,又有相异之处,且它们的右边分别能得到相同的最大值

$$K(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2 \text{ 和} \left(\frac{\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}}{2}\right)^{2K}$$

当 $a_{2i-1}=q, a_{2i}=p(i=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right])$ 时取到.

证明 (1) 当 n 为偶数时

$$nA_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}a_n})=$$
$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_2}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}a_n}+\sqrt{a_n+a_n}\geqslant$$
$$[(\sqrt{a_1a_2})^2\cdot(\sqrt{a_3a_4})^2\cdot\cdots\cdot(\sqrt{a_{n-1}a_n})^2]^{\frac{1}{n}}\cdot n=$$
$$n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=nG_n$$

于是

$$n(A_n-G_n)\geqslant(a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2})+(a_3+a_4-2\sqrt{a_3a_4})+\cdots+$$
$$(a_{n-1}+a_n-2\sqrt{a_{n-1}a_n})=$$
$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4})^2+\cdots+(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n})^2 \quad ④$$

当 n 为奇数时

$$nA_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-2}+a_{n-1})+a_n$$
$$2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\cdots+\sqrt{a_{n-2}a_{n-1}})+a_n\geqslant$$
$$n[(\sqrt{a_1a_2})^2(\sqrt{a_3a_4})^2\cdots(\sqrt{a_{n-2}a_{n-1}})^2\cdot a_n]^{\frac{1}{n}}=$$
$$n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=nG$$
$$n(A_n-G_n)\geqslant(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4})^2+\cdots+$$
$$(\sqrt{a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}})^2 \quad ⑤$$

因此不论 n 为奇数还是偶数,式(A_{21})成立,同理可证式(A_{22})也成立.等号成立仅当 $a_1=\cdots=a_n$.

式(A_{22})类似可证.

关于平均值不等式的加强,我们一共介绍了3对,计6个.在众多的不等式里,有6个之多的加强式,是少见的.

7　神圣境界

对于3个正数 a_1,a_2,a_3,我们在前面介绍了如下结论:

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\frac{\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_1}+\sqrt{a_1a_2}}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \quad ①$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_1}{2}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \quad ②$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt{\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{3}}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \quad ③$$

再将以上3个不等式,从3个正数 a_1,a_2,a_3 推广到 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 中去,就会让我们的思维从山下向山上攀升,使我们感到了"海阔凭鱼跃,天空任鸟飞"的神圣境界.

定理18 证从 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 中每次取出 $K(1\leqslant K\leqslant n)$ 个数的几何平均的算术平均为 $A_n(G_k)=T_k$,则有不等式链

$$T_1\geqslant T_2\geqslant T_3\geqslant\cdots\geqslant T_{n-1}\geqslant T_n \tag{A_{23}}$$

粗略一看,此定理又美又妙又难,其实它是"纸老虎",只要我们小心仔细,巧施奇谋,定会将它拿下.

证明 令 $a_i=b_i^{k(k+1)}(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$T_k=A_n(G_k)=(\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_2a_3\cdots a_{k+1}}+\cdots+\sqrt[k]{a_na_1\cdots a_{k-1}})/C_n^k=$$
$$[(b_1b_2\cdots b_k)^{k+1}+(b_2b_3\cdots b_{k+1})^{k+1}+\cdots+(b_nb_1\cdots b_{k-1})^{k+1}]/C_n^k$$

$$T_{k+1}=A_n(G_{k+1})=(\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}+\sqrt[k+1]{a_2a_3\cdots a_{k+2}}+\cdots+\sqrt[k+1]{a_na_1\cdots a_k})/C_n^{k+1}=$$
$$[(b_1b_2\cdots b_{k+1})^k+(b_2b_3\cdots b_{k+2})^k+\cdots+(b_nb_1\cdots b_k)^k]/C_n^k$$

其中 T_k 的括号里共有 C_n^k 项,每项的次数为 $k(k+1)$,T_{k+1} 的括号里共有 C_n^{k+1} 项,每项的次数为 $(k+1)k$,应用平均值不等式,有

$$t_1^{k+1}+t_2^{k+1}+\cdots+t_{k+1}^{k+1}\geqslant(k+1)t_1t_2\cdots t_{k+1} \tag{④}$$

其中 $t_1,t_2,\cdots,t_{k+1}$ 均为正数.在式④中令 $t_1=b_1b_2\cdots b_k,t_2=b_2b_3\cdots b_{k+1},\cdots,t_{k+1}=b_{k+1}b_1\cdots b_{k-1}$,可得

$$(b_1b_2\cdots b_k)^{k+1}+(b_2b_3\cdots b_{k+1})^{k+1}+\cdots+(b_{k+1}b_1\cdots b_{k-1})^{k+1}\geqslant$$
$$(k+1)(b_1b_2\cdots b_{k+1})^k \tag{⑤}$$

……

如此继续下去,有

$$(b_nb_1\cdots b_{k-1})^{k+1}+(b_nb_2\cdots b_{k-2})^{k+1}+\cdots+(b_1b_2\cdots b_k)^{k+1}\geqslant(k+1)(b_nb_1\cdots b_k)^k$$

将以上 C_n^{k+1} 个不等式相加,并注意到右边共有 $(k+1)C_n^{k+1}$ 项,其中每个项有 $k+1$ 个相同单项式,它的左边每个相同项有 $n-k$ 个,共有 $(n-k)C_n^k$ 个项.因此有不等式

$$\left.\begin{array}{l}(n-k)C_n^kT_k\geqslant(k+1)C_n^{k+1}T_{k+1}\\(n-k)C_n^k=(k+1)C_n^{k+1}\end{array}\right\}\Rightarrow T_k\geqslant T_{k+1}(1\leqslant k\leqslant n-1)\Rightarrow$$

$$T_1\geqslant T_2\geqslant\cdots\geqslant T_n$$

即定理得证,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

从外形结构上讲,定理18的配对形式是:

定理19 记所有每次从 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 里取出 k 个数的算术平均的几何平均 $G_n(A_k)=H_k$,则有

$$H_1\leqslant H_2\leqslant\cdots\leqslant H_n \tag{A_{24}}$$

可见,式(A_{23})与式(A_{24})确实"门当户对","天生一双",其证明技巧也相仿.

证明 依 $H_k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 的定义有

综述

$H_k = G_n(A_k) =$

$$[(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k})(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{k})\cdots(\frac{a_n+a_1+\cdots+a_{k-1}}{k})]^{1/C_n^k}$$

$$H_{k+1} = G_n(A_{k+1}) = [(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1})(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k+2}}{k+1})\cdot\cdots\cdot(\frac{a_n+a_1+\cdots+a_k}{k+1})]^{1/C_n^{k+1}}$$

应用平均值不等式,有

$$k(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}) = (a_1+a_2+\cdots+a_k)+(a_2+a_3+\cdots+a_{k+1})+\cdots+(a_{k+1}+a_1+\cdots+a_{k-1}) \geqslant$$

$$(k+1)[(a_1+a_2+\cdots+a_k)(a_2+a_3+\cdots+a_{k+1})\cdots(a_{k+1}+a_1+\cdots+a_{k-1})]^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow$$

$$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1})^{k+1} \geqslant [(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k})(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{k})\cdots(\frac{a_{k+1}+a_1+\cdots+a_{k-1}}{k})] \quad ⑥$$

……

如此继续,同理有

$$(\frac{a_n+a_1+\cdots+a_k}{k+1})^{k+1} \geqslant (\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k})(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{k})\cdots(\frac{a_n+a_1+\cdots+a_{k-1}}{k})$$

将以上 C_n^{k+1} 个不等式相乘,得

$$H_k^{(n-k)C_n^k} \leqslant H_{k+1}^{(k+1)C_n^{k+1}} \Rightarrow H_k \leqslant H_{k+1} \Rightarrow H_1 \leqslant H_2 \leqslant \cdots \leqslant H_n$$

即定理得证,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

现在,让我们回首本节的开头,显然,式(A_{23})是式①的 n 元推广,式(A_{24})是式②的 n 元推广,那么,由于式③是众所周知的3元对称不等式,它也可以从3元推广到 n 元吗?

对于4元正数 a_1,a_2,a_3,a_4,可用两种方法证明:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1+a_2a_4+a_1a_3}{6}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3}{4}} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

对于 n 元正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$,用数学归纳法可证

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geqslant (\frac{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j}{C_n^2})^{\frac{1}{2}} \geqslant [\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i})}{n}]^{\frac{1}{n-1}} \geqslant (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \quad (*)$$

式(*)明显是前面式③的一个 n 元推广,如果我们能将它加细,那该有多好!

但是,当你翻开华罗庚老师为我们专著的《从孙子的神奇妙算谈起》第214页时,可

见：

定理 20 设每次从 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 中取出 k 个数的乘积的算术平均为 $P_k(1\leqslant k\leqslant n)$，则有

$$P_1\geqslant P_2^{1/2}\geqslant\cdots\geqslant P_n^{1/n}\tag{A_{25}}$$

定理 18 ~ 20 中的 (A_{23}) ~ (A_{25})，$\begin{cases}T_1\geqslant T_2\geqslant\cdots\geqslant T_n\\H_1\leqslant H_2\leqslant\cdots\leqslant H_n\\P_1\geqslant P_2^{1/2}\geqslant\cdots\geqslant P_n^{1/n}\end{cases}$ 这三个绝美无比的神圣代数不等式，以他们那严密的结构，优美的外观，迷人的风采，吸引着无数的数学有心人. 它们三个交相辉映，恰似"桃园三结义".

观察以上三式，明显有

$$P_1=T_1=H_n=A_n,P_n=T_n=H_1=G_n$$

现在，我们先学习华老的绝妙证明(略有改动)：

证法 1(华罗庚) 为了方便，我们再定义 $C_0=1,P_0=1,P_{n+1}=0$，于是我们希望建立结论：

$$P_{r-1}P_{r+1}\leqslant(P_r)^2,1\leqslant r\leqslant n\tag{⑦}$$

为此，我们用数学归纳法证明式 ①.

(1) 当 $n=2$ 时，式 ⑦ 即为

$$a_1a_2\leqslant\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$

成立.

当 $n=3$ 时，注意到 $P_0=1,P_4=0$，从式 ⑦ 派生出 $r=1,2$ 时的两个不等式

$$\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{3}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2\tag{⑧}$$

$$a_1a_2a_3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)\leqslant\left(\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{3}\right)^2\tag{⑨}$$

上面的式 ⑧ 是 3 元对称不等式，应用它可证式 ⑨ 成立. 等号成立仅当 $a_1=a_2=a_3$.

(2) 假设对于 $(n-1)$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$，定理成立，而用 C'_r,P'_r 分别表示由这 $(n-1)$ 个数所作成的 C_r、P_r(其中 C_r 表示从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 里每次任意取 r 个乘起来的总和，它含有 C_n^r 项)，又设 $C'_0=P'_0=1,C'_n=P'_n=0$，那么

$$C_r=C'_r+aC'_{r-1},1\leqslant r\leqslant n$$

和

$$P_r=\frac{n-r}{n}P'_r+\frac{r}{n}a_nP'_{r-1},1\leqslant r\leqslant n$$

(这里用到了 $\frac{C_{n-1}^r}{C_n^r}=\frac{n-r}{n},\frac{C_{n-1}^{r-1}}{C_n^r}=\frac{r}{n}$) 因此

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1}-P_r^2)=A+Ba_n+Ca_n^2,1\leqslant r\leqslant n-1$$

这里

$$A=[(n-r)^2-1]P'_{r-1}P'_{r+1}-(n-r)^2P'^2_r$$

$$B=(n-r+1)(r+1)P'_{r-1}P'_r+$$

综述

$$(n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1}-$$
$$2r(n-r)P'_{r-1}P'_{r}$$
$$C=(r^2-1)P'_{r-2}P'_{r}-r^2P'^2_{r-1}$$

由归纳法的假定与 $C'_0=P'_0=1$,易见

$$P'_{r-1}P'_{r+1}\leqslant P'^2_{r},1\leqslant r\leqslant n-2$$
$$P'_{r-2}P'_{r}\leqslant P'^2_{r-1},2\leqslant r\leqslant n-1$$

由此推得 $$P'_{r-2}P'_{r+1}\leqslant P'_{r-1}P'_{r},2\leqslant r\leqslant n-1$$

因此,当 $1\leqslant r\leqslant n-1$ 的时候

$$A\leqslant\{[(n-r)^2-1]-(n-r)^2\}P'^2_{r}=-P'^2_{r}$$
$$B\leqslant[(n-r+1)(r+1)+(n-r-1)(r-1)-$$
$$2r(n-r)]P'_{r-1}P'_{r}=2P'_{r-1}P'_{r}$$
$$C\leqslant[(r^2-1)-r^2]P'^2_{r-1}=-P'^2_{r-1}$$

所以

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1}-P_r^2)\leqslant-P'^2_{r}+2P'_{r-1}P'_{r}a_n-P'^2_{r-1}a_n^2=-(P'_{r}-P'_{r-1}a_n)^2\leqslant0\Rightarrow$$
$$P_{r-1}P_{r+1}\leqslant P_r^2\Rightarrow(P_0P_2)(P_1P_3)^2(P_2P_4)^3\cdots\cdots$$
$$(P_{r-2}P_r)^{r-1}(P_{r-1}P_{r+1})^r\leqslant P_1^2P_2^4P_3^6\cdots P_{r-1}^{2(r-1)}P_r^{2r}\Rightarrow$$
$$P_{r+1}^r\leqslant P_r^{r+1}\Rightarrow P_r^{\frac{1}{r}}\geqslant P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}\Rightarrow$$
$$P_1\geqslant P_2^{\frac{1}{2}}\geqslant\cdots\geqslant P_n^{\frac{1}{n}}$$

即定理 20 成立,式(A_{25}) 成立,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

进一步地,华老还为我们指出:

$$P_{r-1}P_{r+1}\leqslant P_r^2\Rightarrow C_{r-1}C_{r+1}<\frac{(r+1)(n-r+1)}{r(n-r)}C_{r-1}C_{r+1}\leqslant C_r^2\Rightarrow$$
$$C_{r-1}C_s<C_rC_{s-1},r<s$$

从上述绝妙的证法知,关于本定理的证法技巧很强,也颇具难度.下面,我们从另一个思路证明它.

证法 2 记每次从 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的积之和为 $S_n^{(k)}$,则有

$$P_k=S_n^{(k)}/C_n^k \tag{⑩}$$

设关于实数 x 的 n 次函数为

$$f_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i) \tag{⑪}$$

则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是方程 $f_n(x)=0$ 的 n 个根,于是

$$f_{k+1}(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{k+1})=$$
$$x^{k+1}-S_{k+1}^{(1)}x^k+S_{k+1}^{(2)}x^{k-1}+\cdots+$$
$$(-1)^kS_{k+1}^{(k)}x+(-1)^{k+1}S_{k+1}^{(k+1)} \tag{⑫}$$

求导得

$$f'_{(k+1)}(x)=(k+1)x^k-kS_{k+1}^{(1)}x^{k-1}+(k-1)S_{k+1}^{(2)}x^{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}S_{k+1}^{(k-1)}x+(-1)^kS_{k+1}^{(k)} \qquad ⑬$$

为了证明本定理,我们只须证明

$$P_r^{\frac{1}{r}}\geqslant P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}},1\leqslant r\leqslant n-1 \qquad ⑭$$

成立即可.

假设导数方程 $f'_{k+1}(x)=0$,具有 k 个正根 $b_1,b_2,\cdots,b_k$,且记每次从这 k 个数中取 t 个数的积之和为 $S'_k(t)$,则

$$f'_{k+1}(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_k)=x^k-S'^{(1)}_kx^{k-1}+S'^{(2)}_kx^{k-2}+\cdots+2(-1)^{k-1}S'^{(k-1)}_kx+(-1)^kS'^{(k)}_k \qquad ⑮$$

由于式 ⑭ 和式 ⑮ 表示同一方程,则各项对应系数成比例,即

$$\frac{k+1}{1}=\frac{kS_{k+1}^{(1)}}{S'^{(1)}_k}=\frac{(k-1)S_{k+1}^{(2)}}{S'^{(2)}_k}=\cdots=\frac{2S_{k+1}^{(k-1)}}{S'^{(k-1)}_k}=\frac{S_{k+1}^{(k+1)}}{S'^{l}_{(k+1)}}\Rightarrow \qquad ⑯$$

$$\begin{cases}S'^{(t)}_k=\dfrac{k-t+1}{k+1}S_{k+1}^{(t)}\\ S'_{(t+1)k}=\dfrac{k-t}{k+1}S_{k+1}^{(t+1)}\end{cases} \qquad ⑰$$

现在,我们对式 ⑭ 用数学归纳法证明:

(1) 当 $n=2$ 时,式 ⑭ 化为 $P_1\geqslant P_2^{1/2}$,即

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant(a_1a_2)^{\frac{1}{2}} \qquad ⑱$$

显然成立;

当 $n=3$ 时,式 ⑭ 化为

$$P_1\geqslant P_2^{1/2}\geqslant P_3^{1/3}\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\left(\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}} \qquad ⑲$$

也成立;

(2) 假设当 $n=k$ 时,式 ⑭ 成立,有

$$\left(\frac{S'^{(t)}_k}{C_k^t}\right)^{\frac{1}{t}}\geqslant\left(\frac{S'^{(t+1)}_k}{C_k^{t+1}}\right)^{\frac{1}{t+1}}\Rightarrow\left(\frac{\frac{k-t+1}{k+1}S_{k+1}^{(t)}}{C_k^{(t)}}\right)^{\frac{1}{t}}\geqslant\left(\frac{\frac{k-t}{k+1}S_{k+1}^{(t+1)}}{C_k^{(t+1)}}\right)^{\frac{1}{t+1}}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{S_{k+1}^{(t)}}{C_{k+1}^t}\right)^{\frac{1}{t}}\geqslant\left(\frac{S_{k+1}^{(t+1)}}{C_{k+1}^{t+1}}\right)^{\frac{1}{t+1}} \qquad ⑳$$

式 ⑳ 表明,当 $n=k+1$ 时,式 ⑭ 也成立,因此对任意 $3\leqslant n\in\mathbf{N}$,式 ⑭ 成立.

将递推式 ⑭ 放散拉长即得式(A_{25}),仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

如果我们在证法 1 里建立的关系式中

综述

$$P_{r-1}P_{r+1} \leqslant P_r^2 \tag{21}$$

取 $n = 4$,并注意到 $P_0 = 1, P_5 = 0$,有

$$P_2 \leqslant P_1^2, P_1P_3 \leqslant P_2^2, P_2P_4 \leqslant P_3^2$$

于是,有不等式链

$$P_1^8 \geqslant P_2^4 \geqslant (P_1P_3)^2 \geqslant P_1^2P_2P_4 \geqslant P_2^2P_4 \geqslant P_1P_3P_4 \geqslant P_4^2 \tag{22}$$

这也是一个有趣的结果.

8　能否完善

如果我们设 $0 < p \leqslant a_i \leqslant q$,即 $a_i \in [p, q](i = 1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$.那么,我们在前面的第三节就建立了平均值不等式的一对绝美的加强式

$$A_n - G_n \geqslant \frac{2}{n}(\sqrt{q} - \sqrt{p})^2 \tag{A_4}$$

$$\frac{A_n}{G_n} \geqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{p}{q}}}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \tag{A_5}$$

而且等号成立的条件也与众不同,别具一格:当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中一个取 p,一个 q,其余取 $\sqrt{pq}$ 时,式(A_4)等号成立;而其余的均取 $(p+q)/2$ 时,式(A_5)等号成立.

式(A_4)给出了 $A_n - G_n$ 的最小值(下限值),式(A_5)给出了 A_n/G_n 的最小值,一个自然的问题是:$A_n - G_n$ 与 A_n/G_n 有最大值吗?如果有,那么我们就可将式(A_4)与式(A_5)完善成一对优美无穷的双向不等式;这是我们朝思暮想所追求的结果.那么

(1) 首先,各元数 $a_1, a_2, \cdots, a_n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 应满足什么基本条件?

为此,我们先假定 $a_1 = x \in \mathbf{R}^+$ 为变量,而视 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 为常数,并记 $\alpha = \sum_{i=2}^{n} a_i$,$\left(\prod_{i=2}^{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \beta$,且关于 x 的函数为

$$f(x) = n(A_n - G_n) = x + \alpha - n\beta x^{\frac{1}{n}}(\text{求导}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(x) = 1 - \beta x^{\frac{1}{n}-1} \\ f''(x) = \dfrac{n-1}{n}\beta x^{\frac{1}{n}-2} > 0 \end{cases}$$

这表明 $f(x)$ 为凸函数,在 $x \in (p, q)$ 内只有最小值,而无最大值.因此,只有当 x 取极端值(边界值)p 或 q 时,$f(x)$ 才能达到最大值.

同理,当 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 取极端值 p 或 q 时,$A_n - G_n$ 才能达到最大值.

所以,只有当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均取极端值 p 或 q 时,$A_n - G_n$ 才能达到最大值.

由于

$$L_n \frac{A_n}{G_n} = L_nA_n - L_nG_n$$

或设函数
$$f(x)=L_n\frac{A_n}{G_n}=L_nA_n-L_nG_n$$
可得到同样的结论.

(2) 其次，如果我们设 $3\leqslant n\in\mathbf{N},t\in\mathbf{N}$，且 $1\leqslant t\leqslant n-1$，$n$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 t 个取 p，则有 $n-t$ 个取 $q(0<p\leqslant a_i\leqslant q,1\leqslant i\leqslant n)$，关于 t 的函数为
$$f(t)=A(t)-G(t)=\frac{tp+(n-t)q}{n}-\sqrt[n]{p^tq^{n-t}}=$$
$$q-\left(\frac{q-p}{n}\right)t-q\left(\frac{q}{p}\right)^{-\frac{t}{n}}\Rightarrow \tag{①}$$
$$\begin{cases}f'(t)=-\dfrac{q-p}{n}+\dfrac{q}{n}\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-\frac{t}{n}}\cdot\ln\left(\dfrac{q}{p}\right)\\ f''(t)=-\dfrac{q}{n^2}\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-\left(\frac{t}{n}\right)}\cdot\left(\ln\dfrac{q}{p}\right)^2<0\end{cases}$$
因此函数 $f(t)$ 有最大值.

解方程 $f'(t_0)=0$，求驻点；
$$-\left(\frac{q-p}{n}\right)+\frac{q}{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{-\frac{t_0}{n}}\cdot\ln\left(\frac{q}{p}\right)=0 \tag{②}$$
$$\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{t_0}{n}}=\frac{q(\ln q-\ln p)}{q-p}=m>0$$
$$\frac{t_0}{n}(\ln q-\ln p)=\ln m$$
$$t_0=n\ln m/(\ln q-\ln p) \tag{③}$$
观察式 ③ 知，不能断定 $m>1$，从而不能断定 $t_0>0$，因此不能断定 t_0 为$[1,n)$内整数. 既使我们取 t_0 的整数部分$[t_0]$，也不能断定$[t_0]\in[1,n)$. 可见，此种思路不妥.

(3) 现在，让我们从最简单的 $n=3$ 时的情况入手分析.

对于 3 元正数 $a_1,a_2,a_3\in[p,q]$，由前面结论 1 有：
$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_1}{2}\right)^2\geqslant a_1a_2a_3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^3\Rightarrow$$
$$\prod\left(\frac{a_2+a_3}{2\sqrt{a_2a_3}}\right)^2\geqslant\left(\frac{A_3}{G_3}\right)^3=\left(\frac{\sum(a_2+a_3)}{6G_3}\right)^3\geqslant$$
$$\frac{\prod(a_2+a_3)}{8a_1a_2a_3}=\prod\left(\frac{a_2+a_3}{2\sqrt{a_2a_3}}\right)\Rightarrow$$
$$\prod\left(\frac{a_2+a_3}{2\sqrt{a_2a_3}}\right)^2\geqslant\left(\frac{A_3}{G_3}\right)^3\geqslant\prod\left(\frac{a_2+a_3}{2\sqrt{a_2a_3}}\right) \tag{C_1}$$

这是一个非常漂亮的双向不等式，如果 a_1,a_2,a_3 中一个取 p，2 个取 q，或 2 个取 p，1 个取 q，均可得到

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \geqslant \frac{A_3}{G_3} \geqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{C_2}$$

这便是(C_1)派生出的产物.

现在,我们记 $p = p_1^n, q = q_1^n(p_1, q_1 > 0)$, n 个正元数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有 k 个取 p_1^n, $n-k$ 个取 q_1^n,并记

$$f_n(k) = n(A_n(k) - G_n(k))(1 \leqslant k \leqslant n-1) = \\ kp_1^n + (n-k)q_1^n - np_1^k q_1^{n-k} \tag{④}$$

于是有

$$\begin{cases} f_3(1) = p_1^3 + 2q_1^3 - 3p_1q_1^2 \\ f_3(2) = 2p_1^3 + q_1^3 - 3p_1^2q_1 \end{cases} \Rightarrow f_3(1) - f_3(2) = (q_1 - p_1)^3 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$f_3(1) \geqslant f_3(2) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{p + 2q - 3\sqrt[3]{pq^2}}{3} \geqslant A_3 - G_3 \geqslant \frac{(\sqrt{q} - \sqrt{p})^2}{3} \tag{C_3}$$

这便是我们得到的第3个漂亮结果.

我们再设

$$\lambda_n^{(k)} = A_n^{(k)}/G_n^{(k)} = \frac{kp_1^n + (n-k)q_1^n}{np^k q_1^{n-k}}, 1 \leqslant k \leqslant n-1 \tag{⑤}$$

于是有

$$\begin{cases} \lambda_3^{(1)} = A_3^{(1)}/G_3^{(1)} = \dfrac{p_1^3 + 2q_1^3}{3p_1q_1^2} \\ \lambda_3^{(2)} = A_3^{(2)}/G_3^{(2)} = \dfrac{2p_1^3 + q_1^3}{3p_1^2q_1} \end{cases} \Rightarrow \lambda_3^{(2)}/\lambda_3^{(1)} = \frac{t(2+t^3)}{1+2t^3}\left(t = \frac{q_1}{p_1} \geqslant 1\right) \Rightarrow$$

$$A(t) = t(2+t^3) - (1+2t^3) = (t-1)^3(t+1) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_3^{(2)} \geqslant \lambda_3^{(1)} \geqslant \frac{A_3}{G_3} \Rightarrow$$

$$\frac{2p+q}{3\sqrt[3]{p^2q}} \geqslant \frac{A_3}{G_3} \geqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{C_4}$$

这是我们得到的第4个漂亮结果.它是式(C_2)的新生,它是式(C_3)的配对.真是一分耕耘,一分收获.

(4) 对于4个正元数 a_1, a_2, a_3, a_4,我们有如下结论:

结论 13 设 $0 < p \leqslant a_i \leqslant q(i = 1,2,3,4)$,则有

$$\frac{(\sqrt{q} - \sqrt{p})^2}{4} \leqslant A_4 - G_4 \leqslant \\ \begin{cases} \dfrac{1}{4}(p + 3q - 4\sqrt[4]{pq^3}), q \geqslant (1+\sqrt{2})^4 p \\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{q} - \sqrt{p})^2, p \leqslant q \leqslant (1+\sqrt{2})^4 p \end{cases} \tag{C_5}$$

证明 设

$$(p,q)=(p_1^4,q_1^4)=(p_1,q_1)=(\sqrt[4]{p},\sqrt[4]{q})\Rightarrow$$
$$\begin{cases}f_4^{(1)}=p_1^4+3q_1^4-4p_1q_1^3\\ f_4^{(2)}=2p_1^4+2q_1^4-4p_1^2q_1^2\\ f_4^{(3)}=3p_1^4+q_1^4-4p_1^3q_1\end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases}f_4^{(1)}-f_4^{(3)}=2(q_1-p_1)^3(q_1+p_1)\geqslant 0\\ f_4^{(2)}-f_4^{(3)}=(q_1-p_1)^2(q_1^2+2p_1q_1-p_1^2)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow f_4^{(3)}\leqslant \min(f_4^{(1)},f_4^{(2)})$$

又易得

$$f_4^{(1)}-f_4^{(2)}=q_1^4-p_1^4-4p_1q_1^2(q_1-p_1)=$$
$$(q_1-p_1)^2[q_1+(\sqrt{2}-1)p_1][q_1-(\sqrt{2}+1)p_1]$$

因此,当 $q_1\geqslant(\sqrt{2}+1)p_1\Rightarrow q\geqslant(\sqrt{2}+1)^4p$ 时

$$f_4^{(1)}\geqslant f_4^{(2)}\Rightarrow f_4^{(1)}\geqslant f_4^{(2)}\geqslant f_4^{(3)}\geqslant 4(A_4-G_4)\Rightarrow \frac{1}{4}(p+3q-4\sqrt[4]{pq^3})\geqslant A_4-G_4$$

综述

当 $q_1\leqslant(\sqrt{2}+1)p_1\leqslant p\leqslant q\leqslant(\sqrt{2}+1)^4p$ 时

$$f_4^{(2)}\geqslant f_4^{(1)}\geqslant f_4^{(3)}\geqslant 4(A_4-G_4)\Rightarrow \frac{1}{4}(2p+2q-4\sqrt[4]{p^2q^2})=\frac{1}{2}(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2\geqslant A_4-G_4$$

即结论 13 成立.

无独有偶,结论 13 还有配对式:

结论 14 设 $0<p\leqslant a_i\leqslant q(1\leqslant i\leqslant 4)$

$$\left(\frac{q+p}{2\sqrt{pq}}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{A_4}{G_4}\leqslant$$
$$\begin{cases}\dfrac{p+3q}{4\sqrt[4]{pq^3}}\left(\text{当}\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{3}{4}}\geqslant\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{1}{4}}+2\text{时}\right)\\ \dfrac{p+q}{2\sqrt{pq}}\left(\text{当}1\leqslant\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{3}{4}}\leqslant\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{1}{4}}+2\text{时})\end{cases}\tag{C_6}$$

略证 注意到

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1}=\frac{A_4^{(3)}}{G_4^{(3)}}\div\frac{A_4^{(1)}}{G_4^{(1)}}=\left(\frac{3p_1^4+q_1^4}{4p_1^3q_1}\right)\cdot\left(\frac{4p_1q_1^3}{p_1^4+3q_1^4}\right)=$$
$$\frac{t_1(3+t_1^2)}{1+3t_1^2}\left(t_1=\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2\geqslant 1\right)\Rightarrow$$
$$A_1(t)=t_1(3+t_1^2)-(1+3t_1^2)=(t_1-1)^3\geqslant 0\Rightarrow$$
$$\lambda_3\geqslant\lambda_1$$

同理 $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\dfrac{2t(1+t^4)}{1+3t^4}\left(t=\dfrac{q_1}{p_1}\geqslant 1\right)\Rightarrow A_2(t)=2t(1+t^4)-(1+3t^4)=$

$$(t-1)^2(2t^3+t^2-1)\geqslant 2t^3(t-1)^2\geqslant 0\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_2 \geqslant \lambda_1 \\ \lambda_3 \geqslant \lambda_1\end{array}\right\} \Rightarrow \min(\lambda_2, \lambda_3) \geqslant \lambda_1$$

又 $$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{t(3+t^4)}{2(1+t^4)} \Rightarrow A_3(t) = t(3+t^4) - 2(1+t^4) = (t-1)^2(t^3-t-2)$$

因此,当

$$t^3 \geqslant t+2 \Rightarrow \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^3 \geqslant \frac{q_1}{p_1} + 2 \Rightarrow \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3}{4}} \geqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{4}} + 2 \Rightarrow \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_3 \geqslant \lambda_2 \\ \lambda_3, \lambda_2 \geqslant \lambda_1\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_3 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_1 \Rightarrow \frac{p+3q}{4\sqrt[4]{pq^3}} \geqslant \frac{A_4}{G_4} \geqslant \left(\frac{p+q}{2\sqrt{pq}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $$t^3 \leqslant t+2 \Rightarrow 1 \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{4}} + 2 \Rightarrow \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \leqslant 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda_3 \leqslant \lambda_2 \\ \lambda_3, \lambda_2 \geqslant \lambda_1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \lambda_1 \geqslant \frac{A_4}{G_4} \Rightarrow \frac{2p+2q}{4\sqrt[4]{p^2q^2}} = \frac{p+q}{2\sqrt{pq}} \geqslant \frac{A_4}{G_4} \geqslant \left(\frac{p+q}{2\sqrt{pq}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

即结论 14 得证.

可见,通过对上述两个结论的证明,4 元正数比 3 元正数的情况要复杂,也更难.

(5) 但是,对于 $n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 个正元数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,我们还是有如下步骤.

结论 15 设 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n (2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 中有 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个取 p, $n-k$ 个取 $q(0 < p \leqslant q)$ 时,构成的算术平均为 $A_n^{(k)}$,几何平均为 $G_n^{(k)}$,则有

$$A_n^{(1)} - G_n^{(1)} \geqslant A_n^{(n-1)} - G_n^{(n-1)} \tag{C$_7$}$$

$$A_n^{(1)}/G_n^{(1)} \leqslant A_n^{(n-1)}/G_n^{(n-1)} \tag{C$_8$}$$

显然,当取 $n=3$ 时,式(C_7)化为

$$A_3^{(1)} - G_3^{(1)} \geqslant A_3^{(2)} - G_3^{(2)} \geqslant A_3 - G_3$$

这取为式(C_3).

式(C_8)化为

$$A_3^{(2)}/G_3^{(2)} \geqslant A_3^{(1)}/G_3^{(1)} \geqslant A_3/G_3$$

这即为式(C_4).

因此,式(C_7)为式(C_3)的推广,式(C_8)为式(C_4)的推广.

证明 (1) 设

$$(p, q) = (p_1^n, q_1^n), q_1 \geqslant p_1 > 0$$
$$f_n^{(k)} = n(A_n^{(k)} - G_n^{(k)})$$

则

$$\begin{aligned} f_n^{(1)} - f_n^{(n-1)} = & [p_1^n + (n-1)q_1^n - np_1q_1^{n-1}] - [(n-1)p_1^n + q_1^n - np_1^{n-1}q_1] = \\ & (n-2)q_1^n - np_1q_1^{n-1} + np_1^{n-1}q_1 - (n-2)p_1^n = \\ & F_n(q_1) \end{aligned} \tag{⑥}$$

由于 $F_n(p_1) = 0 \Rightarrow (q_1 - p_1) \mid F_n(q_1)$,应用综合除法:

1	$n-2$	$-n$	0	0	……	0	n	$-(n-2)$
		$n-2$	-2	-2	……	-2	-2	$(n-2)$
1	$n-2$	-2	-2	-2	……	-2	$n-2$	0
		$n-2$	$n-4$	$n-6$	……	$-(n-4)$	$-(n-2)$	
	$n-2$	$n-4$	$n-6$	$n-8$	……	$-(n-2)$	0	

求得

$$f_n^{(1)}-f_n^{(n-1)}=F_n^{(q_1)}=(q_1-p_1)^2\varphi_n(n-1) \quad ⑦$$

其中

$$\varphi_n(n-1)=(n-2)q_1^{n-2}+(n-4)q_1^{n-3}p_1+(n-6)q_1^{n-4}p_1+\cdots-(n-4)q_1p_1^{n-3}-(n-2)p_1^{n-2} \quad ⑧$$

当 n 为偶数时

$$\varphi_n(n-1)=(n-2)(q_1^{n-2}-p_1^{n-2})+(n-4)q_1p_1\cdot(q_1^{n-4}-p_1^{n-4})+\cdots+2(q_1p_1)^{\frac{n-4}{2}}(q_1^2-p_1^2)\geqslant 0$$

当 n 为奇数时

$$\varphi_n(n-1)=(n-2)(q_1^{n-2}-p_1^{n-2})+(n-4)q_1p_1\cdot(q_1^{n-4}-p_1^{n-4})+\cdots+(q_1p_1)^{\frac{n-3}{2}}(q_1-p_1)\geqslant 0$$

因此总有

$$\varphi_n(n-1)\geqslant 0\Rightarrow f_n(1)-f_n(n-1)\geqslant 0\Rightarrow A_n(1)-G_n(1)\geqslant A_n(n-1)-G_n(n-1)$$

等号成立仅当 $a_i=p=q(1\leqslant i\leqslant n)$.

(2) 仍记 $\lambda_n(k)=A_n^{(k)}/G_n^{(k)}$, $t=\dfrac{q_1}{p_1}\geqslant 1$,于是

$$\frac{\lambda_n(1)}{\lambda_n(n-1)}=\left(\frac{p_1^n+(n-1)q_1^n}{np_1q_1^{n-1}}\right)\left(\frac{np_1^{n-1}q_1}{(n-1)p_1^n+q_1^n}\right)=\frac{1+(n-1)t^n}{t^{n-2}(n-1+t^n)} \quad ⑨$$

设

$$\begin{aligned}h_n(t)&=t^{n-2}(n-1+t^n)-[1+(n-1)t^n]=\\&t^{2n-2}-(n-1)t^n+(n-1)t^{n-2}-1=\\&[(t^2)^{n-2}-1]-(n-1)t^{n-2}(t^2-1)=\\&(t^2-1)\beta_n(t)\end{aligned} \quad ⑩$$

其中 $$\beta_n(t)=[t^{2(n-2)}+t^{2(n-3)}+\cdots+t^2+1]-(n-1)t^{n-2}$$

注意 $$\begin{aligned}s&=2(n-2)+2(n-3)+2+1=\\&(n-1)(n-2)+1>(n-2)(n-1)\Rightarrow\\&\beta_n(t)\geqslant(n-1)[t^{2(n-2)}\cdot t^{2(n-3)}\cdot\cdots\cdot t^2\cdot 1]^{\frac{1}{n-1}}-\end{aligned}$$

$$(n-1)t^{n-2}=(n-1)t^{s/(n-1)}-(n-1)t^{n-2}\geqslant$$
$$(n-1)t^{n-2}-(n-1)t^{n-2}=0\Rightarrow$$
$$h_n(t)=(t^2-1)\beta_n(t)\geqslant 0\Rightarrow$$
$$\lambda_n^{(1)}/\lambda_n^{(n-1)}\leqslant 1\Rightarrow\lambda_n^{(1)}\leqslant\lambda_n^{(n-1)}\Rightarrow$$
$$A_n^{(1)}/G_n^{(1)}\leqslant A_n^{(n-1)}/G_n^{(n-1)}$$

等号成立仅当 $a_i=p=q(1\leqslant i\leqslant n)$.

至今,我们尚未具体地求出 A_n-G_n 与$A_n/G_n(4<n\in\mathbf{N})$ 的最大值,希望大家再接再厉,继续前行,莫畏崎岖曲折,莫怕万水千山.

9 漂亮证明

现在,我们已经知道了加权不等式是平均值不等式的推广之一,但许多数奥选手对于它的证明却不够了解.在本文的最后一节,我们介绍它的几种证法.

加权不等式 设 $a_i>0,0<p_i<1(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\tag{A}$$

如果设 $q_i>0,S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i,p_i=q_i/S_n$,则明显有 $p_i\in(0,1),\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$,这样,式(A)等价于

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i}{S_n}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{q_i}\right)^{\frac{1}{S_n}}\tag{A'}$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证法 1 (1) 当 $q_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$ 时,$S_n\in\mathbf{N},q_ia_i$ 表示q_i 个a_i,应用平均值不等式知

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i}{S_n}=\frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{n}\overbrace{(a_i+a_i+\cdots+a_i)}^{q_i\text{个}a_i}\geqslant$$
$$\left[\prod_{i=1}^{n}\underbrace{(a_i\cdot a_i\cdot\cdots\cdot a_i)}_{q_i\text{个}a_i}\right]^{\frac{1}{S_n}}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{q_i}\right)^{\frac{1}{S_n}}$$

式(A') 成立,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

(2) 当 $q_i\in\mathbf{Q}^+(1\leqslant i\leqslant n)$ 时,令 $q_i=\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$,其中 $\lambda_i,\mu_i\in\mathbf{N}$,且$(\lambda_i,\mu_i)=1(1\leqslant i\leqslant n)$,式(A') 化为

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\lambda_i}{\mu_i}}\right)^{1/\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}\Leftrightarrow\tag{①}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{t_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i}} \quad ②$$

其中 $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n, t_i = \frac{\lambda_i\mu}{\mu_i} \in \mathbf{N}(1 \leqslant i \leqslant n)$,自然有 $\sum_{i=1}^{n} t_i \in \mathbf{N}$,由(1)知,式 ② 成立,从而式 ① 成立,因此式(A′)成立.

(3) 当 $q_i \in \mathbf{R}^+ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 时,根据实数逼近有理数的原理

$$\lim_{m\to+\infty} q_i^{(m)} = q'_i \in \mathbf{Q}^+$$

知,式(A′)仍然成立.

综合上述知,对任意 $a_i > 0, q_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n)$ 式(A′)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

证法 2 设关于 $x \in \mathbf{R}^+$ 的函数为

$$f(x) = \ln x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1/x \\ f''(x) = -1/x^2 < 0 \end{cases}$$

综述

因此 $f(x)$ 为凹函数,应用琴生不等式有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \Rightarrow$$

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{令 } x_i = a_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n) \end{array}\right\} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

即式(A)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

证法 3 (1) 当 $n = 1$ 时,式(A′)显然成立.

当 $n = 2$ 时,式(A′)化为

$$\frac{q_1 a_1 + q_2 a_2}{q_1 + q_2} \geqslant (a_1^{q_1} a_2^{q_2})^{\frac{1}{q_1+q_2}} \quad ③$$

如果 $q_1, q_2 \in \mathbf{N} \Rightarrow q_1 + q_2 \in \mathbf{N}$,应用平均值不等式知

$$q_1 a_1 + q_2 a_2 = \overbrace{(a_1 + \cdots + a_1)}^{q_1 \uparrow a_1} + \overbrace{(a_2 + \cdots + a_2)}^{q_2 \uparrow a_2} \geqslant$$

$$(q_1 + q_2)[\underbrace{(a_1 \cdots a_1)}_{q_1 \uparrow a_1} \underbrace{(a_2 \cdots a_2)}_{q_2 \uparrow a_2}]^{\frac{1}{q_1+q_2}} =$$

$$(q_1 + q_2)(a_1^{q_1} a_2^{q_2})^{\frac{1}{q_1+q_2}}$$

此时式 ③ 成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2$.

如果 $q_1,q_2\in\mathbf{Q}^+$,设 $q_1=\dfrac{\lambda_1}{\mu_1},q_2=\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$,且$(\lambda_i,\mu_i)=1$,其中 $\lambda_i,\mu_i\in\mathbf{N}(i=1,2)$,代入式 ③ 得

$$\frac{\lambda_1\mu_2a_1+\lambda_2\mu_1a_2}{\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1}\geqslant(a_1^{\lambda_1\mu_2}\cdot a_2^{\lambda_2\mu_1})^{\frac{1}{\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1}} \qquad ④$$

由于 $\lambda_1\mu_2,\lambda_2\mu_1$ 也为正整数,由前述结论知,式 ④ 成立.等号成立仅当 $a_1=a_2$.

如果 $q_1,q_2\in\mathbf{R}^+$,应用实数逼近有理数的原理知,式 ③ 仍然成立.

(2) 假设当 $n=k+1(k\in\mathbf{N})$ 时,式(A′) 成立,并记 $e=\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i^{q_i}\right)^{1/S_k}$,那么有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}q_ia_i+q_{k+1}e\geqslant S_{k+1}\left[\left(\prod_{i=1}^{k}a_i^{q_i}\right)e^{q_{k+1}}\right]^{\frac{1}{S_{k+1}}}\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}q_ia_i+q_{k+1}e\geqslant S_{k+1}(e^{S_k}\cdot e^{q_{k+1}})^{\frac{1}{S_{k+1}}}=\\ S_{k+1}e^{\left(\frac{S_k+q_{k+1}}{S_{k+1}}\right)}=S_{k+1}e\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}q_ia_i\geqslant(S_{k+1}-q_{k+1})e=\\ S_ke=S_k\left(\prod_{i=1}^{k}a_i^{q_i}\right)^{1/S_k}\end{aligned} \qquad ⑤$$

这表明当 $n=k$ 时式(A′) 也成立,等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k=e$.

综合上述知,对任意 $n\in\mathbf{N}$,式(A′) 成立.等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证法 4 (1) 易知当 $n=1$ 时,式(A) 成立.当 $n=2$ 时,式(A) 即为

$$p_1a_1+p_2a_2\geqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2} \qquad ⑥$$

设 $a_2=x\in\mathbf{R}^+$,上式化为

$$p_1a_1+p_2x\geqslant a_1^{p_1}x^{p_2} \qquad ⑦$$

并设关于 x 的函数为

$$f(x)=p_1a_1+p_2x-a_1^{p_1}x^{p_2}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f'(x)=p_2-p_2a_1^{p_1}x^{p_1-1}\\ f''(x)=p_2(1-p_2)a_1^{p_1}x^{p_2-2}>0\end{cases}$$

因此 $f(x)$ 有最小值 $f(x_0)$,其中 x_0 为驻点,它是导函数方程 $f'(x)=0$ 的正根,即

$$\begin{aligned}p_2-p_2a_1^{p_1}x_0^{p_2-1}=0\Leftrightarrow1-a_1^{p_1}x_0^{-p_1}=0\Leftrightarrow1-\left(\frac{a_1}{x_0}\right)^{p_1}=0\Leftrightarrow x_0=a_1\Rightarrow\\ f(x)\geqslant f(x)_{\min}=f(x_0)=f(a_1)=p_1a_1+p_2a_1-a_1^{p_1}\cdot p_1^{p_2}=\\ (p_1+p_2)a_1-a_1^{p_1+p_2}=a_1-a_1=0\Rightarrow\\ p_1a_1+p_2x\geqslant a_1^{p_1}x^{p_2}\Rightarrow p_1a_1+p_2a_2\geqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2}\end{aligned}$$

即当 $n=2$ 时式 ⑥ 成立,等号成立仅当 $a_1=a_2$.

(2) 以下过程同证法 3.

证法 5 (1) 当 $n=1,2$ 时,由前面的证法知,式(A) 成立:那么有

$$\frac{p_ka_k+p_{k+1}a_{k+1}}{p_k+p_{k+1}}\geqslant(a_k^{p_k}a_{k+1}^{p_{k+1}})^{\frac{1}{p_k+p_{k+1}}} \qquad ⑧$$

(2) 假设当 $n=k\in\mathbf{N}$ 时,式(A) 成立,那么当 $n=k+1$ 时,注意到

$$\sum_{i=1}^{k-1}p_i+(p_k+p_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}p_i=1$$

有

$$\sum_{i=1}^{k+1}p_ia_i=\sum_{i=1}^{k-1}p_ia_i+(p_k+p_{k+1})\left(\frac{p_k}{p_k+p_{k+1}}a_k+\frac{p_{k+1}}{p_k+p_{k+1}}a_{k+1}\right)\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}p_ia_i+(p_k+p_{k+1})\cdot(a_k^{p_k/p_k+p_{k+1}}a_{k+1}^{p_{k+1}/(p_k+p_{k+1})})=$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}p_ia_i+(p_k+p_{k+1})(a_k^{p_k}a_{k+1}^{p_{k+1}})^{\frac{1}{p_k+p_{k+1}}}\geqslant$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1}a_i^{p_i}\right)\cdot a_k^{p_k}a_{k+1}^{p_{k+1}}=\prod_{i=1}^{k+1}a_i^{p_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{k-1}p_ia_i\geqslant\prod_{i=1}^{k+1}a_i^{p_i}$$

即当 $n=k+1$ 时式(A) 也成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=(a_k^{p_k}a_{k+1}^{p_{k+1}})^{1/(p_k+p_{k+1})}\\ a_k=a_{k+1}\end{cases}\Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$$

综合上述(1) 和(2) 知,对任意 $n\in\mathbf{N}$,式(A) 成立.等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

综

述

证法 6 (1) 易知当 $n=1$ 时,式(A′) 成立;

(2) 假设当 $n=k$ 时,式(A′) 成立,即

$$\sum_{i=1}^{k}q_ia_i\geqslant S_k\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^{q_i}\right)^{1/S_k} \quad ⑨$$

等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k$.

那么当 $n=k+1$ 时,注意到

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}q_i\Rightarrow S_{k+1}=S_k+q_{k+1}$$

并设 $a_{k+1}=t>0$ 及 $e=\left(\prod_{i=1}^{k}a_i^{q_i}\right)^{1/S_k}$,且关于 t 的函数为

$$f(t)=\sum_{i=1}^{k}q_ia_i+q_{k+1}t-S_{k+1}(e^{S_k}t^{q_{k+1}})^{\frac{1}{S_{k+1}}}\Rightarrow$$

$$f'(t)=q_{k+1}-q_{k+1}(e^{\frac{S_k}{S_{k+1}}})t^{(\frac{q_{k+1}}{S_{k+1}}-1)}\Rightarrow$$

$$f''(t)=q_{k+1}\left(1-\frac{q_{k+1}}{S_{k+1}}\right)e^{\frac{S_{k+1}}{S_{k+1}}}t^{(\frac{q_{k+1}}{S_{k+1}}-2)}>0$$

因此 $f(t)$ 有最小值 $f(t_0)$,其中 t_0 为导函数方程 $f'(t)=0$ 的正根,即

$$q_{k+1}-q_{k+1}(e^{\frac{S_k}{S_{k+1}}})t_0^{(\frac{q_{k+1}}{S_{k+1}}-1)}=0\Rightarrow1-\left(\frac{e}{t_0}\right)^{S_k/S_{k+1}}=0\Rightarrow t_0=e\Rightarrow$$

$$f(t)\geqslant f(t)_{\min}=f(t_0)=f(e)=$$

$$\sum_{i=1}^{k}q_ia_i+q_{k+1}e-S_{k+1}(e^{S_k}\cdot e^{q_{k+1}})^{\frac{1}{S_{k+1}}}=$$

$$\sum_{i=1}^{k} q_i a_i + q_{k+1} e - S_{k+1} e^{(S_k + q_{k+1})/S_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} q_i a_i + (q_k - S_{k+1}) e =$$

$$\sum_{i=1}^{k} q_i a_i - S_k e \geqslant 0 \Rightarrow f(t) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} q_i a_i \geqslant S_{k+1} \left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i^{q_i} \right)^{1/S_{k+1}}$$

(仔细思考注意 e,及 $t = a_{k+1}$)

即当 $n = k + 1$ 时,式(A′)也成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1} = e$.

综合上述(1)和(2)知,对任意 $n \in \mathbf{N}$,式(A′)成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

10 绽放新花

众所周知,简洁美妙、应用广泛的柯西不等式为:

设 $x_i, y_i \in \mathbf{R}(1 \leqslant i \leqslant n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,那么有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \tag{B}$$

等号成立仅当$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

如果 $x_i, y_i \in \mathbf{R}^+ (1 \leqslant i \leqslant n)$,并令

$$(a_i, b_i) = (x_i^2, y_i^2)(1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i^{1/2} b_i^{1/2})\right] \tag{C}$$

显然,式(C)与式(B)等价,它是柯西不等式的变种,只涉及两组正数$\{a_n\}$与$\{b_n\}$,如果把它推广到多组正数中去,就是脍炙人口的绝妙不等式:

赫尔特不等式 设 $a_{ij} > 0, \theta_j \in (0,1)(1 \leqslant i \leqslant n; 2 \leqslant n \in \mathbf{N}; 1 \leqslant j \leqslant m, 2 \leqslant m \in \mathbf{N})$,且$\sum_{j=1}^{m} \theta_j = 1$,则有

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{\theta_j} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{\theta_j} \tag{D}$$

将式(D)放散,得到更直观的形式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{\theta_1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\right)^{\theta_2} \cdot \cdots \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}\right)^{\theta_m} \geqslant \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}^{\theta_1} a_{i2}^{\theta_2} \cdots a_{im}^{\theta_m}) \tag{D′}$$

式(D′)奇异、美妙、壮观,仿佛"孔雀开屏",更像"雄鹰展翅",在向我们挑战示威.显然,欲解决它,不能强攻,只能智取.为此,我们请来"神通广大"的加权不等式"拔刀相助".

证明

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}^{\theta_1}a_{i2}^{\theta_2}\cdots a_{im}^{\theta_m})}{(\sum_{i=1}^{n}a_{i1})^{\theta_1}\cdot(\sum_{i=1}^{n}a_{i2})^{\theta_2}\cdot\cdots\cdot(\sum_{i=1}^{n}a_{im})^{\theta_m}}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i1}}\right)^{\theta_1}\cdot\left(\frac{a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i2}}\right)^{\theta_2}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{a_{im}}{\sum_{i=1}^{n}a_{im}}\right)^{\theta_m}\right]\text{(应用加权不等式)}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\theta_1\left(\frac{a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i1}}\right)+\theta_2\left(\frac{a_{i2}}{\sum_{i=2}^{n}a_{i2}}\right)+\cdots+\theta_m\left(\frac{a_{im}}{\sum_{i=1}^{n}a_{im}}\right)\right]=$$

$$\theta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i1}}\right)+\theta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i2}}\right)+\cdots+\theta_m\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{im}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i2}}\right)=$$

$$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m=1\Rightarrow\prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij})^{\theta_j}\geqslant\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\theta_j})$$

综述

等号成立仅当

$$\frac{a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i1}}=\frac{a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i2}}=\cdots=\frac{a_{im}}{\sum_{i=1}^{n}a_{im}},i=1,2,\cdots,n$$

可见,加权不等式在上述证明中“功不可灭”,立下了“汗马功劳”.

显然,当 $m=2$ 时,$\theta_1=\theta_2=\frac{1}{2}$,式(D′)等价于式(C′),因此,赫尔特不等式是柯西不等式的推广.

赫尔特不等式不仅应用广泛,而且它的一个特例权方和不等式,应用同样广泛.

权方和不等式 设 $a_i,b_i>0(1\leqslant i\leqslant n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,指数 θ 满足 $\theta(1+\theta)>0$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{1+\theta}}{b_i^{\theta}}\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{\theta+1}}{(\sum_{i=1}^{n}b_i)^{\theta}}\tag{E}$$

特别地,当 $\theta=1$ 时,上式化为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i}\tag{E′}$$

应用柯西不等式式(E′)易证.

证明 (1)当 $\theta>0$ 时,由于 $\frac{1}{1+\theta},\frac{\theta}{1+\theta}\in(0,1)$ 且 $\frac{1}{1+\theta}+\frac{\theta}{1+\theta}=1$.应用赫尔特不等式,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{1+\theta}}{b_i^{\theta}}\right)^{\frac{1}{1+\theta}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{\theta}{1+\theta}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i^{1+\theta}}{b_i^{\theta}}\right)^{\frac{1}{1+\theta}}\cdot b_i^{\frac{\theta}{1+\theta}}\right]=\sum_{i=1}^{n}a_i\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{1+\theta}}{b_i^{\theta}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\theta}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{1+\theta}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{1+\theta}}{b_i^{\theta}}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{1+\theta}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\theta}}$$

等号成立仅当

$$\frac{a_1^{1+\theta}}{b_1^{\theta}}:b_1=\frac{a_2^{1+\theta}}{b_2^{\theta}}:b_2=\cdots=\frac{a_n^{1+\theta}}{b_n^{\theta}}:b_n\Rightarrow\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{1+\theta}=$$

$$\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{1+\theta}=\cdots=\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{1+\theta}\Rightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

(2) 由于不等式 $\theta(1+\theta)>0$ 的解为 $\theta>0$ 或 $\theta<-1$，因此当 $\theta<-1$ 时，令 $1+\theta=-\beta(\beta>0)$，代入式(E) 并应用刚才的结论有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{1+\theta}}{b_i^{\theta}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{-\beta}}{b_i^{-(1+\beta)}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{1+\beta}}{a_i^{\beta}}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{1+\beta}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\beta}}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-\theta}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{-(1+\theta)}}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{1+\theta}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\theta}}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{1+\theta}}{b_i^{\theta}}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{1+\theta}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\theta}}$$

即此时式(E) 仍然成立.

综合上述(1) 和(2) 知，式(E) 成立.

顺便指出，当 $p_j>0(1\leqslant j\leqslant m)$ 时，赫尔特不等式可加权推广为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}p_ja_{ij}\right)^{\alpha_i}\geqslant\sum_{j=1}^{m}\left(p_j\prod_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_i}\right)\tag{F}$$

且(D)，(F) 两式等号成立均可表为

$$\frac{a_{1l}}{a_{1s}}=\frac{a_{2l}}{a_{2s}}=\cdots=\frac{a_{nl}}{a_{ns}},l,s=1,2,\cdots,m$$

由于赫尔特不等式"英俊潇洒，风度翩翩"，当然不会"孤单寂寞，独守空房"，从结构上讲，它有一个"如花似玉，貌若天仙" 的配对式：

闵可夫斯基(Minkowski) 不等式 设 $\alpha>1,\lambda_i>0,a_{ij}>0(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N},1\leqslant j\leqslant m\in\mathbf{N})$，则

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_{ij}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\tag{G}$$

等号成立仅当

$$x_{11}:x_{21}:\cdots:x_{n1}=x_{12}:x_{22}:\cdots:x_{n2}=\cdots=x_{1m}:x_{2m}$$

特别，当取特例 $m=2$ 时，便是我们常用的

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{G'}$$

等号成立仅当
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

如取 $\alpha = 2$,式(G′)化为

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

这正好是我们所熟知的柯西不等式.

结合式(G′)与数学归纳法,即可证明式(G).

我们知道,在解证关于不等式的题目时,不仅要应用平均值不等式、柯西不等式、排序不等式、赫尔特不等式、权方和不等式,有时还要应用:

切比雪夫不等式　如果正序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}(n \in \mathbf{N})$同序,则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right) \tag{H}$$

如果$\{x_n\}$与$\{y_n\}$反序,则式(H)反序.

至于切比雪夫不等式(H),许多数奥参与者都熟知,但关于式(H)的加权推广,知道的人就不多了.

推广 1　设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$均为正数序列 $p_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,则

(1)$\{x_n\}$与$\{y_n\}$同序,且$\sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 1$时

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i\right) \tag{I}$$

(2)当$\{x_n\}$与$\{y_n\}$反序,且$\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant 1$时

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i\right) \tag{I'}$$

(I),(I′)两式等号成立仅当$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$且 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 或 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.

下面我们用 3 种方法证明推广 1,希望大家总结其证法技巧.

证法 1　注意到

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

及
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji}$$

有

$$R=\sum_{i=1}^{n}p_ix_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_iy_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_iy_i\right)-$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_iy_i\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_jp_ix_iy_i-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_jx_jp_iy_i=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(p_jp_ix_ix_j-p_jp_ix_jy_i)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_ip_jy_i(x_i-x_j) \quad ①$$

同理可得

$$R=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_ip_jy_j(x_j-x_i) \quad ②$$

故

$$2R=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_ip_j(x_i-x_j)(y_i-y_j) \quad ③$$

(1) 在 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 同序,则 (x_i-x_j) 与 (y_i-y_j) 同号,于是

$$(x_i-x_j)(y_i-y_j)\geqslant 0\Rightarrow R\geqslant 0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}p_ix_iy_i\geqslant\left(\sum_{j=1}^{n}p_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_iy_i\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{n}p_i\right)\geqslant$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}p_iy_i\right)$$

(2) 当 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 反序时, (x_i-x_j) 与 (y_i-y_j) 异号,并注意此时 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\geqslant 1$,有

$$(x_i-x_j)(y_i-y_j)\leqslant 0\Rightarrow R\leqslant 0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}p_ix_iy_i\leqslant$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_iy_i\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_iy_i\right)$$

由(1),(2)知,推广1成立,等号成立仅当 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$ 且 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 或 $y_1=y_2=\cdots=y_n$.

证法2 (1) 当 $n=2$ 时,由于

$$(p_1x_1+p_2x_2)(p_1y_1+p_2y_2)=p_1^2x_1y_1+p_2^2x_2y_2+p_1p_2(x_1y_2+x_2y_1)=$$
$$(p_1+p_2)(p_1x_1y_1+p_2x_2y_2)-p_1p_2(x_1-x_2)(y_1-y_2) \quad ④$$

当 $\{x_1,x_2\}$ 与 $\{y_1,y_2\}$ 同序时, (x_1-x_2) 与 (y_1-y_2) 同号,由④得

$$(p_1x_1+p_2x_2)(p_1y_1+p_2y_2)\leqslant(p_1+p_2)(p_1x_1y_1+p_2x_2y_2)\leqslant p_1x_1y_1+p_2x_2y_2$$

(2) 假设当 $n=k$ 时,式①成立,那么当 $n=k+1$ 时,注意到 $\{x_{k+1}\}$ 与 $\{y_{k+1}\}$ 同序,且此时

$$\sum_{i=1}^{k+1}p_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{1-p_{k+1}}\leqslant 1$$

及
$$(1-p_{k+1})+p_{k+1}=1$$
由假设有
$$\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_iy_i=\sum_{i=1}^{k}p_ix_iy_i+p_{k+1}x_{k+1}y_{k+1}=(1-p_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{p_i}{1-p_{k+1}}x_iy_i\right)+p_{k+1}x_{k+1}y_{k+1}\geqslant$$
$$(1-p_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{p_ix_i}{1-p_{k+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{p_iy_i}{1-p_{k+1}}\right)+p_{k+1}x_{k+1}y_{k+1} \quad ⑤$$
由于$\left\{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{p_ix_i}{1-p_{k+1}}\right),x_{k+1}\right\}$与$\left\{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{p_iy_i}{1-p_{k+1}}\right),y_{k+1}^{(3)}\right\}$仍然同序，则由式⑤有
$$\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_iy_i\geqslant\left[(1-p_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{p_ix_i}{1-p_{k+1}}\right)+p_{k+1}x_{k+1}\right]\left[(1-p_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{p_iy_i}{1-p_{k+1}}\right)+p_{k+1}y_{k+1}\right]=$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k}p_ix_i+p_{k+1}x_{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}p_iy_i+p_{k+1}y_{k+1}\right)=$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}p_iy_i\right)$$
这表明，当 $n=k+1$ 时式(I)仍然成立.

综合上述，对任意 $n\in\mathbf{N}$，式(I)成立.

同理可证式(I′)成立.

证法 3 (1) 由证法 2 知，当 $n=1,2$ 时，推广 1 成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，式(I)成立，那么当 $n=k+1$ 时，注意到当$\{x_{k+1}\}$与$\{y_{k+1}\}$同序时，$\{x_k,x_{k+1}\}$与$\{y_k,y_{k+1}\}$同序，令
$$\lambda=\frac{p_k}{p_k+p_{k+1}},\mu=\frac{p_{k+1}}{p_k+p_{k+1}}$$
则 $\lambda,\mu>0$，且 $\lambda+\mu=1$，再认识到
$$\sum_{i=1}^{k-1}p_i+(p_k+p_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}p_i\leqslant 1$$
有
$$\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_iy_i=\sum_{i=1}^{k-1}p_ix_iy_i+p_kx_ky_k+p_{k+1}x_{k+1}y_{k+1}=$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}p_ix_iy_i+(p_k+p_{k+1})(\lambda x_ky_k+\mu x_{k+1}y_{k+1})\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}p_ix_iy_i+(p_k+p_{k+1})(\lambda x_k+\mu x_{k+1})(\lambda y_k+\mu y_{k+1})\geqslant$$
$$\left[\sum_{i=1}^{k-1}p_ix_i+(p_k+p_{k+1})(\lambda x_k+\mu x_{k+1})\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{k-1}p_iy_i+(p_k+p_{k+1})(\lambda y_k+\mu y_{k+1})\right]=$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k-1}p_ix_i+p_kx_k+p_{k+1}x_{k+1}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k-1}p_iy_i+p_ky_k+p_{k+1}y_{k+1}\right)=$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}p_iy_i\right)$$

以上利用了$\{x_1,\cdots,x_{k-1},\lambda x_k+\mu x_{k+1}\}$与$\{y_1,\cdots,y_{k-1},\lambda y_k+\mu y_{k+1}\}$同序的原理,即当$n=k+1$时式(I)也成立.

综合以上(1)和(2)知,对任意$n\in\mathbf{N}$,式(I)成立.同理可证式(I′).故推广1成立.

刚才我们一口气用3种方法证明推广1,其后两种方法是数学归纳法,应用此两种技巧证明一类带权系数的不等式是比较奏效的.但值得注意的是,在证明时,不能只验证了当$n=1$时就急于求成地开始归纳假设,这样不严密,而必须要证完当$n=2$时命题成立,才会天衣无缝,无懈可击.

推广1仅仅是从权系数方面推广了切比雪夫不等式,其实,当$\{x_n\}$与$\{y_n\}$同序时,我们还可以从权系数、元数组数、指数三个方面将切比雪夫不等式综合推广为:

推广2(综合推广) 设元数$2\leqslant n\in\mathbf{N}$,组数$2\leqslant m\in\mathbf{N}$,指数$\theta_j\geqslant 1$,系数$p_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$,$\{x_{m1}\},\{x_{m2}\},\cdots\cdots,\{x_{mn}\}$均为正数同序列,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\prod_{j=1}^{m}x_{ij}^{\theta_j}\right)\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_{ij}\right)^{\theta_j}\tag{J}$$

等号成立仅当$x_{1j}=x_{2j}=\cdots=x_{nj}(j=1,2,\cdots,m)$.

当$\theta_j=1(1\leqslant j\leqslant m)$时,式(J)化为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\prod_{j=1}^{m}x_{ij}\right)\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_{ij}\right)\tag{K}$$

再取$p_i=\dfrac{1}{n}(1\leqslant i\leqslant n)$,得到

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}x_{ij}}{n}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}}{n}\right)\tag{L}$$

这便是20世纪90年代我国的张运筹教授运用高等数学中的高阶矩阵建立的成果,发表在《湖南数学通讯》刊物上.

显然,当$m=2$时,式(L)等价于式(H).因此,式(L)"官运亨通,连升四级"才登上高峰式(J).可见,欲证明式(J),得克服重重困难,但是,我们"智勇双全",谁也挡不住,我们的脚步!

证明 我们先证明式(K).

设$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$均同号,且记$\gamma=\sum\limits_{j=1}^{m}\gamma_j$,$a_i>0(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$.

(1) 当$\gamma_j>0\Rightarrow\gamma>\gamma_j>0(1\leqslant j\leqslant m)$,应用幂平均不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\right)^{1/\gamma_j}\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\right)^{\gamma_j/\gamma}\geqslant\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\Rightarrow$$

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\right)^{\gamma_j/\gamma}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma}\right)^{(\sum_{j=1}^{m}\gamma_j)/\gamma}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\gamma_j}\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\gamma} \geqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\gamma_j} \right) \tag{⑥}$$

(2) 当 $\gamma_j < 0 \Rightarrow \gamma < \gamma_j < 0 (1 \leqslant j \leqslant m)$ 仍然应用加权幂平均不等式,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\gamma_j} \right)^{1/\gamma_j} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\gamma} \right)^{\gamma_j/\gamma} \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\gamma_j}$$

同样可得式 ⑥.

现在,我们令 $a_i^{\gamma_j} = x_{ij}$,即 $a_i^{\gamma_1} = x_{i1}, a_i^{\gamma_2} = x_{i2}, \cdots, a_i^{\gamma_m} = x_{im} (i = 1,2,\cdots,n)$,由于 γ_1, $\gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 均同号,则 $\{x_{m1}\}, \{x_{m2}\}, \cdots, \{x_{mn}\}$ 均同序,且

$$\prod_{j=1}^{m} x_{ij} = \prod_{j=1}^{m} a_i^{\gamma_j} = a_i^{\sum_{j=1}^{m} \gamma_j} = a_i^{\gamma}$$

代入式 ⑥ 即得

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i \prod_{j=1}^{m} x_{ij} \right) \geqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \right)$$

这就是式(K).

最后,注意到 $\theta_j \geqslant 1 (1 \leqslant j \leqslant m)$,利用式(K) 和加权幂平均不等式,有

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i \prod_{j=1}^{m} x_{ij}^{\theta_j} \right) \geqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij}^{\theta_j} \right) \geqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \right)^{\theta_j}$$

等号成立仅当 $x_{1j} = x_{2j} = \cdots = x_{nj} (j = 1,2,\cdots,m)$.

上面,我们巧妙地应用加权幂平均不等式,简洁地证明了推广 2,使之显得通俗易懂,优美有趣.

从外观结构上看,式(J) 美如“余霞散成绮,澄江静如练”,如果将它放散接长,则壮如“楼观沧海日,门对折江潮”.此时此刻,我们的心情格外愉快,真想对着月光弹琴,对着山水吟诗,向着太阳歌唱.

11　美妙应用

我们在前面介绍的一系列优美的不等式,当他们看到我们在解题受挫时,个个都会“行侠仗义,拔刀相助”,决不会“隔岸观火,袖手旁观”.

例 1　设 p, q 为已知正常数,$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为变量,求 $(\sin \theta)^p \cdot (\cos \theta)^q$ 的最大值.

分析　记 $D(\theta) = (\sin \theta)^p \cdot (\cos \theta)^q$.联想到加权不等式,有

$$D(\theta) \leqslant \left(\frac{p\sin \theta + q\cos \theta}{p + q} \right)^{p+q} \tag{①}$$

再记 $S(\theta) = p\sin \theta + q\cos \theta$.

这就是我们能熟知的典型的三角式,可用多种方法求出最大值,特别是应用柯西不等式最简洁.

$$S(\theta) \leqslant \sqrt{(p^2 + q^2)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \Rightarrow S(\theta) \leqslant \sqrt{p^2 + q^2} \Rightarrow \tag{②}$$

$$D(\theta) \leqslant \left(\frac{S(\theta)}{p + q} \right)^{p+q} \leqslant \left(\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p + q} \right)^{p+q} \tag{③}$$

即我们求出了 $D(\theta)$ 的最大值是式 ③ 右边的量.

上述解答显得非常轻松简洁,但是,我们别高兴得太早,因为式 ① 等号成立的条件是

$$\sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

式 ② 等号成立的条件是

$$p : q = \sin\theta : \cos\theta \Rightarrow \tan\theta = p/q$$

因此式 ③ 等号成立的条件应该是 $\theta = \frac{\pi}{4}, p = q$,但题意中告诉我们的已知条件是 p, q 为已知正常数,不一定有 $p = q$,因此上述解答为错误的,其错误原因并非是错用加权不等式,而是没有巧妙应用加权不等式,其应用柯西不等式也是画蛇添足.

解法 1 记 $D(\theta) = (\sin\theta)^p \cdot (\cos\theta)^q$,应用加权不等式有

$$D^2(\theta) = (\sin^2\theta)^p \cdot (\cos^2\theta)^q = \frac{(q\sin^2\theta)^p \cdot (p\cos^2\theta)^q}{q^p \cdot p^q} \Rightarrow$$

$$q^p p^q D^2(\theta) = (q\sin^2\theta)^p \cdot (p\cos^2\theta)^q \leqslant \left[\frac{p(q\sin^2\theta) + q(p\cos^2\theta)}{p+q}\right]^{p+q} =$$

$$\left(\frac{pq}{p+q}\right)^{p+q} \Rightarrow D(\theta) \leqslant \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}} \quad ④$$

即所求的最大值为式 ④ 右边的量.等号成立仅当

$$q\sin^2\theta = p\cos^2\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

本题也可用微分法求解.

解法 2 设关于 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的函数为

$$f(\theta) = \ln[(\sin\theta)^p(\cos\theta)^q] = p\ln\sin\theta + q\ln\cos\theta$$

求导得

$$f'(\theta) = p\cot\theta - q\tan\theta = -q\left[(\tan\theta)^2 - \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2\right]\cot\theta \quad ⑤$$

解方程 $f'(\theta_0) = 0$,求驻点,得

$$(\tan\theta_0)^2 = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 \Rightarrow \theta_0 = \arctan\sqrt{\frac{p}{q}} \quad ⑥$$

显然,当 $\frac{\pi}{2} > \theta > \theta_0$ 时,$f'(\theta) < 0$;当 $0 < \theta < \theta_0$ 时,$f'(\theta) > 0$;因此 $f(\theta)$ 有最大值 $f(\theta_0)$,即

$$f(\theta) \leqslant f(\theta)_{\max} = f(\theta_0) = p\ln\sin\theta_0 + q\ln\cos\theta_0 = p\ln\left(\sqrt{\frac{p}{p+q}}\right) + q\ln\left(\sqrt{\frac{q}{p+q}}\right) =$$

$$\ln\left[\sqrt{\frac{p^p \cdot q^q}{(p+q)^{p+q}}}\right] \Rightarrow (\sin\theta)^p(\cos\theta)^q \leqslant \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}}$$

等号成立仅当 $\tan\theta=\sqrt{p/q}$.

上述的解法 2 告诉我们,对于几个变量相乘时,应设为自然对数函数的形式,在求导时才能简便易行.

例 2 设 θ 为实角,正数 x,y 满足

$$\frac{\sin^6\theta}{x^2}+\frac{\cos^6\theta}{y^2}=1 \tag{⑦}$$

求 $x+y$ 的最小值.

本题的已知条件特别而又复杂,须要巧思方可求解.

解法 1 巧妙配方得

$$1=\frac{\sin^6\theta}{x^2}+\frac{\cos^6\theta}{y^2}=\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{(y\sin^2\theta-x\cos^2\theta)^2}{xy(x+y)}\cdot\left(\frac{\sin^2\theta}{x}+\frac{\cos^2\theta}{y}+\frac{1}{x+y}\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{(x+y)^2}\Rightarrow(x+y)^2\geqslant 1\Rightarrow(x+y)_{\min}=1$$

$x+y$ 取到最小值 1 的条件是

$$\begin{cases}y\sin^2\theta-x\cos^2\theta=0\\ \dfrac{\sin^6\theta}{x^2}+\dfrac{\cos^6\theta}{y^2}=1\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(\sin^2\theta,\cos^2\theta)$$

综

述

解法 2 应用加权幂平均不等式,有

$$\frac{1}{x+y}=\frac{x\left(\dfrac{\sin^2\theta}{x}\right)^3+y\left(\dfrac{\cos^2\theta}{y}\right)^3}{x+y}\geqslant\left[\frac{x\left(\dfrac{\sin^2\theta}{x}\right)+y\left(\dfrac{\cos^2\theta}{y}\right)}{x+y}\right]^3=$$
$$\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{x+y}\right)^3=\frac{1}{(x+y)^3}\Rightarrow(x+y)^2\geqslant 1\Rightarrow x+y=1\Rightarrow$$
$$(x+y)_{\min}=1$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}\sin^2\theta/x=\cos^2\theta/y\\ \sin^6\theta/x^2+\cos^6\theta/y^2=1\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(\sin^2\theta,\cos^2\theta)$$

解法 3 应用赫尔特不等式,有

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}=(x+y)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{\sin^6\theta}{x^2}+\frac{\cos^6\theta}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}\geqslant x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sin^6\theta}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\cos^6\theta}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}=$$
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow x+y\geqslant 1\Rightarrow(x+y)^{\min}=1$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}x:y=\dfrac{\sin^6\theta}{x^2}:\dfrac{\cos^6\theta}{y^2}\\ \dfrac{\sin^6\theta}{x^2}+\dfrac{\cos^6\theta}{y^2}=1\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(\sin^2\theta,\cos^2\theta)$$

解法 4 注意到 $1+2=3$,应用权方和不等式,得

$$1=\frac{(\sin^2\theta)^3}{x^2}+\frac{(\cos^2\theta)^3}{y^2}\geqslant\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3}{(x+y)^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\Rightarrow$$

$$(x+y)^2\geqslant 1\Rightarrow x+y\geqslant 1\Rightarrow (x+y)_{\min}=1$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}\dfrac{\sin^2\theta}{x}=\dfrac{\cos^2\theta}{y}\\ \dfrac{\sin^6\theta}{x^2}+\dfrac{\cos^6\theta}{y^2}=1\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(\sin^2\theta,\cos^2\theta)$$

刚才我们一气呵成地用 4 种方法解答了本题,除解法 1 巧妙配方以外,在后面的 3 种解答中,如权幂平均不等式、赫尔特不等式、权方和不等式,它们“八仙过海,各显神通”.而且,只有解法 4 应用权方和不等式倍显简洁漂亮,并启发我们可将本题推广为:

推广 3 设 $\theta\in\mathbf{R},x,y\in\mathbf{R}^+$,且满足

$$\frac{(\sin\theta)^{2(1+k)}}{x^k}+\frac{(\cos\theta)^{2(1+k)}}{y^k}=\lambda^k>0$$

其中指数 $k(1+k)>0$,求 $S=x+y$ 的极值.

解 应用权方和不等式,有

$$\lambda^k=\frac{(\sin^2\theta)^{1+k}}{x^k}+\frac{(\cos^2\theta)^{1+k}}{y^k}\geqslant\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^{1+k}}{(x+y)^k}=\frac{1}{(x+y)^k}\Rightarrow(x+y)^k\geqslant\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k$$

显然,当 $k>0$ 时,$(x+y)_{\min}=\dfrac{1}{\lambda}$,当 $k<-1$ 时,$x+y\leqslant\dfrac{1}{\lambda}\Rightarrow(x+y)_{\max}=\dfrac{1}{\lambda}$.

相应地,还有

推广 4 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R},x,y,z\in\mathbf{R}^+$,指数 $k(1+k)>0$,且满足

$$\frac{(\sin^2\alpha)^{2(1+k)}}{x^k}+\frac{(\cos\alpha\sin\beta)^{2(1+k)}}{y^k}+\frac{(\cos\alpha\cos\beta)^{2(1+k)}}{z^k}=\lambda^k>0$$

求 $S=x+y+z$ 的极值.

提示 注意到

$$\sin^2\alpha+(\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta)^2=\sin^2\alpha+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

仿照推广 3 的解法有

$$\lambda^k\geqslant\frac{[\sin^2\alpha+(\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta)^2]^{1+k}}{(x+y+z)^k}=\frac{1}{(x+y+z)^k}\Rightarrow$$

$$(x+y+z)^k\geqslant\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k$$

而且,还可再将推广 4 进行推广.

例 3 设给定正数 $a,b>0,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,求 $S=a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}$ 的最大值.

分析 观察表达式 S 的结构特征,使我们联想到应用柯西不等式得

$$S\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\sqrt{\sqrt{2}(a^2+b^2)\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})}\leqslant$$

$$\sqrt{\sqrt{2}(a^2+b^2)} \Rightarrow S_{\max}=\sqrt{\sqrt{2}(a^2+b^2)}$$

显然,此时 S 达到最大值的条件是

$$\begin{cases} a/b=\sqrt{\sin\alpha/\cos\alpha} \\ \alpha=\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow a=b \text{ 且 } \alpha=\frac{\pi}{4}$$

但是,已知条件告诉我们;a,b 为给定正数,不一定有 $a=b$,因此不能用此种思路解答本题.看来,我们只得另觅新路了.

解 设参数 $\lambda>0$,配方有

$$S^2=(a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha})^2=(1+\lambda^2)(a^2\sin\alpha+\frac{b^2}{\lambda^2}\cos\alpha)-(a\lambda\sqrt{\sin\alpha}-\frac{b}{\lambda}\sqrt{\cos\alpha})^2 \quad ⑧$$

观察式 ⑧ 知,欲使 S 取到最大值,必须且只须

$$\begin{cases} a\lambda\sqrt{\sin\alpha}-\dfrac{b}{\lambda}\sqrt{\cos\alpha}=0 \\ a^2\sin\alpha=\dfrac{b^2}{\lambda^2}\cos\alpha \end{cases}$$

综

述

解得

$$\lambda=\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}},\tan\alpha=\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$$

求得所求最大值为

$$S_{\max}=(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$$

上述解法新奇巧妙,初等简洁,做到了难题巧解.我们还可应用微分法和赫尔特不等式解答,这留在后面的推广中体现.

例 4 设 $a>0,b>0,x\in(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{N})$,求证:

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\geqslant(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}} \quad ⑨$$

首先说明,如果我们记式 ⑨ 左边为 y,则

$$y\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{\sin x\cos x}}=2\sqrt{\frac{2ab}{\sin 2x}}\geqslant 2\sqrt{2ab}$$

这一结果比式 ⑨ 右边要弱,且等号成立的条件是 $a=b$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$,但已知条件中并没告诉我们 $a=b$,因此上述解法错误.

下面我们先用两种初等方法证明本题.

证法 1 设参数 $A>0,B>0$,那么

$$x\in(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})\Rightarrow\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}\Rightarrow y=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}=(A\sin x+\frac{a}{\sin x})+(B\cos x+\frac{b}{\cos x})-(A\sin x+B\cos x)\geqslant \quad ⑩$$

$$2\sqrt{aA}+2\sqrt{bB}-(A\sin x+B\cos x)\geqslant$$
$$2\sqrt{aA}+2\sqrt{bB}-\sqrt{A^2+B^2} \tag{11}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}A\sin x=a/\sin x\\B\cos x=b/\cos x\\A/B=\sin x/\cos x\end{cases}\Rightarrow\tan^3 x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}\\\cos x=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$y_{\min}=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{3/2}$$

以上证法就是待定系数法,自然奇巧,且进一步还可求得待定系数

$$\begin{cases}A=\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})\\B=\dfrac{b}{\sqrt[3]{a^2}}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})\end{cases}$$

证法 2 由于

$$y^2=\left(\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\right)^2=\frac{a^2}{\sin^2 x}+\frac{b^2}{\cos^2 x}+\frac{2ab}{\sin x\cos x}=$$
$$a^2(1+\cot^2 x)+b^2(1+\tan^2 x)+2ab(\tan x+\cot x)=$$
$$a^2+b^2+A+B \tag{12}$$
$$\begin{cases}A=a^2\cot^2 x+ab\tan x+ab\tan x\\B=b^2\tan^2 x+ab\cot x+ab\cot x\end{cases}$$

于是

$$A\geqslant 3\sqrt[3]{a^2\cot^2 x(ab\tan x)^2}=3\sqrt[3]{a^4b^2}$$

同理

$$B\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^4}$$

代入 ⑫ 得

$$y\geqslant a^2+b^2+3\sqrt[3]{a^2b^2}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}a^2\cot^2 x=ab\tan x=ab\tan x\\b^2\tan^2 x=ab\cot x=ab\cot x\end{cases}\Rightarrow\tan x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

现在,我们先写下本题的结论:

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\geqslant(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}} \tag{a}$$

再写下例 3 的结论:

$$a\sqrt{\sin x}+b\sqrt{\cos x}\leqslant(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4})^{\frac{3}{4}} \tag{b}$$

又联想到我们所熟知的结论:

$$a\sin x+b\cos x\leqslant(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \tag{c}$$

仔细观察(a),(b),(c)三式,发现它们有密切的联系,我们能将它们“三国归晋”、和谐统一吗?我们先用微分法进行试探:

设 $n\neq 2,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 的函数为

$$f(\alpha)=a\sin^n\alpha+b\cos^n\alpha\Rightarrow f'(\alpha)=na\sin^{n-1}\alpha\cos\alpha-nb\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}n\sin 2\alpha\cos^{n-2}\alpha(\tan^{n-2}\alpha-\frac{b}{a})$$

因此,欲判断 $f(\alpha)$ 的极值,故对指数 n 分情况讨论:

(1) 当 $n=0$ 时,$f(\alpha)=a+b$;

(2) 当 $0<n<2$ 时,易知当

$$(\tan\alpha)^{n-2}=\frac{b}{a}\Rightarrow\tan\alpha=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2-n}}$$

时,$f(\alpha)$ 有最大值

$$m=(a^{\frac{2}{2-n}}+b^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}$$

当 $n>2$ 时,$f(\alpha)$ 有最小值 m;

当 $n<0$ 时,$f(\alpha)$ 有最小值 m.

因此,我们获得完美的推广式:

推广 5 设 $n\neq 2$ 为实数,α 为锐角,记

$$P=a\sin^n\alpha+b\cos^n\alpha,m=(a^{\frac{2}{2-n}}+b^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}$$

那么:(1) 当 $n\in[0,2)$ 时

$$P\leqslant m \tag{d}$$

(2) 当 $n\in(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$ 时

$$P\geqslant m \tag{e}$$

(d),(e) 两式等号成立仅当 $\tan\alpha=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2-n}}$.

本推广可作为定理应用,现在我们再应用赫尔特不等式证明它.

证明 (1) 当 $n\in[0,2)$ 时,应用赫尔特不等式有$\frac{n}{2}+\frac{2-n}{2}=1$.

$$(a^{\frac{2}{2-n}}+b^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^{\frac{n}{2}}\geqslant(a^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}\cdot(\sin^2\alpha)^{\frac{n}{2}}+(b^{\frac{2}{2-n}})\cdot(\cos^2\alpha)^{\frac{n}{2}}\Rightarrow P=a\sin^n\alpha+b\cos^n\alpha\leqslant m$$

等号成立仅当

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{2-n}}\Rightarrow\tan\alpha=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2-n}}$$

(2) 当 $n>2$ 时,$\frac{2}{n}+\frac{n-2}{n}=1$.

$$(a\sin^n\alpha+b\cos^n\alpha)^{\frac{2}{n}}(a^{\frac{-2}{n-2}}+b^{\frac{-2}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}\geqslant(a\sin^n\alpha)^{\frac{2}{n}}\cdot(a^{\frac{-2}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}+(b\cos^n\alpha)^{\frac{2}{n}}\cdot(b^{\frac{-2}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow P=a\sin^n\alpha+b\cos^n\alpha\geqslant m$$

等号成立仅当

$$\frac{a\sin^n\alpha}{b\cos^n\alpha}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{2-n}}\Rightarrow(\tan\alpha)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2-n}}\Rightarrow\tan\alpha=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2-n}}$$

当 $n<0$ 时,令 $n=-k(k>0)$,由于$\frac{2}{k+2}+\frac{k}{k+2}=1$有

$$\left(\frac{a}{\sin^k\alpha}+\frac{b}{\cos^k\alpha}\right)^{\frac{2}{k+2}}\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^{\frac{k}{k+2}}\geqslant$$

$$\left(\frac{a}{\sin^k\alpha}\right)^{\frac{2}{k+2}}\cdot(\sin^2\alpha)^{\frac{k}{k+2}}+\left(\frac{b}{\cos^k\alpha}\right)^{\frac{2}{k+2}}\cdot(\cos^2\alpha)^{\frac{k}{k+2}}=$$

$$a^{\frac{2}{k+2}}+b^{\frac{2}{k+2}}\Rightarrow P\geqslant(a^{\frac{2}{k+2}}+b^{\frac{2}{k+2}})^{\frac{k+2}{2}}=m$$

等号成立仅当

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^k\Rightarrow(\tan\alpha)^{k+2}=\frac{a}{b}\Rightarrow\tan\alpha=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2-n}}$$

特别地,应用本推广,易得如下

推广 6 设 $a>0,b>0,\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2}),n,k\geqslant0$,则有

$$\frac{a}{\cos^{2n}\alpha}+\frac{b}{\sin^{2n}\alpha\sin^{2k}\beta\cos^{2k}\beta}\geqslant(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{4^kb})^{n+1}\tag{f}$$

当 $n=k=0$ 时,式(f)化为等式

$$a+b=a+b$$

当 $n=k=1,a=b=1$ 时,式(f)化为

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant9\tag{g}$$

这正好是 1982CMO 试题之一.

例 5 设 $p,q,n,k\in\mathbf{R}^+,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,求函数

$$f(\theta)=p(\tan\theta)^n+q(\cot\theta)^k$$

的极值.

解析 简记 $\tan\theta=t>0$,则 $\cot\theta=1/t>0$,那么

$$f(\theta)=pt^n+q(\frac{1}{t})^k=f(t)$$

显然,当 $n=k$ 时,可得

$$f(t)=pt^n+\frac{q}{t^n}\geqslant2\sqrt{pq}\Rightarrow f(\theta)_{\min}=f(t)_{\min}=2\sqrt{pq}$$

仅当
$$pt^n=\frac{q}{t^n}\Rightarrow t=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2n}}\Rightarrow\tan\theta=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

时达到.

当 $n\neq k$ 时,记 $s=p\lambda+q\mu$,其中 λ,μ 为正参数,观察表达式 $f(t)$,宜用加权不等式

$$f(t)=pt^n+\frac{q}{t^k}=p\lambda\left(\frac{t^n}{\lambda}\right)+q\mu\left(\frac{1}{\mu t^k}\right)\geqslant s\left[\left(\frac{t^n}{\lambda}\right)^{p\lambda}\cdot\left(\frac{1}{\mu t^k}\right)^{q\mu}\right]^{\frac{1}{s}}=$$

$$s\cdot\left(\frac{t^{np\lambda-kq\mu}}{\lambda^{p\lambda}\cdot\mu^{q\mu}}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{13}$$

为了让 $f(t)$ 取到最小值,必须且只须

$$np\lambda-kq\mu=0\Rightarrow\frac{\lambda}{\mu}=\frac{kq}{np} \tag{14}$$

因此可取 $\lambda=kq,\mu=np$,于是 $s=p\lambda+q\mu=pq(n+k)$.

$$f(t)_{\min}=s\left(\frac{1}{\lambda^{p\lambda}\cdot\mu^{q\mu}}\right)^{\frac{1}{s}}=\frac{pq(n+k)}{[(kq)^k(np)^n]^{pq/s}}=\frac{pq(n+k)}{[(kq)^k\cdot(np)^n]^{1/(n+k)}}$$

仅当 $\dfrac{t^n}{\lambda}=\dfrac{1}{\mu t^k}\Rightarrow t=\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{n+k}}=\left(\dfrac{kq}{np}\right)^{\frac{1}{n+k}}\Rightarrow\tan\theta=\left(\dfrac{kq}{np}\right)^{1/(n+k)}$

时达到.

上述思路通俗自然,初等巧妙.我们改用微分法求解,看结果是否一致.

易得

$$f(t)=pt^n+qt^{-k}\Rightarrow f'(t_0)=npt_0^{n-1}-kqt_0^{-(k+1)}=0\Rightarrow t_0=\left(\frac{kq}{np}\right)^{\frac{1}{n+k}}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&f''(t_0)=n(n-1)pt_0^{n-2}+k(k+1)qt_0^{-(k+2)}=\\&[n(n-1)pt_0^{n+k}+k(k+1)q]t_0^{-(k+2)}=\\&\left[n(n-1)p\left(\frac{kq}{np}\right)+k(k+1)q\right]t_0^{-(k+2)}=\\&k(n+k)qt_0^{-(k+2)}>0\Rightarrow f(t)_{\min}=f(t_0)=pt_0^n+qt_0^{-k}=\\&p\left(\frac{kq}{np}\right)^{\frac{n}{n+k}}+q\left(\frac{np}{kq}\right)^{\frac{k}{n+k}}\Rightarrow f(\theta)_{\min}=f(t)_{\min}=\frac{pq(n+k)}{[(kq)^k\cdot(np)^n]^{1/(n+k)}}\end{aligned}$$

可见,只要思路正确,结论是一样的:

$$p(\tan\theta)^n+q(\cot\theta)^k\geqslant\frac{pq(n+k)}{[(np)^n(kq)^k]^{1/(n+k)}}$$

等号成立仅当 $\tan\theta=\left(\dfrac{kq}{np}\right)^{1/(n+k)}$

当 $n=k$ 时,有 $f(t_0)=2\sqrt{pq}$, $\tan\theta_0=t_0=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{1/2n}$.

因此上式包括了 $n=k$ 时的情形.

例 6 设 $a_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n\in\mathbf{N})$,且 $\alpha>\beta>0$,求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^\beta\right)^{1/\beta} \tag{M}$$

分析 当我们一看到式(M)时,立刻眼睛发亮——这不是幂平均不等式吗?但仔细一瞧,它又不是,因为幂平均不等式是

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{N}$$

(M),(N) 两式相比较,虽然它们的外形和结构相似,但式(M) 两边分母中少了 n,且它们的方向恰好相反.为了对付式(M),我们用归纳法尝试.

证明 (1) 当 $n = 1$ 时,式(M) 成为等式

$$(a_1^{\alpha})^{1/\alpha} = (a_1^{\beta})^{1/\beta}$$

当 $n = 2$ 时,须证

$$(a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha})^{1/\alpha} \leqslant (a_1^{\beta} + a_2^{\beta})^{1/\beta} \tag{⑮}$$

成立.当 a_1 和 a_2 有一个为 0 时,式 ⑤ 显然成立.

不妨设 $a_1 \geqslant a_2 > 0$,有

$$\left.\begin{matrix} 0 < \dfrac{a_2}{a_1} \leqslant 1 \\ \alpha > \beta > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\alpha} \leqslant \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\beta} \Rightarrow 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\alpha} \leqslant 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\beta} \Rightarrow$$

$$\left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha}}{a_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\frac{a_1^{\beta} + a_2^{\beta}}{a_1^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow$$

$$(a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha})^{1/\alpha} \leqslant (a_1^{\beta} + a_2^{\beta})^{1/\beta}$$

即式 ⑮ 成立,等号成立仅当 $a_1 = a_2$.

(2) 假设 $n = k$ 时命题成立,即

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{\beta}\right)^{1/\beta} \tag{⑯}$$

那么,当 $n = k + 1$ 时,令$\sum_{i=1}^{k} a_i^{\alpha} = d_1^{\alpha}\sum_{i=1}^{k} a_i^{\beta} = d_2^{\beta}$,则 $d_1 > 0, d_2 > 0$,且

$$(d_1^{\alpha})^{1/\alpha} \leqslant (d_2^{\beta})^{1/\beta} \Rightarrow d_1 \leqslant d_2$$

由(1) 得

$$\left.\begin{matrix} (d_1^{\alpha} + a_{k+1}^{\alpha})^{1/\alpha} \leqslant (d_1^{\beta} + a_{k+1}^{\beta})^{1/\beta} \\ 0 < d_1 \leqslant d_2 \Rightarrow d_1^{\beta} \leqslant d_2^{\beta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (d_1^{\alpha} + a_{k+1}^{\alpha})^{1/\alpha} \leqslant (d_2^{\beta} + a_{k+1}^{\beta})^{1/\beta} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{\alpha} + \alpha_{k+1}^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{\beta} + a_{k+1}^{\beta}\right)^{1/\beta} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^{\beta}\right)^{1/\beta} \tag{⑰}$$

即当 $n = k + 1$ 时,命题成立.

综合(1) 和(2) 知,对一切 $n \in \mathbf{N}$,命题成立.

注 (1) 在证明 $n = 2$ 时,应用了一个技巧:

$$1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\alpha} \leqslant 1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\beta}$$

这是关键的一步，在证明(2)中又利用了(1)中 $n=2$ 时成立，这一点在数学归纳法中是少见的.

(2) 在幂平均不等式(N)中，指数条件是 $\alpha>\beta$，它包含了 $\alpha>\beta\geqslant 0, \alpha\geqslant 0>\beta$，$\alpha>0\geqslant\beta, 0\geqslant\alpha>\beta$ 这四种情形，而本题则限制为 $\alpha>\beta>0$.

(3) 幂平均不等式中等号成立的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

而此时在本题中，则导出

$$n^{1/\alpha} \leqslant n^{1/\beta} \Rightarrow n^{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)} \leqslant 1 \Rightarrow n=1$$

这表明式(M)等号成立的充要条件是 $n=1$ 或 $a_i=0(1\leqslant i\leqslant n)$.

(4) 众所周知，幂平均不等式可以从系数方面推广为加权幂平均不等式：

设 $a_i, p_i>0(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1, \alpha>\beta$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \geqslant\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\beta}\right)^{1/\beta} \tag{O}$$

综述

相应地，我们易将式(M)从系数方面推广为：

推广 7 设 $a_i\geqslant 0, K_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$，且 $\alpha>\beta>0$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} K_i a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} K_i a_i^{\beta}\right)^{1/\beta} \tag{P}$$

但是，我们不能将式(P)中的整系数 $K_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 推广到任意正实数中去，因为如果当 $K_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i=1$ 时，式(P)与加权幂平均不等式矛盾.

如果有谁怀疑，那么当 $K_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为有理数时，可设 $K_i=\lambda_i/\mu_i, \mu=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$，$t_i=\lambda_i\mu/\mu_i$，其中 $\lambda_i, \mu_i\in\mathbf{N}$，且 $(\lambda_i, \mu_i)=1(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $\mu, t_i\in\mathbf{N}(1\leqslant i\leqslant n)$，于是

$$\left.\begin{array}{l}1<\mu\in\mathbf{N}\\ \alpha>\beta>0\end{array}\right\} \Rightarrow \mu^{\beta}<\mu^{\alpha} \Rightarrow \mu^{1/\alpha}<\mu^{1/\beta} \tag{18}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} K_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i^{\alpha}}{\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\mu^{1/\alpha}} \tag{19}$$

从式⑱知，到式⑲右边时已经"此路不通"了，自然无法推出式(P).

(5) 尽管如此，漂亮的不等式(P)仍然可与加权幂平均不等式(O)竞秀比美. 现在，我们干脆用简洁漂亮的方法证明加权幂平均不等式(O).

证明 由定义

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\theta}\right)^{1/\theta}=\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}$$

知，我们只须证明 $\alpha, \beta\neq 0$ 时的情况即可.

设 $\theta\neq 0, x>0$，且函数

$$f(x)=x^{\theta}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=\theta x^{\theta-1}\\f''(x)=\theta(\theta-1)x^{\theta-2}\end{cases}$$

(1) 当 $\left.\begin{matrix}\theta<0\\ \text{或 }\theta\geqslant 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\theta(\theta-1)\geqslant 0\Rightarrow f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 为凸函数，应用琴生不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)\geqslant f(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)\Rightarrow\left.\begin{matrix}\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i^{\theta}\geqslant(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i)^{\theta}\\ \text{令 }\theta=\dfrac{\alpha}{\beta},x_i=a_i^{\beta}(1\leqslant i\leqslant n)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\alpha}\geqslant(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\beta})^{\alpha/\beta} \tag{21}$$

从 $\theta<0$ 或 $\theta\geqslant 1$ 及 $\theta=\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\alpha>\beta$，知只有 $\alpha>\beta>0$ 与 $\alpha>0>\beta$ 这两种情况，结合式㉑有

$$(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\alpha})^{1/\alpha}\geqslant(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\beta})^{1/\beta}$$

这即为(O)式.

(2) 当 $0<\theta<1\Rightarrow\theta(\theta-1)<0\Rightarrow f''(x)<0$. $f(x)$ 为凹函数，有反向琴生不等式

$$\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)\leqslant f(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^{\theta}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)^{\theta}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i^{\alpha}\geqslant(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i^{\beta})^{\alpha/\beta}\\ \left.\begin{matrix}\text{由于 }\theta=\dfrac{\alpha}{\beta}\in(0,1)\\ \alpha>\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0>\alpha>\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\alpha})^{1/\alpha}\geqslant(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^{\beta})^{1/\beta}$$

此时式(O)仍然成立.

综合上述，式(O)恒成立，等号成立仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

例 7 设 $a,b\in\mathbf{R}^{+},n\in\mathbf{N}$，记

$$P=\frac{a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n}{n+1} \tag{22}$$

则有

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant P_n\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \tag{Q}$$

分析 本题的已知条件吝啬而又简单，而要求证明的结论式(Q)，却是一个优美的双向不等式，它关于 a,b 对称，且 P_n 的表达式又较复杂. 为了准备"大决战". 我们对式(Q)的观察和分析实施"左右夹击，两面包抄".

我们先分析式(Q)左边：设 $\alpha,\beta>0$，有

$$\left.\begin{matrix}a,b>0\\ \alpha,\beta>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(a^{\alpha}-b^{\alpha})(a^{\beta}-b^{\beta})\geqslant 0\Rightarrow a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}\geqslant a^{\alpha}b^{\beta}+a^{\beta}b^{\alpha}\Rightarrow$$

$$a^n+b^n\geqslant a^kb^{n-k}+a^{n-k}b^k(1\leqslant k\leqslant n-1)\Rightarrow$$

$$(n-1)(a^n+b^n)\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}(a^kb^{n-k}+a^{n-k}b^k)=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}a^{n-k}b^k=2\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k}\Rightarrow$$

$$(n+1)(a^n+b^n)\geqslant 2(a^n+\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k}+b^n)\Rightarrow$$

$$(n+1)(a^n+b^n)\geqslant 2(n+1)P_n\Rightarrow$$

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant P_n \tag{23}$$

因此式(Q)左边成立,等号成立仅当 $a=b$.所以我们只须证明式(Q)右边成立.

现在我们分析式(Q)右边.应用因式分解或等比数列求和公式,得

$$P_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)(a-b)}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \tag{24}$$

再令 $x=a/b>0$,那又将式㉒从两个字母 a,b 转化为一个字母 x 的不等式

$$\frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(x-1)}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^n \tag{25}$$

综述

然后我们对式㉕施行归纳法可行.

证法1 (1)当 $n=1$ 时,式(Q)显然成立;当 $a=b$ 时,式(Q)等号显然成立;

(2)当 $a\neq b$ 时,由于式(Q)左右两边关于 a 和 b 对称,故只须证当 $a>b>0$ 时式(Q)右边成立即可,由于它等价于

$$P_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)(a-b)}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \tag{26}$$

令 $x=a/b>1$,式㉖简化为

$$\frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(x-1)}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^n \tag{27}$$

现对式㉗用归纳法证明:

当 $n=1$ 时,式㉗化为等式成立.

当 $n=2$ 时,式㉗化为

$$\frac{1}{3}(x^2+x+1)\geqslant\frac{1}{4}(x^2+2x+1)\Leftrightarrow x^2-2x+1\geqslant 0\Leftrightarrow(x-1)^2\geqslant 0$$

成立,等号成立仅当 $x=1\Leftrightarrow a=b$.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时,式㉗成立,即

$$\frac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^k\Leftrightarrow \tag{28}$$

$$\frac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^{k+1} \tag{29}$$

那么,当 $n=k+1$ 时,欲证

$$\frac{x^{k+2}-1}{(k+2)(x-1)}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^{k+1} \tag{30}$$

只须证

$$\frac{x^{k+2}-1}{(k+2)(x-1)} \geqslant \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow \tag{31}$$

$$f(x) = 2(k+1)x^{k+2} - (k+2)x^{k+1} - k \geqslant 0 \tag{32}$$

由于
$$f(1) = 2(k+1) - (k+2) - k = 0$$

因此多项式 $f(x)$ 有因式 $x-1>0$,现用综合除法求商式 $f(x)/(x-1) = g(x)$.

1	$2(k+1)$	$-(k+2)$	0	0	……	0	0	$-k$
		$2(k+1)$	k	k	……	k	k	k
	$2(k+1)$	k	k	k		k	k	0

因此 $g(x) = 2(k+1)x^{k+1} + kx^k + kx^{k-1} + \cdots + kx + k > 0 \Rightarrow f(x) = (x-1)g(x) > 0$

逆推之,㉚,㉛,㉜ 式均成立,即当 $n = k+1$ 时,式 ㉗ 仍然成立.

综合上述,对任意 $n \in \mathbf{N}$ 式 ㉗ 成立,等号成立仅当 $x = 1 \Rightarrow a = b$.

证法 2 令 $x = a/b > 0$,式(Q) 右边化为

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^i}{n+1} \geqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \tag{33}$$

(1) 当 $n = 1$ 时,式 ㉝ 显然成立.当 $n = 2$ 时

$$(x-1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 2x - 1 \Leftrightarrow 4(x^2+x+1) \geqslant 3(x^2+2x+1) \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2+x+1}{3} \geqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

式 ㉝ 成立,等号成立仅当 $x = 1$.

(2) 假设当 $n = k-1$ 时式 ㉝ 成立,即

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i^i}{k} \geqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{k-1} \tag{34}$$

那么当 $n = k$ 时,由于

$$(x^{k-i}-1)(x^i-1) \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant k-1) \Rightarrow x^k + 1 \geqslant x^{k-i} + x^i \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(k-1)(x^k+1) \geqslant \sum_{i=1}^{k-1}(x^{k-i}+x^i) = 2\sum_{i=1}^{k-1}x^i \\ \text{记 } P = (k+1)(x^k+1) + 2k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} x^i\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(k-1)(x^k+1) + P \geqslant P + 2\sum_{i=1}^{k-1}x^i \Rightarrow$$

$$2k(x^k + 1 + \sum_{i=1}^{k-1}x^i) \geqslant (k+1)(x^k + 2\sum_{i=1}^{k-1}x^i + 1) \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{k} x^i}{k+1} \geqslant \frac{x^k + 2\sum_{i=1}^{k-1}x^i + 1}{2k} =$$

$$\frac{(x^k-1)+2(\sum_{i=1}^{k-1}x^i+1)}{2k}=(x-1)\sum_{i=0}^{k-1}x^i+2\sum_{i=0}^{k-1}x^i=$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{\sum_{i=0}^{k-1}x^i}{k}\right)\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)^{k-1}\Rightarrow\frac{\sum_{i=0}^{k}x^i}{k+1}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^k$$

即当 $n=k$ 时式㉞仍然成立.

综合上述,对一切 $n\in\mathbf{N}$,式(Q)成立,等号成立仅当 $x=1\Rightarrow a=b$.

证法 3 (1)显然,当 $n=1$ 或 $a=b$ 时,式(Q)成立:

(2)当 $n>1$ 且 $a\neq b$ 时,式(Q)可化为

$$P_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)(a-b)}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \tag{㉟}$$

令 $\begin{cases}a=\mu+v>0\\b=\mu-v>0\end{cases}(\mu>v>0)\Rightarrow P_n=\dfrac{(\mu+v)^{n+1}-(\mu-v)^{n+1}}{2(n+1)v}=$

$$\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1\mu^n+C_{n+1}^3\mu^{n-2}v^2+\cdots\cdots)\geqslant$$

$$\frac{1}{n+1}C_{n+1}^1\mu^n=\mu^n=\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\Rightarrow$$

$$P_n\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

综

述

即式㉟成立.故对一切 $n\in\mathbf{N}$,式(Q)恒成立,等号成立仅当

$$v=0\Rightarrow a=b$$

如果我们将式(Q)改写为等价形式

$$\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant P_n^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{a+b}{2} \tag{R}$$

再应用前面介绍的华老的定理,就可将式(R)拉长加细成

$$\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant P_n^{1/n}\geqslant P_{n-1}^{1/n-1}\geqslant\cdots\geqslant P_2^{1/2}\geqslant P_1=\frac{a+b}{2} \tag{S}$$

显然,这是一条漂亮的不等式.

如果我们再记

$$T_n=\frac{a+a^{\frac{n-1}{n}}b^{\frac{1}{n}}+\cdots+a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-1}{n}}+b}{n+1}$$

那么,20 世纪 90 年代,我国的陈计老师建立了式(S)的配对式

$$\frac{a+b}{2}=T_1\geqslant T_2\geqslant\cdots\geqslant T_n\geqslant\sqrt{ab} \tag{T}$$

(S),(T)两式等号成立仅当 $a=b$.

三角“母不等式”漫谈

邓寿才

我们知道，代数、几何、三角是数学学科的三大分支，它们关系密切，相对独立，绝对联系，简直是数学家庭中的三口之家 —— 相依相存，密不可分，直到永远.

从起源上讲，先有代数，再有几何，后生三角，因此三角是代数、几何的后代，它年轻有为，前程似锦.那三角学中的几十个三角公式，如鲜花朵朵，芳香艳丽；那一道道美妙的三角命题，把数学世界妆扮得美景万千，风光无限.

1 名题起源

我们知道，对于任意实数 x,y,z，有不等式

$$yz+zx+xy\leqslant x^2+y^2+z^2 \quad ①$$

设 a,b,c 是一任意 $\triangle ABC$ 的三边之长，则有余弦和不等式

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2} \quad ②$$

及余弦定理

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\Rightarrow\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$$

$$2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C=a^2+b^2+c^2 \quad ③$$

我们能否将上述 ①,②,③ 三式“三国归晋”，和谐统一呢？事实上，在许多数奥资料上都有如下名题：

题 1 设 x,y,z 为任意实数，则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C\leqslant x^2+y^2+z^2 \quad (A)$$

式(A)暗示我们：等号成立的条件应当是

$$x:y:z=a:b:c$$

或

$$\frac{x}{\sin A}=\frac{y}{\sin B}=\frac{z}{\sin C} \quad ④$$

式 ④ 也可以写为

$$x\csc A = y\csc B = z\csc C \quad ⑤$$

显然,当$\triangle ABC$为正三角形时,式(A)化为式①,当$x = y = z$时,式(A)化为式②;当取$(x,y,z) = (at,bt,ct)(t > 0)$时,式(A)化为式③.

由此可见,不等式(A)虽然不能包罗万象,却能将不等式①,②及恒等式③实行“三国归晋”,和谐地统一在了一起.自然,在许多数奥书籍上都有式(A)靓丽的身影,因为它在三角不等式中用途广泛,地位显赫,故被人们美誉为“三角母不等式”,意为它是一只会产“金蛋”的“母鸡”.关于式(A)那一系列美妙趣味的探讨,也许普通数奥选手知之不多,本文将对此作些通俗浅谈的介绍,以供参考和欣赏.

2　参考证明

关于式(A)的证法较多,下面我们略举几例:

证法1　将式(A)按x的降幂排列整理为

$$x^2 - 2(z\cos B + y\cos C)x + (y^2 - 2yz\cos A + z^2) \geqslant 0 \quad ①$$

关于x的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta_x = &4(z\cos B + y\cos C)^2 - 4(y^2 - 2yz\cos A + z^2) = \\ &-4[(1-\cos^2 C)y^2 - 2(\cos A + \cos B\cos C)yz + (1-\cos^2 B)z^2] = \\ &-4[y^2\sin^2 C - 2yz\sin B\sin C + z^2\sin^2 B] = \\ &-4(y\sin C - z\sin B)^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

所以式①恒成立,从而式(A)成立,等号成立的充要条件是

$$\begin{cases} x = z\cos B + y\cos C \\ y\sin C - z\sin B = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = k\sin B \\ z = k\sin C\end{cases}(k > 0) \Rightarrow$$

$$x = k(\sin C\cos B + \cos C\sin B) = k\sin(B + C) = k\sin A \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C}$$

证法2　记式(A)的右边 − 左边 $= \Delta t$,则

$$\begin{aligned}\Delta t = &x^2 + (\sin^2 C + \cos^2 C)y^2 + (\cos^2 B + \sin^2 B)z^2 + 2yz\cos(B + C) - \\ &2zx\cos B - 2xy\cos C = \\ &x^2 + (\sin^2 C + \cos^2 C)y^2 + (\sin^2 B + \cos^2 B)z^2 + 2yz(\cos B\cos C - \\ &\sin B\sin C) - 2zx\cos B - 2xy\cos C = \\ &(y^2\sin^2 C - 2yz\sin B\sin C + z^2\sin^2 B) + (x^2 + y^2\cos^2 C + z^2\cos^2 B + \\ &2yz\cos B\cos C - 2zx\cos B - 2xy\cos C) = \\ &(y\sin C - z\sin B)^2 + (x - z\cos B - y\cos C)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

这表明式(A)成立,其中等号成立仅当

$$\begin{cases} y\sin C - z\sin B = 0 \\ x - z\cos B - y\cos C = 0\end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C}$$

证法 3 我们设关于 x 的函数为

$$f(x)=x^2+y^2+z^2-2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C)=$$
$$x^2-2(z\cos B+y\cos C)x+(y^2-2yz\cos A+z^2)$$

对 x 求导,得

$$f'(x)=2x-2(z\cos B+y\cos C)$$
$$f''(x)=2>0$$

因此,$f(x)$ 有最小值 $f(x_0)$,其中 x_0 为方程 $f'(x_0)=0$ 的根,为极值驻点,即

$$x=x_0=z\cos B+y\cos C$$

于是

$$\begin{aligned}f(x_0)&=x_0[x_0-2(z\cos B+y\cos C)]+(y^2-2yz\cos A+z^2)=\\&-(z\cos B+y\cos C)^2+(y^2-2yz\cos A+z^2)=\\&(1-\cos^2C)y^2+(1-\cos^2B)z^2-2(\cos A+\cos B\cos C)yz=\\&y^2\sin^2C+z^2\sin^2B-2[\cos B\cos C-\cos(B+C)]yz=\\&y^2\sin^2C+z^2\sin^2B-2yz\sin B\sin C=\\&(y\sin C-z\sin B)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

因此有

$$f(x)\geqslant f(x)_{\min}=f(x_0)\geqslant 0$$

所以式(A)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}y\sin C=z\sin B\\x=z\cos B+y\cos C\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{\sin A}=\frac{y}{\sin B}=\frac{z}{\sin C}$$

3 名题初探

不言而喻,不等式(A)

$$2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C\leqslant x^2+y^2+z^2$$

它有许多优美的特性等待我们去揭示出来.

(1) 在式(A)中作置换

$$(A,B,C)\to\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\sin\frac{A}{2}+2zx\sin\frac{B}{2}+2xy\sin\frac{C}{2}\qquad(A_1)$$

等号成立仅当

$$\frac{x}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{y}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{z}{\cos\frac{C}{2}}\Leftrightarrow x\sec\frac{A}{2}=y\sec\frac{B}{2}=z\sec\frac{C}{2}\qquad①$$

这样,我们得到一个新的不等式(A_1),它是三角形半角正弦和不等式

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}\qquad②$$

的加权推广.

(2) 如果 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,那么可以作置换

$$(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C)$$

又得到一个新的三角不等式

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos 2A+2zx\cos 2B+2xy\cos 2C\geqslant 0 \tag{③}$$

(3) 在式(A) 中应用余弦倍角公式

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$$

将式(A) 以旧翻新为

$$\sum x^2\geqslant 2\sum yz(1-2\sin^2\frac{A}{2})=2\sum yz-4\sum yz\sin^2\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$4\sum yz\sin^2\frac{A}{2}\geqslant 2\sum yz-\sum x^2 \tag{A_2}$$

这是三角半角正弦平方和不等式

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{4} \tag{④}$$

的加权推广,同样

$$\sum x^2\geqslant 2\sum yz(2\cos^2\frac{A}{2}-1)\Rightarrow 4\sum yz\cos^2\frac{A}{2}\leqslant\sum x^2+2\sum yz\Rightarrow$$

综

$$4\sum yz\cos^2\frac{A}{2}\leqslant(x+y+z)^2 \tag{A_3}$$

述

这是三角形余弦半角平方和不等式

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4} \tag{⑤}$$

的加权推广.

以上式(A_2),(A_3) 等号成立的条件与式(A),仍为

$$x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C \tag{⑥}$$

(4) 同样,式 ② 为余弦倍角和不等式

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant-\frac{3}{2} \tag{⑦}$$

的加权推广.

式 ② 翻新又得两个新的三角不等式

$$4\sum yz\cos^2 A\geqslant 2\sum yz-\sum x^2 \tag{A_4}$$

$$4\sum yz\sin^2 A\leqslant(x+y+z)^2 \tag{A_5}$$

它们分别为不等式

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geqslant\frac{3}{4} \tag{⑧}$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4} \tag{⑨}$$

的加权推广.

以上式 ②,式(A_4),(A_5) 等号成立,仅当

$$x:y:z=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C \tag{⑩}$$

(5) 如果 x,y,z 同号,那么可设

$$\begin{cases} p = yz > 0 \\ q = zx > 0 \\ r = xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = \sqrt{qr/p} \\ |y| = \sqrt{rp/q} \\ |z| = \sqrt{pq/r} \end{cases}$$

这样式(A)的外观可以化妆为

$$p\cos A + q\cos B + r\cos C \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{qr}{p} + \frac{rp}{q} + \frac{pq}{r}\right) \tag{A_6}$$

等号成立仅当

$$p\sin A = q\sin B = r\sin C \tag{⑪}$$

以上式(A_1) ~ (A_6) 均为式(A)的产物,好像他的"孩子",这足以表明式(A)确为一只高产的会下"金蛋"的"母鸡".

4　奇询异问

在优美迷人的不等式(A)中,是否对一切实数 x,y,z 而言,角 A,B,C 必须是 $\triangle ABC$ 的三内角才一定成立呢?此问提得奇特,谁能想到?而事实却并非如此.

题 2　实数 α,β,γ 满足什么条件时,对于一切实数 x,y,z,不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma \tag{A'}$$

恒成立?

解　式(A')即为

$$x^2 - 2(y\cos\alpha + z\cos\gamma)x + (y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta) \geqslant 0 \tag{①}$$

欲使式①恒成立,则关于 x 的判别式必须

$$\begin{aligned}\Delta_x &= 4(y\cos\alpha + z\cos\gamma)^2 - 4(y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta) = \\ &4[2yz(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma) - y^2\sin^2\alpha - z^2\sin^2\gamma] \leqslant 0 \Rightarrow \\ &y^2\sin^2\alpha - 2yz(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma) + z^2\sin^2\gamma \geqslant 0 \end{aligned} \tag{②}$$

时,式①才能恒成立.

于是,式②对一切 y,z 恒成立,则必须关于 y 的判别式

$$\begin{aligned}\Delta_y &= 4(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)^2 z^2 - 4z^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma \leqslant 0 \Leftrightarrow \\ &(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)^2 - (\sin\alpha\sin\gamma)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \\ &(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)\cdot \\ &(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) \leqslant 0 \Leftrightarrow \\ &[\cos\beta + \cos(\alpha - \gamma)][\cos\beta + \cos(\alpha + \gamma)] \leqslant 0 \Leftrightarrow \\ &\cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}\right)\cdot \\ &\cos\left(\frac{\alpha - \beta - \gamma}{2}\right) \leqslant 0 \end{aligned} \tag{③}$$

式③即为 α,β,γ 应满足的条件.

对于不等式(A),当 x,y,z 同号时,我们在前面把它"化妆"成等价形式,并导出了等号成立的条件是

$$p\sin A=q\sin B=r\sin C \tag{4}$$

现在,让我们换个方位思考问题:对于给定的正常数 p,q,r,又怎样确定具体的角度 A,B,C,使之满足条件④呢?这个问题似乎提得有点古怪.其实,应用式(A)可以解决这个奇异有趣的问题:

题3 设 p,q,r 为已知给定的正常数,试确定 $\triangle ABC$ 的三内角 A,B,C,使得

$$S=p\cos A+q\cos B+r\cos C$$

取到最大值.

解 由式(A_6)知,S 的最大值为

$$S_{\max}=\frac{1}{2}\left(\frac{qr}{p}+\frac{rp}{q}+\frac{pq}{r}\right) \tag{5}$$

仅当

$$p\sin A=q\sin B=r\sin C \tag{6}$$

时取到.不妨设

$$\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}=k>0 \tag{7}$$

其中

$$x=qr,y=rp,z=pq \tag{8}$$

由

$$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B\Rightarrow kz=kx\sqrt{1-(ky)^2}+ky\sqrt{1-(kx)^2}\Rightarrow$$
$$z=\sqrt{x^2-(kxy)^2}+\sqrt{y^2-(kxy)^2} \tag{9}$$

设

$$\begin{cases}M=\sqrt{x^2-(kxy)^2}\\N=\sqrt{y^2-(kxy)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M+N=z\\M^2-N^2=x^2-y^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}M+N=z\\M-N=\dfrac{x^2-y^2}{z}\end{cases}\Rightarrow 2M=z+\frac{x^2-y^2}{z}\Rightarrow$$

$$4z^2M^2=(z^2+x^2-y^2)^2\Rightarrow$$
$$4z^2[x^2-(kxy)^2]=(z^2+x^2-y^2)^2\Rightarrow$$
$$(2kxyz)^2=(2zx)^2-(z^2+x^2-y^2)^2=$$
$$(2zx+z^2+x^2-y^2)(2zx-z^2-x^2+y^2)=$$
$$[(z+x)^2-y^2][y^2-(z-x)^2]=$$
$$(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\Rightarrow$$

$$k=\frac{\sqrt{(\sum x)\prod(y+z-x)}}{2xyz}=\frac{\sqrt{t}}{2(pqr)^2} \tag{10}$$

其中

$$t = (pq + qr + rp)(qr + rp - pq)(rp + pq - qr)(pq + qr - rp) \quad ⑪$$

于是,我们求得

$$\begin{cases} \sin A = kx = kqr = \dfrac{\sqrt{t}}{2p^2qr} \\ \sin B = ky = krp = \dfrac{\sqrt{t}}{2pq^2r} \\ \sin C = kz = kpq = \dfrac{\sqrt{t}}{2pqr^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \arcsin(\delta/p) \\ B = \arcsin(\delta/q) \\ C = \arcsin(\delta/r) \end{cases} \quad ⑫$$

其中

$$\delta = \sqrt{t}/(2pqr) \quad ⑬$$

如果我们回顾题 2 中的式(A′)

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma$$

其中 x,y,z 为任意实数,由于

$$2\sum x^2 \geqslant \sum x^2 \geqslant 2\sum yz\cos\alpha \Rightarrow \sum(y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha) \geqslant 0 \quad ⑭$$

当然式 ⑭ 比式(A′)要弱,但是,如果令

$$\begin{cases} A = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \\ B = y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta \\ C = z^2 + x^2 - 2zx\cos\gamma \end{cases}$$

则式 ⑭ 等价于

$$A + B + C \geqslant 0 \quad ⑮$$

于是,我们从式 ⑮ 得到启发,构造出新问题:

题 4 若 $\alpha + \beta \pm \gamma = 2k\pi(k \in \mathbf{Z})$,则有

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} \geqslant \sqrt{C} \quad (A'')$$

等号何时成立?

显然,题 4 是与前面两个问题相异的有趣问题.

证明 应用比较法,作代换

$$a = \sqrt{A}, b = \sqrt{B}, c = \sqrt{C}$$

$$\frac{1}{2}[(a+b)^2 - c^2] = ab - (xy\cos\alpha + yz\cos\beta - zx\cos\gamma - y^2)$$

记

$$d = xy\cos\alpha + yz\cos\beta - zx\cos\gamma - y^2 \Rightarrow \frac{1}{2}[(a+b)^2 - c^2] = ab - d \quad ⑯$$

再次应用比较法

$$\begin{aligned}(ab)^2 - d^2 = &(x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha)(y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta) - \\ &(xy\cos\alpha + yz\cos\beta - zx\cos\gamma - y^2) = \\ &(xy\sin\alpha)^2 + (yz\sin\beta)^2 + (zx\sin\gamma)^2 + 2xy^2z(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) + \\ &2xyz^2(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + 2x^2yz(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta) =\end{aligned}$$

$$(xy\sin\alpha)^2+(yz\sin\beta)^2+(zx\sin\gamma)^2+$$
$$2xyz(y\sin\alpha\sin\beta\pm z\sin\beta\sin\gamma+x\sin\alpha\sin\gamma)=$$
$$(xy\sin\alpha+yz\sin\beta\pm zx\sin\gamma)^2\geqslant 0\Rightarrow$$
$$\left.\begin{matrix}(ab)^2-d^2\geqslant 0\\ ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ab\geqslant|d|\geqslant d\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}[(a+b)^2-c^2]=ab-d\geqslant 0\Rightarrow$$
$$\left.\begin{matrix}(a+b)^2\geqslant c^2\\ a,b,c>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+b\geqslant c\Rightarrow$$
$$\sqrt{A}+\sqrt{B}\geqslant\sqrt{C}$$

等号成立仅当

$$xy\sin\alpha+yz\sin\beta\pm zx\sin\gamma=0 \qquad ⑰$$

回顾上述三个问题及解答,我们感觉到它们不仅美妙有趣,而且解法也有技巧和难度.

综述

5　加强完善

我们知道,有三角恒等式

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad ①$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R} \qquad ②$$

其中 R,r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径.

如果设 $k>1$,由欧拉不等式 $R\geqslant 2r$ 有

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{R}\right)\leqslant\frac{1}{2}$$

及

$$\frac{2r}{R}\geqslant\left(\frac{2r}{R}\right)^k$$

那么三角形余弦和不等式可完善成

$$1<1+\frac{1}{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^k\leqslant\sum\cos A\leqslant\frac{3}{2} \qquad (B)$$

其中等号当 $k=1$ 时,式(B)左边成立,当 $\triangle ABC$ 为正三角形时式(B)右边成立.

对于著名的三角母不等式,我们把它加强成焕然一新的:

加强　对于任意实数 x,y,z 和任意 $\triangle ABC$ 有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C+Q \qquad (C)$$

其中

$$Q=\frac{1}{3}\sum(y\sin C-z\sin B)^2 \qquad ③$$

证明　我们记

$$\Delta t = \sum x^2 - 2\sum yz\cos A$$

从式(A) 的证法 2 有

$$\begin{cases}\Delta t \geqslant (y\sin C - z\sin B)^2 \\ \Delta t \geqslant (z\sin A - x\sin C)^2 \\ \Delta t \geqslant (x\sin B - y\sin A)^2\end{cases} \Rightarrow 3\Delta t \geqslant 3Q =$$

$$\sum (y\sin C - z\sin B)^2 \Rightarrow \Delta t \geqslant Q = \frac{1}{3}\sum (y\sin C - z\sin B)^2$$

等号成立仅当

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C} \quad ④$$

即式(A) 与式(C) 等号成立的条件是一致的.

6 指数推广

对于锐角 $\triangle ABC$,若设指数 $0 < m \leqslant 1$,应用幂平均不等式,有

$$\left(\frac{\sum \cos^m A}{3}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{\sum \cos A}{3} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^m A + \cos^m B + \cos^m C \leqslant \frac{3}{\sqrt[m]{2}} \quad (D)$$

此外,若另设 $k \geqslant 1$,由于

$$\cos A, \cos B, \cos C \in (0,1) \Rightarrow \begin{cases}0 < \cos^k A \leqslant \cos A < 1 \\ 0 < \cos^k B \leqslant \cos B < 1 \\ 0 < \cos^k C \leqslant \cos C < 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos^k A + \cos^k B + \cos^k C \leqslant \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\cos^k A + \cos^k B + \cos^k C \leqslant \frac{3}{2} \quad (E)$$

式(D) 与式(E) 相应成趣,其中式(D) 中 $m \in (0,1]$,式(E) 中 $k \geqslant 1$. 也许有人要问,对于任意 $\triangle ABC$,式(E) 还成立吗?其实,只要应用三角级数公式,我们可得:

推广 1 设 n 为奇数,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\cos^n A + \cos^n B + \cos^n C \leqslant \frac{3}{2} \quad (F)$$

证明 应用三角级数公式有

$$2^n(\cos^n A + \cos^n B + \cos^n C) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [\cos(n-2k)A + \cos(n-2k)B + \cos(n-2k)C] \quad ①$$

设 $n - 2k = r$,则由于 n 为奇数,$2k$ 为偶数,于是 r 为奇数,且

$$\sum \cos(n-2k)A = \sum \cos rA = 2\cos\frac{r}{2}(A+B)\cos\frac{r}{2}(A-B) - 2\left[\cos\frac{r}{2}(A+B)\right]^2 =$$

$$-2\left[\cos\frac{r}{2}(A+B)-\frac{1}{2}\cos\frac{r}{2}(A-B)\right]^2+1+$$
$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{r}{2}(A-B)\right]^2\leqslant$$
$$1+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{r}{2}(A-B)\right]^2\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$
$$2^n\sum\cos^nA\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\cdot\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)2^n\Rightarrow$$
$$\sum\cos^nA\leqslant\frac{3}{2}$$

即式(F)成立,等号成立仅当 $n=1$ 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

观察上面的(D),(E),(F)三式,它们外观相似,区别甚微,却交相辉映.

7 个数推广

现在,让我们增设一点基本条件:设 x,y,z,p,q,r 均为正数,且满足 $p+q+r=1$;$\triangle ABC$ 为锐角三角形,那么三角母不等式

$$2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C\leqslant x^2+y^2+z^2\Rightarrow \tag{A}$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)\geqslant\frac{\cos A}{x}+\frac{\cos B}{y}+\frac{\cos C}{z}(\text{“化妆打扮”})=$$
$$p\left(\frac{\cos A}{px}\right)+q\left(\frac{\cos B}{qy}\right)+r\left(\frac{\cos C}{rz}\right)(\text{应用加权不等式})\geqslant$$
$$\left(\frac{\cos A}{px}\right)^p\cdot\left(\frac{\cos B}{qy}\right)^q\cdot\left(\frac{\cos C}{rz}\right)^r=$$
$$\frac{(\cos A)^p\cdot(\cos B)^q\cdot(\cos C)^r}{(px)^p\cdot(qy)^q\cdot(rz)^r}\Rightarrow$$
$$(\cos A)^p\cdot(\cos B)^q\cdot(\cos C)^r\leqslant$$
$$\frac{1}{2}[(px)^p\cdot(qy)^q\cdot(rz)^r]\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right) \tag{①}$$

这样,我们又得到了一个漂亮的新结论.

其中,等号成立仅当

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sin A}=\dfrac{y}{\sin B}=\dfrac{z}{\sin C}\\ \dfrac{\cos A}{px}=\dfrac{\cos B}{qy}=\dfrac{\cos C}{rz}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{\sin A}=\dfrac{y}{\sin B}=\dfrac{z}{\sin C}\\ \dfrac{p}{\cot A}=\dfrac{q}{\cot B}=\dfrac{r}{\cot C}\end{cases} \tag{②}$$

通过如上思路与推导,便诞生了三角母不等式的一个漂亮的:

推论 设 p,q,r 及 x,y,z 均为正数,且满足 $p+q+r=1$;$\triangle ABC$ 为锐角三角形,则有

$$(\cos A)^p\cdot(\cos B)^q\cdot(\cos C)^r\leqslant\frac{1}{2}[(px)^p\cdot(qy)^q\cdot(rz)^r]\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right) \tag{G}$$

等号成立的条件是上述式②成立.

综述

可见,上述推导显得轻松爽快,却得到一个优美漂亮的推论.如果仅从式(G)的外形结构看,不知它从何而来?证明从何入手?它的证明究竟有多难?

这还不足为奇,如果巧妙地应用赫尔特不等式,那么,我们就可创造新的奇迹——将式(A)从一个三角形推广到多个三角形中去:

推广 2 设 x,y,z 均为正数,$\alpha_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n)$,$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$;$\triangle A_iB_iC_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为锐角三角形,则有

$$2yz\prod_{i=1}^{n}(\cos A_i)^{\alpha_i}+2zx\prod_{i=1}^{n}(\cos B_i)^{\alpha_i}+2xy\prod_{i=1}^{n}(\cos C_i)^{\alpha_i}\leqslant x^2+y^2+z^2 \tag{H}$$

等号成立仅当

$$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2\backsim\cdots\backsim\triangle A_nB_nC_n$$

且

$$x:y:z=\sin A_1:\sin B_1:\sin C_1 \tag{③}$$

显然,当 $n=1$ 或 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2\backsim\cdots\backsim\triangle A_nB_nC_n$ 时,式(H)化为式(A)的等价形式.因此式(H)将式(A)从一个锐角三角形推广到了 $n(1\leqslant n\in\mathbf{N})$ 个三角形.

略证 记式(H)左边为 P_n,并简记为

$$\begin{aligned}P_n&=\sum\left[2yz\prod_{i=1}^{n}(\cos A_i)^{\alpha_i}\right]=\sum\prod_{i=1}^{n}(2yz\cos A_i)^{\alpha_i}(\text{应用赫尔特不等式})\leqslant\\&\prod_{i=1}^{n}\left(\sum 2yz\cos A_i\right)^{\alpha_i}(\text{应用三角母不等式})\leqslant\\&\prod_{i=1}^{n}(x^2+y^2+z^2)^{\alpha_i}=(x^2+y^2+z^2)^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}=x^2+y^2+z^2\Rightarrow\\&P_n\leqslant x^2+y^2+z^2\end{aligned}$$

即式(H)成立,等号成立仅当

$$x:y:z=\sin A_i:\sin B_i:\sin C_i$$

及

$$\cos A_1:\cos B_1:\cos C_1=\cdots=\cos A_n:\cos B_n:\cos C_n$$

即为

$$x:y:z=\sin A_1:\sin B_1:\sin C_1$$

$$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2\backsim\cdots\backsim\triangle A_nB_nC_n$$

相应地,我们还有另外一个有趣的结论:

结论 1 设变量 θ 为锐角,$\triangle A_iB_iC_i$ 为一任意已知三角形$(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$,那么有

$$\prod_{i=1}^{n}[\cos(\theta-A_i)]^{\alpha_i}+\prod_{i=1}^{n}[\cos(\theta-B_i)]^{\alpha_i}+\prod_{i=1}^{n}[\cos(\theta-C_i)]^{\alpha_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}(q-4Q_i)^{\alpha_i/2} \tag{I}$$

其中

$$\alpha_i\in(0,1),1\leqslant i\leqslant n$$

$$Q_i=\left(\sin\frac{B_i-C_i}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{C_i-A_i}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{A_i-B_i}{2}\right)^2$$

略证 我们首先注意到,对于任意 $\triangle A_iB_iC_i(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$,有

$$\sum\cos A_i>0,\sum\sin A_i>0$$

于是

$$\begin{aligned}\sum\cos(\theta-A_i)=&\sum(\cos\theta\cos A_i+\sin\theta\sin A_i)=\\&\left(\sum\cos A_i\right)\cos\theta+\left(\sum\sin A_i\right)\sin\theta(\text{应用柯西不等式})\leqslant\\&\left[\left(\sum\cos A_i\right)^2+\left(\sum\sin A_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}=\\&\left[\sum(\cos^2A_i+\sin^2A_i)+2\sum(\cos B_i\cos C_i+\sin B_i\sin C_i)\right]^{\frac{1}{2}}=\\&\left[3+2\sum\cos(B_i-C_i)\right]^{\frac{1}{2}}=\\&\left\{3+2\sum\left[1-2\left(\sin\frac{B_i-C_i}{2}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}=\\&\left[q-4\sum\left(\sin\frac{B_i-C_i}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\\&\sum\cos(\theta-A_i)\leqslant(q-4Q_i)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\\&\sum\prod_{i=1}^{n}[\cos(\theta-A_i)]^{\alpha_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left[\sum\cos(\theta-A_i)\right]^{\alpha_i}\\&(\text{应用赫尔特不等式})\leqslant\\&\prod_{i=1}^{n}(q-4Q_i)^{\alpha_i/2}\end{aligned}$$

等号成立仅当 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2\backsim\cdots\backsim\triangle A_nB_nC_n$

且
$$\tan\theta=\frac{\sum\sin A_1}{\sum\cos A_1}$$

此外,以后我们还可以从权系数上推广式(I).

8 多边形推广

如果我们设关于 $x\in(0,\pi)$ 的余弦函数为 $f(x)=\cos x$,则求导得

$$f'(x)=-\sin x<0$$

$$f''(x)=-\cos x\begin{cases}\leqslant 0,x\in(0,\frac{\pi}{2}]\\\geqslant 0,x\in[\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$$

因此,只有当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$f(x)$ 才是凹函数,而当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$f(x)$ 却是凸函数.

这样,如果我们设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 为任意凸 n 边形,角参数 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,

且满足 $\theta+\frac{A_i}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)(1\leqslant i\leqslant n)$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\theta+\frac{A_i}{2}\right)\leqslant n\cos\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\theta+\frac{A_i}{2}\right)}{n}\right]=$$

$$n\cos\left(\theta+\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i}{2n}\right)=n\cos\left(\theta+\frac{n-2}{2n}\pi\right)=$$

$$n\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)\right]=n\sin\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\theta+\frac{A_i}{2}\right)\leqslant n\sin\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right) \qquad ①$$

又由于

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A_i}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\theta-\frac{A_i}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\theta-\frac{A_i}{2}\right)\leqslant n\cos\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\theta-\frac{A_i}{2}\right)}{n}\right]=$$

$$n\cos\left(\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i}{2n}\right)=n\cos\left(\theta-\frac{n-2}{2n}\pi\right)=$$

$$n\cos\left[\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=n\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\right]=n\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\theta-\frac{A_i}{2}\right)\leqslant n\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right) \qquad ②$$

特别地,当取 $\theta=0$ 时,①,② 两式均化为

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{A_i}{2}\leqslant n\sin\frac{\pi}{n} \qquad ③$$

这是 ①,② 两式的共同点.

另一方面,由于

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\theta-\frac{A_i}{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\theta\cos\frac{A_i}{2}+\sin\theta\sin\frac{A_i}{2}\right)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{A_i}{2}\right)\cos\theta+\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{A_i}{2}\right)\sin\theta\leqslant$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{A_i}{2}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{A_i}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

(应用柯西不等式)$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\theta-\frac{A_i}{2}\right)\leqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{A_i}{2}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{A_i}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad ④$$

等号成立仅当

$$\tan\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{A_i}{2}}{\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{A_i}{2}} \quad ⑤$$

式 ② 与式 ④ 比较,左边相同,右边相异,且等号成立的条件也不一样,因为易知式 ② 等号成立仅当

$$\theta-\frac{A_1}{2}=\theta-\frac{A_2}{2}=\cdots=\theta-\frac{A_n}{2}\Rightarrow A_1=A_2=\cdots=A_n=\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi$$

即 $A_1A_2\cdots A_n$ 为等角凸 n 边形.

从前面的分析我们知道,余弦函数 $f(x)=\cos x$ 在区间$(0,\pi)$上凸凹并不确定,因此,$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 的最值并非一目了然.

尽管如此,在20世纪90年代,我国仍有两位先生,用初等而又优美的调整法,并为了确保最值的存在性,可将关于 $\triangle ABC$ 的余弦和不等式,从广义上推广为:

推广 3 设 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内角满足条件 $0\leqslant A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_n\leqslant\pi$,则

$$\frac{q}{2}-n\geqslant\sum_{i=1}^{n}\cos A_i\geqslant\begin{cases}1+(n-1)\cos\dfrac{(n-2)\pi}{n-1},3\leqslant n\leqslant 6\\ n\cos\dfrac{(n-2)\pi}{n},n\geqslant 7\end{cases} \quad (\mathrm{J})$$

但证明太复杂,略去.

综述

9 元数推广

现在,让我们再回顾不等式(A):

对于任意实数 x,y,z 与任意 $\triangle ABC$,有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$$

由于 $A+B+C=\pi$,因此我们将 π 从3个角 A,B,C 之和$A+B+C=\pi$,细分成多个角 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n(3\leqslant n\in\mathbf{N})$ 之和$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i=\pi$.允许吗?如果允许,那权系数 x,y,z 又应当怎样随之变化和约定呢?

其实,早在1957年,N. Ozeki 在研究著名的 Erdös - Mordell 不等式的多边形推广时,就建立了式(A) 的多元推广,后来,在1961年,Lenhard 又重新发现了它:

推广 4(Ozeki - Lenhard 不等式) 设 $\varphi_i\in(0,\pi)$,$x_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n;3\leqslant n\in\mathbf{N})$,且$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i=\pi$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\varphi_i \quad (\mathrm{K})$$

其中约定 $x_{n+1}\equiv x_1$.

显然，当 $n=3$ 时，式(K)化为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant 2x_1x_2\cos\varphi_1+2x_2x_3\cos\varphi_2+2x_3x_1\cos\varphi_3 \qquad (*)$$

这与式(A)结构略有差异，而实质上是等价的.

下面是冷岗松老师对式(K)提出的简洁奇妙的证明.

证明 从某点 O 出发作 n 条射线 OA_1，$OA_2,\cdots,OA_n$，使得 $\angle A_iOA_{i+1}=\varphi_i+\frac{\pi}{n}$，其中 $A_{n+1}=A_1$，再在这 n 条射线上截取线段 $OA_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$，这样便得到一个 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，现记 $A_iA_{i+1}=a_i$，这个 n 边形的面积为 F，在 $\triangle A_iOA_{i+1}$ 中应用余弦定理可得

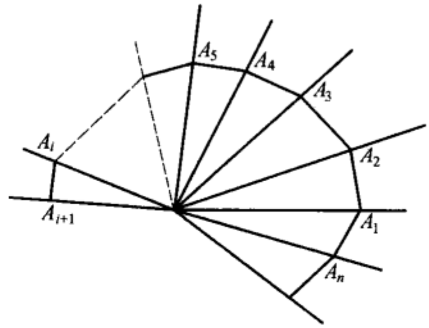


图 1

$$a_i^2=x_i^2+x_{i+1}^2-2x_ix_{i+1}\cos\angle A_iOA_{i+1}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2=2\sum_{i=1}^n x_i^2-2\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right) \qquad ①$$

又应用外森比克不等式的多边形推广有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2\geqslant 4F\tan\frac{\pi}{n} \qquad ②$$

由式①和②得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i^2 &\geqslant 2F\tan\frac{\pi}{n}+\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)=\\&\left(2\sum_{i=1}^n S_{\triangle A_iOA_{i+1}}\right)\tan\frac{\pi}{n}+\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)=\\&\left[\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}\sin\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\right]\tan\frac{\pi}{n}+\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)=\\&\sum_{i=1}^n\left[x_ix_{i+1}\sin\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\tan\frac{\pi}{n}+x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\right]=\\&\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}\left[\sin\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\cos\left(\varphi_i+\frac{\pi}{n}\right)\right]=\\&\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}\cos\varphi_i\end{aligned}$$

即式(K)成立，等号成立仅当：

(1) 当 $n=3$ 时

$$\frac{x_1}{\cos\varphi_2}=\frac{x_2}{\cos\varphi_3}=\frac{x_3}{\cos\varphi_1}$$

(2) 当 $n\geqslant 4$ 时，$\varphi_i=\frac{\pi}{n}$，且 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

仔细欣赏上述美妙证法，其特点有三：(i) 几何构图出奇不意；(ii) 引理应用巧妙自

然;(iii) 运算化简明快.

其实,早在20世纪单墫老师在《初等数学论丛》上采用Lenhard配方法证明了式(K),不过,其证法倍显高超深奥.

式(K)虽然将式(A)从3元推广到了 n 元.但它还显得推广得不够彻底,下面我们将式(K)又推广为:

推广5 设 $\alpha_i \in (0,\pi)$, $\varphi_i \in (0,\pi)$, $x_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n;3 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \pi$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + x_{i+1}^2)\cot\alpha_i \geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\left[x_ix_{i+1}\csc\alpha_i\cos\left(\varphi_i - \alpha_i + \frac{\pi}{n}\right)\right] \tag{L}$$

显然,当取 $\alpha_i = \frac{\pi}{n}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时,式(L)可化为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cot\frac{\pi}{n} \geqslant \left(\csc\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\varphi_i \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geqslant \left(\sec\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\varphi_i$$

这正好是式(K).

证明 应用外森比克不等式在多边形中的加权推广(杨学枝创建)有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cot\alpha_i \geqslant 4F = 2\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\sin\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) \tag{③}$$

由前面的结论有

$$a_i^2 = x_i^2 + x_{i+1}^2 - 2x_ix_{i+1}\cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow$$

$$a_i^2\cot\alpha_i = (x_i^2 + x_{i+1}^2)\cot\alpha_i -$$

$$2x_ix_{i+1}\cot\alpha_i\cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cot\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + x_{i+1}^2)\cot\alpha_i -$$

$$2\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cot\alpha_i\cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) \tag{④}$$

由①和②得

$$P_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + x_{i+1}^2)\cot\alpha_i \geqslant$$

$$2\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\left[\sin\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) + \cot\alpha_i\cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right)\right] =$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_ix_{i+1} \tag{⑤}$$

其中

$$t_i = \sin\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) + \cot \alpha_i \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) =$$
$$\csc \alpha_i\left[\sin \alpha_i \sin\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) + \cot \alpha_i \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right)\right] =$$
$$(\csc \alpha_i)\cos\left(\varphi_i - \alpha_i + \frac{\pi}{n}\right) \quad ⑥$$

代入式⑤即得式(L).

10　绝妙推广

推广5是巧妙应用杨学校先生创建的成果将式(A)推广成式(L).20世纪90年代,我国的叶军老师施展高超的技巧,将式(A)精雕细刻,造型成一件绝妙的"工艺品":

推广6(叶军)　设实数 $\varphi_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i = (2k+1)\pi(n \in \mathbf{N}, n \geqslant -3, k \in \mathbf{Z})$.正数 $\alpha_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,满足 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \pi$,则对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$(约定 $x_{n+1} \equiv x_1$),有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + x_{i+1}^2)\cot \alpha_i \geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i x_{i+1}\frac{\cos \varphi_i}{\sin \alpha_i}\right) \quad (M)$$

其中等号成立仅当

$$x_1x_2\frac{\sin \varphi_1}{\sin \alpha_1} = x_2x_3\frac{\sin \varphi_2}{\sin \alpha_2} = \cdots = x_{n-1}x_n\frac{\sin \varphi_{n-1}}{\sin \alpha_{n-1}} = x_nx_1\frac{\sin \varphi_n}{\sin \alpha_n} \quad ①$$

式(L)(笔者自建)与式(M)两者相比较:

(1) 如果令 $\theta_i = \varphi_i - \alpha_i + \frac{\pi}{n}(1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\theta_i = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \pi = (2k+1)\pi$.这样,式(L)和式(G)在左、右两边的结构完全一样.

(2) 但是,式(M)中 φ_i 角的定义比式(L)中 φ_i 的定义宽广,权系数也是如此.

(3) 论等号成立的条件,式(M)也比式(L)优.

那么,应当用何种技巧证明式(M)呢?请学习欣赏叶军老师的绝妙证明:

证明　对 n 用归纳法.

(1) 当 $n = 3$ 时,由 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ 及 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ 知,可将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 视为某三角形三内角,设这三角形的面积为 Δ,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 所对边的长依次为 a, b, c,将边角关系式

$$\begin{cases}\cot \alpha_1 = (b^2 + c^2 - a^2)/4\Delta \\ \cot \alpha_2 = (c^2 + a^2 - b^2)/4\Delta \\ \cot \alpha_3 = (a^2 + b^2 - c^2)/4\Delta\end{cases}$$

以及面积公式

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin \alpha_3 = \frac{1}{2}ca\sin \alpha_2 = \frac{1}{2}bc\sin \alpha_1$$

代入得

$(x_1^2+x_2^2)(b^2+c^2-a^2)+(x_2^2+x_3^2)(c^2+a^2-b^2)+(x_3^2+x_1^2)(a^2+b^2-c^2)\geqslant$

$4(bcx_1x_2\cos\varphi_1+cax_2x_3\cos\varphi_3+abx_3x_1\cos\varphi_3)\Rightarrow$ ②

$(bx_1)^2+(cx_2)^2+(ax_3)^2\geqslant 2(bx_1)(cx_2)\cos\varphi_1+$

$2(cx_2)(ax_3)\cos\varphi_2+2(ax_3)(bx_1)\cos\varphi_3$ ③

由三角母不等式知，式 ③ 显然成立，等号成立仅当

$(bx_1)(cx_2)\sin\varphi_1=(cx_2)(ax_3)\sin\varphi_2=(ax_3)(bx_1)\sin\varphi_3\Rightarrow$

$$x_1x_2\frac{\sin\varphi_1}{a}=x_2x_3\frac{\sin\varphi_2}{b}=x_3x_1\frac{\sin\varphi_3}{c}\Rightarrow$$

$$x_1x_2\frac{\sin\varphi_1}{\sin\alpha_1}=x_2x_3\frac{\sin\varphi_2}{\sin\alpha_2}=x_3x_1\frac{\sin\varphi_3}{\sin\alpha_3} \quad ④$$

(2) 假设当 $n=k\geqslant 3$ 时，式(M) 成立，则当 $n=k+1$ 时，由 $n=3$ 和归纳假设有

$$\sum_{i=1}^{k+1}2\left(x_ix_{i+1}\frac{\cos\varphi_i}{\sin\alpha_i}\right)=2\left[x_1x_2\frac{\cos\varphi_1}{\sin\alpha_1}+x_2x_3\frac{\cos\varphi_2}{\sin\alpha_2}+x_3x_1\frac{\cos[(2k+1)\pi-\varphi_1-\varphi_2]}{\sin(\pi-\alpha_1-\alpha_2)}\right]+$$

$$2\left[x_3x_4\frac{\cos\varphi_3}{\sin\alpha_3}+\cdots+x_{k+1}x_1\frac{\cos\varphi_{k+1}}{\sin\alpha_{k+1}}+x_1x_3\frac{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\right]\leqslant$$

$$[(x_1^2+x_2^2)\cot\alpha_1+(x_2^2+x_3^2)\cot\alpha_2+$$

$$(x_3^2+x_1^2)\cot(\pi-\alpha_1-\alpha_2)]+$$

$$[(x_3^2+x_4^2)\cot\alpha_3+\cdots+(x_{k+1}^2+x_1^2)\cot\alpha_{k+1}+$$

$$(x_1^2+x_3^2)\cot(\alpha_1+\alpha_2)]=$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(x_i^2+x_{i+1}^2)\cot\alpha_i \quad ⑤$$

式 ⑤ 等号成立仅当

$$x_1x_2\frac{\sin\varphi_1}{\sin\alpha_1}=x_2x_3\frac{\sin\varphi_2}{\sin\alpha_2}=x_3x_1\frac{\sin[(2k+1)\pi-\varphi_1-\varphi_2]}{\sin(\pi-\alpha_1-\alpha_2)}$$

及
$$x_3x_4\frac{\sin\varphi_3}{\sin\alpha_3}=\cdots=x_{k+1}x_1\frac{\sin\varphi_{k+1}}{\sin(\alpha_k+1)}=x_1x_3\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

即
$$x_1x_2\frac{\sin\varphi_1}{\sin\alpha_1}=x_2x_3\frac{\sin\varphi_2}{\sin\alpha_2}=\cdots=x_kx_{k+1}\frac{\sin\varphi_k}{\sin\alpha_k}=x_{k+1}x_1\frac{\sin\varphi_{k+1}}{\sin\alpha_{k+1}}$$

至此，我们证明了 $n=k+1$ 时，式(M) 也成立.

综合(1) 和(2) 知，式(M) 对自然数 $n\geqslant 3$ 均成立.

11 美妙应用

三角母不等式(A) 其应用的重要性和广泛性是众所周知的，现在我们介绍它的推广式(M) 的美妙应用.

在式(M) 中令 $n=3,k=0,x_1,x_2,x_3$ 均为 1；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 依次取 $\triangle ABC$ 的三内角 A，B,C；$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 依次取 $\triangle A'B'C'$ 即得

$$\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\frac{\cos A'}{\sin A}+\frac{\cos B'}{\sin B}+\frac{\cos C'}{\sin C} \tag{a}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

显然,式(a) 颇具趣味性.不仅如此,式(a) 还可以推广为:

在两个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 中有

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\left(\frac{A_i}{n-2}\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\left(\frac{A'_i}{n-2}\right)}{\sin\left(\frac{A_i}{n-2}\right)} \tag{b}$$

当 n 为奇数时,还有

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\left(\frac{A_i}{n-2}\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos A'_i}{\sin\left(\frac{A_i}{n-2}\right)} \tag{c}$$

如果我们设 $\alpha_i>0,\beta_i>0(2\leqslant n\in\mathbf{N},1\leqslant i\leqslant n)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=\pi$,那么在式(M) 中令 $x_i=1,\varphi_i=\beta_i(1\leqslant i\leqslant n)$,立即得到

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\cot\beta_i}{\sin\alpha_i} \tag{d}$$

由式(M) 知,式(d) 中的条件 $\beta_i>0$ 可放宽为实数的情形.

式(d) 即为由蒙古提供的第 29 届 IMO 的一道预选题,当年杨学枝老师巧妙地应用它,建立了外森比克不等式在多边形中的加权推广

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cot\alpha_i\geqslant4\Delta$$

叶军老师应用自己创建的式(M),又建立了一个非常漂亮的题目:

设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,$\triangle A'B'C'$ 为任意三角形,对于任意实数 x,y,z 有

$$x^2\tan A+y^2\tan B+z^2\tan C\geqslant2yz\sin A'+2zx\sin B'+2xy\sin C' \tag{e}$$

证明 应用式(M) 有

$$\begin{aligned}2\sum yz\sin A'&=2\sum yz\frac{\cos(\pi-A'-A)}{\sin A}+2\sum yz\cot A\cos A'\leqslant\\&\sum(y^2+z^2)\cot A+\left(\prod\cot A\right)\left(\sum2yz\tan B\tan C\cos A'\right)\leqslant\\&\sum(y^2+z^2)\cot A+\left(\prod\cot A\right)\sum x^2\tan^2A=\\&\left(\sum\cot B\cot C\right)\sum x^2\tan A=\sum x^2\tan A\Rightarrow\\&\sum x^2\tan A\geqslant2\sum yz\sin A'\end{aligned}$$

其中等号成立的充要条件是

$$yz\frac{\sin(A+A')}{\sin A}=zx\frac{\sin(B+B')}{\sin B}=xy\frac{\sin(C+C')}{\sin C}$$

及

$$yz\tan B\tan C\sin A'=zx\tan C\tan A\sin B'=xy\tan A\tan B\sin C'$$

综合化简后得

$$\begin{cases} yz\cot A\sin A' = zx\tan B\sin B' = xy\cot C\sin C' \\ yz\cos A' = zx\cos B' = xy\cos C' \end{cases}$$

可见,式(e)是一个有一定难度的趣味题,其证明的技巧性较高,我们在后面还要利用它建立三角形正弦和不等式的加权推广.

最后指出:三角母不等式(A)已被数学专家们推广到了 $n(3 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 维空间.其中,3维空间中关于四面体结果为:

设 $\theta_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 是四面体的二面角,则对任意实数 x_1, x_2, x_3, x_4 有

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \geqslant 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4}^{4} x_i x_j \cos \theta_{ij} \tag{f}$$

12　妙题新编

我们在前面介绍的一系列三角不等式,其难度与妙度与CMO、IMO试题基本相当,在本小节,我们新编几道三角妙题,并作赏析探讨.

题5　设常数 $0 < p \leqslant 4q$,$\triangle ABC$ 为锐角三角形,记

$$P = \left(p\cos A + \frac{q}{\cos A}\right)\left(p\cos B + \frac{q}{\cos B}\right)\left(p\cos C + \frac{q}{\cos C}\right)$$

$$T = \left(p\cos A + \frac{q}{\cos B}\right)\left(p\cos B + \frac{q}{\cos C}\right)\left(p\cos C + \frac{p}{\cos A}\right)$$

求证:

$$P \geqslant T \geqslant \left(\frac{p + 4q}{2}\right)^3 \tag{a_1}$$

证明　(1)我们先证 $P \geqslant T$,为此,简记

$$(x, y, z) = (\cos A, \cos B, \cos C) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P = (px^2 + q)(py^2 + q)(pz^2 + q)/(xyz) \\ T = (pxy + q)(pyz + q)(pzx + q)/(xyz) \end{cases} \tag{①}$$

应用柯西不等式有

$$\begin{cases} (px^2 + q)(py^2 + q) \geqslant (pxy + q)^2 \\ (py^2 + q)(pz^2 + q) \geqslant (pyz + q)^2 \\ (pz^2 + q)(px^2 + q) \geqslant (pzx + q)^2 \end{cases} \Rightarrow P^2 \geqslant T^2 \Rightarrow P \geqslant T \tag{②}$$

等号成立仅当 $x = y = z$.

(2)我们再证式(a_1)右边成立,并证 $t^3 = xyz$,于是

$$\begin{cases} (px^2 + q)(py^2 + q) \geqslant (pxy + q)^2 \\ (pz^2 + q)(pt^2 + q) \geqslant (pzt + q)^2 \end{cases} \Rightarrow (pt^2 + q)p \geqslant [(pxy + q)(pzt + q)]^2 \geqslant$$

$$(p\sqrt{xyzt} + q)^4 = (p\sqrt{t^3 \cdot t} + q)^4 = (pt^2 + q)^4 \Rightarrow$$

$$p \geqslant (pt^2 + q)^3 = [p(x^2y^2z^2)^{\frac{1}{3}} + q]^3 \tag{③}$$

等号成立仅当 $x=y=z$.

应用式③有

$$T=\frac{1}{t^3}(pxy+q)(pyz+q)(pzx+q)\geqslant\frac{1}{t^3}[p(xyz)^{\frac{2}{3}}+q]^3=\frac{1}{t^3}(pt^2+q)^3\Rightarrow$$

$$T^{\frac{1}{3}}\geqslant\frac{pt^2+q}{t}=pt+\frac{q}{t}= \tag{4}$$

$$pt+4q\left(\frac{1}{4t}\right)(\text{应用加权不等式})\geqslant$$

$$(p+4q)\left[t^p\cdot\left(\frac{1}{4t}\right)^{4q}\right]^{\frac{1}{p+4q}}=$$

$$(p+4q)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{4q-p}{p+4q}} \tag{5}$$

由于

$$\left.\begin{array}{l}t=(xyz)^{\frac{1}{3}}=(\prod\cos A)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{2}\\0<p\leqslant4q\Rightarrow4q-p\geqslant0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}T^{\frac{1}{3}}\geqslant\frac{p+4q}{2}\\P\geqslant T\end{array}\right\}\Rightarrow P\geqslant T\geqslant\left(\frac{p+4q}{2}\right)^3$$

即式(a_1)成立,等号成立仅当

$$x=y=z\Rightarrow\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$$

注 (1)观察式(a_1)的外形结构很容易让人联想到应用平均值不等式消去 $\cos A,\cos B,\cos C$,即

$$T=\prod\left(p\cos A+\frac{q}{\cos B}\right)\geqslant8\prod\left(\sqrt{pq\frac{\cos A}{\cos B}}\right)=(2\sqrt{pq})^3$$

等号成立的条件是

$$\cos A=\cos B=\cos C=\sqrt{\frac{q}{p}}\Rightarrow\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$$

及

$$4q=p$$

这与题意相违.

(2)式(a_1)可从指数方面推广为:

推广7 设 $p,q,x,y,z,\alpha,\beta,\gamma$ 均为正数,且满足 $\alpha+\beta+\gamma=1$.

$$m=[(\alpha x)^{\alpha}\cdot(\beta y)^{\beta}\cdot(\gamma z)^{\gamma}]\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}\right)<1,q\geqslant m^2p>0$$

则对锐角 $\triangle ABC$ 有

$$p_{\alpha}=\left(p\cos A+\frac{q}{\cos A}\right)^{\alpha}\left(p\cos B+\frac{q}{\cos B}\right)^{\beta}\left(p\cos C+\frac{q}{\cos C}\right)^{\gamma}\geqslant mp+\frac{q}{m} \tag{a_2}$$

等号何时成立?

特别地,当取 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3},x=y=z=1$ 时,$m=\frac{1}{2}<1$,式(a_2)化为

$$p_{\alpha}\geqslant\frac{p+4q}{2}\Rightarrow p_{\alpha}^3\geqslant\left(\frac{p+4q}{3}\right)^3 \tag{6}$$

这即为式(a_1).

证明　由式(G)有

$$t=(\cos A)^{\alpha}(\cos B)^{\beta}(\cos C)^{\gamma}\leqslant m<1 \quad ⑦$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}x\csc A=y\csc B=z\csc C\\ \alpha\tan A=\beta\tan B=\gamma\tan C\end{cases} \quad ⑧$$

应用赫尔特不等式有

$$p_{\alpha}\geqslant(p^{\alpha+\beta+\gamma})t+\frac{q^{\alpha+\beta+\gamma}}{t}= \quad ⑨$$

$$pt+\frac{q}{t}=pt+\frac{q}{m^2}\left(\frac{m^2}{t}\right)\text{(应用加权不等式)}\geqslant$$

$$\left(p+\frac{q}{m^2}\right)\left[t^{p}\cdot\left(\frac{m^2}{t}\right)^{\frac{q}{m^2}}\right]^{\frac{1}{p+q/m^2}}=$$

$$\left(p+\frac{q}{m^2}\right)(m^{2q}\cdot t^{m^2p-q})^{\frac{1}{pm^2+q}} \quad ⑩$$

由

$$\left.\begin{matrix}0<pm^2\leqslant q\Rightarrow pm^2-q\leqslant 0\\ t\leqslant m<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$p_{\alpha}\geqslant\left(p+\frac{q}{m^2}\right)(m^{2q}\cdot m^{pm^2-q})^{\frac{1}{pm^2+q}}=\left(p+\frac{q}{m^2}\right)m\Rightarrow p_{\alpha}\geqslant mp+\frac{q}{m}$$

即式(a_2)成立.

式⑨等号成立仅当

$$p\cos A:q\sec A=p\cos B:q\sec B=p\cos C:q\sec C\Rightarrow\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3} \quad ⑪$$

式⑩等号成立仅当 $t=\frac{m^2}{t}\Rightarrow t=m\Rightarrow$ 式⑧成立.

故式(a_2)等号成立仅当$\triangle ABC$为正三角形,且$x=y=z,\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3},m=\frac{1}{2}$.

(3)其实,式(a_2)虽然将(a_1)进行了漂亮的指数推广,但它还推广得不够彻底,我们还可将式(a_1)进行漂亮的双重指数推广:

推广 8　设$\triangle ABC$为锐角三角形,$p,q,x,y,z,\alpha,\beta,\gamma,m,n,k$均为正数,且满足条件$\alpha+\beta+\gamma=1$.

$$m=\prod(\alpha x)^{\alpha}\cdot\frac{\sum x^2}{2xyz}<1$$

$$kq\geqslant npm^{n+k}>0$$

则有

$$p_{\alpha}(n,k)=\prod(p\cos^{n}A+q\sec^{k}A)^{\alpha}\geqslant m^{n}p+\frac{q}{m^{k}} \quad (a_3)$$

显然,当$n=k=1$时,式(a_3)化为式(a_2).

综

述

略证 简记

$$\begin{cases} t = \prod (\cos A)^{\alpha} \leqslant m < 1 \\ s = m^n p + q/m^k \end{cases}$$

应用前面的结论有

$$p_\alpha(n,k) \geqslant pt^n + \frac{q}{t^k} = m^n p \cdot \left(\frac{t}{m}\right)^n + \frac{q}{m^k}\left(\frac{m}{t}\right)^k \text{(应用加权不等式)} \geqslant$$

$$s\left[\left(\frac{t}{m}\right)^{npm^n} \cdot \left(\frac{m}{t}\right)^{kq/m^k}\right]^{\frac{1}{s}} =$$

$$s\left(\frac{m}{t}\right)^{\theta} \geqslant s\text{(其中 } \theta = \frac{kq - npm^{n+k}}{m^k \cdot s} \geqslant 0\text{)} \Rightarrow$$

$$p_\alpha(n,k) \geqslant s = m^n p + \frac{q}{m^k} \qquad ⑫$$

等号成立的条件同上.

从上述证法过程知,为了应用加权不等式证明式(a_3),式 ⑫ 变形得十分巧妙.

题 6 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则有

$$\left.\begin{matrix} P \\ T \end{matrix}\right\} \geqslant \left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad (b_1)$$

其中 $p = \prod (\sin A + 2\sec A)\, T = \prod (\sin A + 2\sec B)$

式(b_1)与式(a_1)左边结构有相似之处,故采取同样的证法技巧.

证明 记 $s = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$,及

$$\begin{cases} x = (\sin A \sin B \sin C)^{1/3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = (\cos A \cos B \cos C)^{1/3} \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{y} = (\tan A \tan B \tan C)^{1/3}$$

由于 $\sum \tan A = \prod \tan A = t^3 \Rightarrow t^3 \geqslant 3t \Rightarrow t \geqslant \sqrt{3}$

应用赫尔特不等式均可得

$$\left.\begin{matrix} P \\ T \end{matrix}\right\} \geqslant \left(x + \frac{2}{y}\right)^3 \qquad ⑬$$

但

$$x + \frac{2}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + 4\left(\frac{1}{2y}\right) \geqslant s\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2y}\right)^4\right]^{1/s} \geqslant$$

$$s\left[(2y)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2y}\right)^4\right]^{\frac{1}{s}} = s\left(\frac{1}{2y}\right)^{\frac{8-\sqrt{3}}{2s}} \geqslant s \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} P \\ T \end{matrix}\right\} \geqslant (s)^3 = \left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

自然地,式(b_1)中的部分不等式

$$p \geqslant \left(4+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

可从指数方面推广为:

推广 9 设 $p,q,\alpha,\beta,\gamma,n,k$ 均正数,且 $\alpha,\beta,\gamma \in (0,\frac{1}{2})$, $kq \geqslant np > 0$, $\triangle ABC$ 为锐角三角形,记

$$t_0 = \left[\left(\frac{1}{1-2\alpha}\right)^{1-2\alpha}\left(\frac{1}{1-2\beta}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{1-2\gamma}\right)^{1-2\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y_0 = [(\alpha x)^\alpha(\beta y)^\beta(\gamma z)^\gamma]\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}\right)$$

$$x_0 = \max\prod(\sin A)^\alpha(\text{有多个,后文见})$$

$$s = px_0^n + \frac{q}{y_0^k}$$

则有

$$H = \prod\left(p\sin^n A + \frac{q}{\cos^k A}\right)^\alpha \geqslant s\left(\frac{t_0 y_0}{x_0}\right)^\theta \tag{b$_2$}$$

其中 $\theta = npx_0^n/s$.

式(b_2)与式(a_3)相比较,其右边更复杂,自然没有式(a_3)明朗.

证明 设 $x = \prod(\sin A)^\alpha$,则 $x \leqslant x_0 < 1$,且由于正弦和不等式 $\sum \sin A \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 的加权推广将在下文中介绍,它有多个,因此应用加权不等式就可推导出多个结论

$$x = \prod(\sin A)^\alpha \leqslant x_0 < 1$$

因此 x_0 有多个表达式,且上式等号成立的条件也不唯一.

应用我们前面建立的结论有

$$y = \prod(\cos A)^\alpha \leqslant y_0 < 1$$

现在,我们再设 $t = \prod(\tan A)^\alpha = \frac{x}{y} \neq \frac{x_0}{y_0}$. $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1 \in (0,1)$,且 $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 1$,应用三角恒等式有

$$\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C =$$

$$\sum \alpha_1\left(\frac{\tan A}{\alpha_1}\right) \geqslant \prod\left(\frac{\tan A}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}(\text{应用加权不等式}) \Rightarrow$$

$$\prod(\tan A)^{1-\alpha_1} \geqslant \prod\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \tag{14}$$

令

$$\left.\begin{array}{l}(1-\alpha_1,1-\beta_1,1-\gamma_1) = (2\alpha,2\beta,2\gamma)\\ \alpha_1,\beta_1,\gamma_1 \in (0,1),\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha,\beta,\gamma \in (0,\frac{1}{2})\\ \alpha+\beta+\gamma = 1\end{array}\right. \Rightarrow \prod(\tan A)^{2\alpha} \geqslant \prod\left(\frac{1}{1-2\alpha}\right)^{1-2\alpha} \Rightarrow$$

$$t = \prod (\tan A)^{\alpha} \geqslant t_0 = \left[\prod\left(\frac{1}{1-2\alpha}\right)^{1-2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} > 1$$

于是

$$H\left(p\sin^n A + \frac{q}{\cos^k A}\right)^{\alpha} \geqslant px^n + \frac{q}{y^k}\text{(应用赫尔特不等式)} =$$

$$px_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \frac{q}{y_0^k}\left(\frac{y_0}{y}\right)^k \geqslant$$

$$s\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{npx_0^n}\cdot\left(\frac{y_0}{y}\right)^{kq/y_0^k}\right]^{\frac{1}{s}} =$$

$$s\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{npx_0^n}\cdot\left(\frac{y_0}{y}\right)^{\left(\frac{kq}{y_0^k}-npx_0^n\right)}\cdot\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{npx_0^n}\right]^{\frac{1}{s}} \geqslant$$

$$s\left[t_0^{npx_0^n}\cdot\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{npx_0^n}\right]^{\frac{1}{s}} \Rightarrow H \geqslant s\left(\frac{t_0 y_0}{x_0}\right)^{npx_0^n/s}$$

即式(b_2)成立.

如果我们选取好适当的系数和指数,可使 $t_0 = x_0/y_0$,将式(b_2)简化为 $H \geqslant S$,比如式(b_1)就是一个例子.

题 7 对于任意 $\triangle ABC$ 有

$$\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \geqslant \frac{5}{2} \qquad (c_1)$$

分析 为了书写方便,我们作代换

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$$

并记

$$f = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}$$

于是式(c_1)化为

$$f \geqslant \frac{5}{2} \qquad (c'_1)$$

从式(c_1)的外形结构上看,使我们联想到 3 元对称不等式,有

$$f \geqslant \sqrt{3(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)} \qquad ⑮$$

但

$$s = \sum\cos^2\alpha = \sum\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sum\cos 2\alpha = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sum\cos A \leqslant$$

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow s \leqslant \frac{9}{4} \Rightarrow f \geqslant \frac{5}{2}$$

因此这种思路行不通，我们得另觅新路.

此外，一般对称不等式等号成立的条件是各元素均相等，即 $\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$，这时

$$f = 3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{5}{2}$$

这时式(c_1)取不到等号，表明我们得施行特殊技巧才能证明本题.

证法1 不妨设

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha, \beta \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{6}$$

固定 γ，由于

$$\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta} = 2\cos\gamma\left(\frac{\cos^2\gamma}{\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta)} + \sin\gamma\right)$$

及

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta)]$$

则

$$f = \frac{\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta)}{2\cos\gamma} + 2\cos\gamma\left(\sin\gamma + \frac{\cos^2\gamma}{\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta)}\right) =$$

$$\sin 2\gamma + \frac{\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta)}{2\cos\gamma} + \frac{2\cos^3\gamma}{\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta)}$$

因为

$$\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta) \leqslant \sin\gamma + 1 \leqslant \frac{3}{2} \leqslant 2\cos^2\gamma$$

有

$$f \geqslant \sin 2\gamma + \frac{1 + \sin\gamma}{2\cos\gamma} + \frac{2\cos^3\gamma}{1 + \sin\gamma}\text{(用依函数增减性验证)} =$$

$$2\cos\gamma + \frac{1 + \sin\gamma}{2\cos\gamma} = 2\cos\gamma + \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

令 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$，则

$$f \geqslant 2\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cot\theta = \frac{4\tan^2\theta}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\tan\theta} =$$

$$\frac{5}{2} + \frac{(1 - \tan\theta)(5\tan^2\theta - 4\tan\theta + 1)}{2(1 + \tan^2\theta)\tan\theta}$$

由于 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \tan\theta \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$，因此 $f \geqslant \frac{5}{2}$，即式(c_1)成立，等号成立仅当

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = 0$$

即

$$A = B = \frac{\pi}{2}, c = 0$$

证法2 作代换

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)=(\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma)\\ \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$ab+bc+ca=1\Rightarrow \tag{16}$$

$$f=\sum\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}=\sum\frac{1}{\tan\gamma+\tan\beta}\Leftrightarrow \tag{17}$$

$$f=\sum\frac{1}{b+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \tag{18}$$

下面证明 $f\geqslant\frac{5}{2}$,记

$$f(a,b,c)=\sum\frac{1}{b+c}$$

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c\Rightarrow c\geqslant\frac{a+b}{2},c'=\frac{1}{a+b},c=\frac{1-ab}{a+b}$,我们先证明

$$f(0,a+b,c')\leqslant f(a,b,c)\Leftrightarrow \tag{19}$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c'}+\frac{1}{c'}\leqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\Leftrightarrow \tag{20}$$

$$ab(a+b)^2\leqslant 2(1-ab) \tag{21}$$

但

$$2(1-ab)=2c(a+b)\geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b)=$$

$$(a+b)^2\geqslant(a+b)^2ab(\text{因 }ab\leqslant 1)$$

因此式⑲成立,于是

$$f(a,b,c)\geqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b=x+\frac{1}{x} \tag{22}$$

其中

$$x=(a+b)+\frac{1}{a+b}\geqslant 2>1$$

且函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是增函数(因 $g'(x)=1-\frac{1}{x^2}>0$),所以

$$f(a,b,c)\geqslant g(x)\geqslant g(x)_{\min}=g(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow f\geqslant\frac{5}{2}$$

仅当 $a=0,b=c=1$ 时取等号.

即式 (c_1) 成立,等号成立仅当 A,B,C 中一个取 0,两个取 $\frac{\pi}{2}$.

证法 3 接证法 2 所设,如果

$$a,b,c>\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow ab+bc+ca>1$$

与 $ab+bc+ca=1$ 矛盾.

因此 a,b,c 中必有一个小于等于$\frac{\sqrt{3}}{3}$,由对称性,不妨设 $b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,注意到

$$ab+bc+ca=1\Rightarrow(a+b)(b+c)=b^2+\sum ab=1+b^2\Rightarrow$$

$$s = \sum \frac{1}{b+c} = \frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{c+a} = \frac{a+2b+c}{1+b^2} + \frac{1}{a+c} =$$

$$\frac{2b}{1+b^2} + \frac{a+c}{1+b^2} + \frac{1}{a+c}$$

固定 b,求出

$$F = \frac{a+c}{1+b^2} + \frac{1}{a+c}$$

的最小值.令 $x = a + c$,则

$$F = f(x) = \frac{x}{1+b^2} + \frac{1}{x}$$

在 $x \geqslant \sqrt{1+b^2}$ 时单调递增,而

$$1 - b(a+c) = ac \leqslant \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{4} \geqslant 1 - bx \Rightarrow x \geqslant 2\sqrt{b^2+1} - 2b \\ \text{又} \quad b \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b^2 + 1 \geqslant 4b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x \geqslant \sqrt{b^2+1} + (\sqrt{b^2+1} - 2b) \geqslant \sqrt{b^2+1} \Rightarrow$$

$$s = \frac{2b}{1+b^2} + f(x) \geqslant \frac{2b}{1+b^2} + f(2\sqrt{b^2+1} - 2b) \geqslant$$

$$\frac{2}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{2}(\sqrt{b^2+1} + b)$$

又令

$$y = \sqrt{b^2+1} - b \Rightarrow \begin{cases} 0 < y \leqslant 1 \\ b = \dfrac{1-y^2}{2y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$s \geqslant \frac{2}{y+b} + \frac{1}{2y} = \frac{9y^2+1}{2y(1+y^2)} + \frac{5}{2} + \frac{(1-y)[5(y-\frac{2}{5})^2 + \frac{1}{5}]}{2y(1+y^2)} \geqslant \frac{5}{2}$$

所以式 ⑯ 成立,等号成立仅当 a,b,c 中 1 个取 0,两个取 1(即 $b=0, a=c=1$).

注 (1) 对于不等式(c_1),按照常规思路是行不通的,得如上述几种证法采取非常手段,特殊技巧方能奏效.

(2) 若对式(c_1) 作变形,有

$$f = \sum \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sum\left(\cos\frac{B}{2}\right)^2\left(\cos\frac{C}{2}\right)^2}{\prod\cos\frac{A}{2}} \leqslant$$

$$\frac{\left[\sum\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2\right]^2}{3\prod\cos\frac{A}{2}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^2\prod\sec\frac{A}{2}$$

因此 f 只有最小值$\frac{5}{2}$,而无最大值.

不过,式(c_1) 亦可完善成双向不等式

$$\frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^2\prod\sec\frac{A}{2}\geqslant f\geqslant\frac{5}{2}\tag{c_2}$$

(3) 从三角意义上讲,式(c_1) 还有配对式

$$\sum\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\geqslant\frac{3}{2}\tag{23}$$

$$\sum\sqrt{\frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}}\geqslant\frac{3}{\sqrt[4]{3}}\tag{24}$$

$$\sum\frac{\tan B\tan C}{\tan A}\geqslant 3\sqrt{3}\tag{25}$$

$$\sum\frac{\cot B\cot C}{\cot A}\geqslant\sqrt{3}\tag{26}$$

$$\sum\frac{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}\geqslant 3\sqrt{3}\tag{27}$$

关于式 ㉓ ~ ㉗ 的证明留在下文探讨.

题 8 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则有

$$(\sec A\pm 1)(\sec B\pm 1)(\sec C\pm 1)\geqslant(2\pm 1)^3\tag{d_1}$$

分析 一看便知,式(d_1) 是由两个"雌雄" 不等式

$$\begin{cases}T=(\sec A+1)(\sec B+1)(\sec C+1)\geqslant 3^3 & ㉘\\ P=(\sec A-1)(\sec B-1)(\sec C-1)\geqslant 1 & ㉙\end{cases}$$

"鸳鸯并举" 而成,自然㉘,㉙两式不仅"门当户对",互为配对,而且具备美的三要素——简洁美、对称美、和谐美.

如果不畏艰辛,就能从参数、角参数、指数、元数、几何 5 个方面,建立式(d_1) 的综合推广,使之登上"珠峰",环视"世界风光".这点,笔者在过去的专文中作了详细论述.

另外,从三角意义上讲,正弦与余弦,正切与余切,正割与余割,分别互相对应,因此,我们马不停蹄,趁热打铁,探讨正弦和与正切和不等式,使之在内容上成为本文续篇.

正弦和不等式初探

邓寿才

我们知道,对于任意 $\triangle ABC$ 有不等式

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3} \tag{A}$$

这即是著名的三角形正弦和不等式,它与我们在前文探讨的三角形余弦和不等式

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$$

天生一对,地配一双.

综

述

1 证 明

对于普通的中学生来说,证明式(A)还是有一定难度的.现在,我们将式(A)的证明作为探讨它的起点.

证法1

$$\begin{aligned}\sum\sin A+\sin 60^\circ &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C+60^\circ}{2}\cos\frac{C-60^\circ}{2}\leqslant\\ &2\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C+60^\circ}{2}\right)=\\ &4\sin\left(\frac{A+B+C+60^\circ}{4}\right)\cos\left(\frac{A+B-C-60^\circ}{4}\right)=\\ &4\sin 60^\circ\cos\left(\frac{60^\circ-C}{2}\right)\leqslant 4\sin 60^\circ\Rightarrow\sum\sin A\leqslant 3\sin 60^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle B,\angle C=60^\circ\\ \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$$

即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

证法2 由于式(A)关于 $\angle A,\angle B,\angle C$ 对称,当 $\angle A$ 固定时

$$\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\Rightarrow$$

$$S=\sum\sin A=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin A=$$

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin A$$

显然,当$\angle B=\angle C$时S最大.

同理,当$\angle B$固定时,那么当$\angle C=\angle A$时,S最大,当$\angle C$固定时,当$\angle A=\angle B$时,S最大.

因此,只有当$\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$时,$S$最大,为$3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,故

$$S=\sum\sin A\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

等号成立仅当$\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$,即$\triangle ABC$为正三角形.

证法 2 叫做调整法,在求对称表达式的极值或证明对称不等式时,有时可用此方法,比较简洁.如上,我们还导出了一个新的三角不等式

$$\sum\sin A\leqslant\sum\cos\frac{A}{2} \quad ①$$

如果$\triangle ABC$为锐角三角形,那么可作置换

$$(A,B,C)\longrightarrow(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C)\Rightarrow\sum\sin(\pi-2A)\leqslant$$
$$\sum\cos\left(\frac{\pi-2A}{2}\right)\Rightarrow\sum\sin 2A\leqslant\sum\sin A\leqslant\sum\cos\frac{A}{2} \quad ②$$

就得到一个漂亮的小结论.

证法 3 根据对称性,不妨设

$$\left.\begin{array}{l}0<\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C<\pi\\ \angle A+\angle B+\angle C=\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0<\angle A\leqslant 60^\circ\leqslant\angle C<180^\circ\Rightarrow 0<\sin A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$S=\sum\sin A=\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$$

$$\sin A+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos\frac{A}{2}$$

等号成立仅当$\angle A=60^\circ$,且$\angle B=\angle C$;即当$\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$时,$S_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,即

$$\sum\sin A\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

等号成立仅当$\triangle ABC$为正三角形.

证法 4 由于正弦函数$f(x)=\sin x$在$(0,\pi)$内是凹函数,因此有

$$\sum f(A)\leqslant 3f\left(\frac{\sum A}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow\sum\sin A\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

等号成立仅当$\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$.

证法 5　记 $s=\sum\sin A$,则

$$s=\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$$
$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leqslant$$
$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\Rightarrow$$
$$s^2\leqslant 4(1+\sin\frac{A}{2})(\cos\frac{A}{2})^2=$$
$$4(1+\sin\frac{A}{2})^2(1-\sin^2\frac{A}{2})=$$
$$\frac{4}{3}(1+\sin\frac{A}{2})^3(3-3\sin\frac{A}{2})\leqslant$$
$$\frac{4}{3}\left[\frac{3(1+\sin\frac{A}{2})+(3-3\sin\frac{A}{2})}{4}\right]^4=\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow$$
$$s=\sum\sin A\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

综述

等号成立仅当 $\angle B=\angle C$ 及 $1+\sin\frac{A}{2}=3-3\sin\frac{A}{2}\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle A=60^\circ,\angle B=\angle C$,从而 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$.

证法 6　由对称性,不妨设

$$\left.\begin{array}{l}0<\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C<180^\circ\\ \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow 0<\angle A\leqslant 60^\circ\leqslant\angle C<180^\circ\Rightarrow$$

$$\sin 60^\circ+\sin(A+C-60^\circ)-\sin A-\sin C=$$
$$2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C}{2}-60^\circ\right)-2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=$$
$$2\cos\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A+C}{2}-60^\circ\right)-\cos\frac{A-C}{2}\right]=$$
$$4\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)\sin\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right)\geqslant 0\Rightarrow$$
$$\sin A+\sin C\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(120^\circ-B)\Rightarrow s=\sum\sin A\leqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin(120^\circ-B)=$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin 60^\circ\cos(B-60^\circ)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\Rightarrow s\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

2　倍角推广

在不等式(A)

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

中,增设条件:$\triangle ABC$ 为锐角三角形,并分别作置换

$$(A,B,C) \longrightarrow \left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad ①$$

$$(a,b,c) \longrightarrow (\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C) \Rightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad ②$$

可见,将式(A)中的角度分别扩大到2倍,结论仍然成立.那么,我们能将式(A)和式②统一成一个推广式吗?

推广1 对于任意 $\triangle ABC$,如果 $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 2(i=1,2,3)$,则有

$$\sin \lambda_1 A+\sin \lambda_2 B+\sin \lambda_3 C \leqslant 3\sin\left(\frac{\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C}{3}\right) \quad \text{(B)}$$

等号成立仅当 $\lambda_1 A=\lambda_2 B=\lambda_3 C$.

显然,当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 时,式(B)左、右两边为0,成立;当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,式(B)化为式(A),成立;当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 时,式(B)化为式②成立.

分析 由于正弦函数 $F(x)=\sin x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 内是凹函数,因此当 $\lambda_i\in[0,1](i=1,2,3)$ 时,$\lambda_1 A,\lambda_2 B,\lambda_3 C\in[0,\pi)$,式(B)显然成立.但如果某个 $\lambda_j\in(0,2]$ 时,此法就不灵了.

证明 由于 A,B,C 中至少有两个为锐角,不妨设为 C 为锐角,于是

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=\pi \\ 0<C<\dfrac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\lambda_i\leqslant 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0<(\lambda_1 A+\lambda_2 B)/2<\pi \\ 0<(\lambda_1 A+\lambda_2 B+4\lambda_3 C)/6<\pi \Rightarrow \\ 0<(\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C)/3<\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\dfrac{1}{2}(\lambda_1 A+\lambda_2 B)>0 \\ \sin\dfrac{1}{6}(\lambda_1 A+\lambda_2 B+4\lambda_3 C)>0 \Rightarrow \sum \sin\lambda_1 A+\sin\left(\dfrac{\sum\lambda_1 A}{3}\right)= \\ \sin\dfrac{1}{3}(\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C)>0 \end{cases}$$

$$2\sin\left(\frac{\lambda_1 A+\lambda_2 B}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda_1 A-\lambda_2 B}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\lambda_1 A+\lambda_2 B+4\lambda_3 C}{6}\right)\cos\left(\frac{2\lambda_3 C-\lambda_1 A-\lambda_2 B}{6}\right)\leqslant$$

$$2\sin\left(\frac{\lambda_1 A+\lambda_2 B}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\lambda_1 A+\lambda_2 B+4\lambda_3 C}{6}\right)=$$

$$4\sin\left(\frac{4\lambda_1 A+4\lambda_2 B+4\lambda_3 C}{12}\right)\cos\left(\frac{2\lambda_1 A+2\lambda_2 B-4\lambda_3 C}{12}\right)\leqslant$$

$$4\sin\left(\frac{\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C}{3}\right)\Rightarrow\sum\sin\lambda_1 A\leqslant 3\sin\left(\frac{\sum\lambda_1 A}{3}\right)$$

等号成立仅当

$$\begin{cases} \lambda_1 A=\lambda_2 B \\ 2\lambda_3 C=\lambda_1 A+\lambda_2 B \Rightarrow \lambda_1 A=\lambda_2 B=\lambda_3 C \Rightarrow \\ \lambda_1 A+\lambda_2 B=2\lambda_3 C \end{cases}$$

$$\frac{\lambda_2\lambda_3}{A}=\frac{\lambda_3\lambda_1}{B}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{C}=\frac{1}{t}>0\Rightarrow$$
$$(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)t=A+B+C=\pi\Rightarrow$$
$$t=\pi/(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\angle A=\lambda_2\lambda_3\pi/(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\\ \angle B=\lambda_3\lambda_1\pi/(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\\ \angle C=\lambda_1\lambda_2\pi/(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\end{cases}\tag{*}$$

不言而喻,上述证法非常巧妙,应用这种技巧,证明一类对称不等式是行之有效的.

式(B)明确告诉我们

$$s=\sin\lambda_1A+\sin\lambda_2B+\sin\lambda_3C$$

取最大值是式(*)成立,其最大值为

$$s_{\max}=3\sin\left(\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\pi}{m}\right)$$

其中 $m=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$.

综述

这样,我们相当于解决了如下问题:

设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为已知正常数,变量 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$,且满足 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,则当 α,β,γ 分别取何值时

$$S=\sin\lambda_1\alpha+\sin\lambda_2\beta+\sin\lambda_3\gamma$$

取到最大值?

如果我们在推广1中硬性固执地强取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$,便得到一个颇受惩罚的错误结论

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant 0\tag{△}$$

当然,当 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$ 时,式(△)取等号;但当 $\angle A=140°,\angle B=\angle C=20°$ 时

$$\sum\sin 3A=\sin 420°+\sin 60°+\sin 60°=3\sin 60°=\frac{3}{2}\sqrt{3}>0$$

因此式(△)明显错误.那么,如果我们综合前面的式(A)和式(B),有如下结论吗?

推广2 设 $k=\{1,2,3\}$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\sin kA+\sin kB+\sin kC\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}\tag{C}$$

显然,当 $k=1$ 或2时,式(C)等号成立仅当 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$;当 $k=3$ 时,$\{\angle A,\angle B,\angle C\}$ 中一个取 $140°$,另两个取 $20°$;

一般情况时,对称三角不等式成立的条件是 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$;但当 $k=3$ 时,式(C)却一反常态,独树一帜.可见,有时一些对称三角不等式具有独特反常性.这还不足为奇,以后我们还将见到:对于某个独特的三角对称不等式,等号成立的条件既具有普遍性($\angle A=\angle B=\angle C=60°$),又具有特殊性($\angle A=\alpha,\angle B=\beta,\angle C=\gamma;0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi,\alpha+\beta+\gamma=\pi$),即同时具有双重性.

现在,我们证明式(C).

证明 我们只须证明 $k=3$ 时的情况即可.

由对称性,不妨设

$$\begin{cases}\angle A \geqslant 60^\circ \\ \alpha = \frac{3}{2}(\angle B + \angle C)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\angle A = 180^\circ - \frac{2}{3}\alpha \\ 0 < \alpha \leqslant 180^\circ\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum \sin 3A &= \sin 3A + 2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B-C) \leqslant \sin 3A + 2\sin\frac{3}{2}(B+C) = \\ &\sin(3\times 180^\circ - 2\alpha) + 2\sin\alpha = \\ &\sin 2\alpha + 2\sin\alpha = 2\sin\alpha(1+\cos\alpha) = \\ &2\times 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 8\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3}\right)^3 \Rightarrow \\ &\left(\sum\sin 3A\right)^2 \leqslant 8^2\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \\ &\frac{8^2}{3}\left(3\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3 \leqslant \\ &\frac{8^2}{3}\left(\frac{3\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{4}\right)^4 = \\ &\frac{2^6}{3}\cdot\frac{3^4}{2^8} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \sum\sin 3A \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}\angle B = \angle C \\ \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 3\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\angle B = \angle C \\ \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(0 < \frac{\alpha}{2} \leqslant 90^\circ\right)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\angle B = \angle C \\ \alpha = \frac{3}{2}(\angle B + \angle C) = 60^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\angle B = \angle C = 20^\circ \\ \angle A = 140^\circ\end{cases}$$

可见,式(C)是一个比较奇异的三角不等式,而式(B)则是一个非常美妙的三角不等式.

由于正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内是凹函数,因此,不等式(A)可以从三角形推广到凸多边形.

推广 3 设凸 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\sin A_i \leqslant n\sin\frac{2\pi}{n} \tag{D}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{A_i}{n-2}\right) \leqslant n\sin\frac{\pi}{n} \tag{D'}$$

等号成立仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形.

3　参数推广

我们可以从角参数方面将式(A) 及式(D′) 推广成:

推广 4　设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为凸 n 边形,角参数 θ 满足

$$\theta+\frac{A_i}{n-2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),1\leqslant i\leqslant n$$

并记
$$S_n(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\theta+\frac{A_i}{n-2}\right)$$

则有

$$S_n(\theta)\leqslant\begin{cases}n\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{n}\right)\\ \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{A_i}{n-2}\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{A_i}{n-2}\right)^2}\end{cases}\tag{E}$$

证明　注意到在$(0,\frac{\pi}{2})$ 和$(0,\pi)$ 内,正弦函数是凹函数,且

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\theta+\frac{A_i}{n-2}\right)=\theta+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i}{n(n-2)}=\theta+\frac{\pi}{n}$$

于是

$$S_n(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\theta+\frac{A_i}{n-2}\right)\leqslant n\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)$$

等号成立仅当 $A_1=A_2=\cdots=A_n$,即为 $A_1A_2\cdots A_n$ 是等角 n 边形.

简记 $\alpha_i=A_i/(n-2)(1\leqslant i\leqslant n)$,则有

$$\begin{aligned}S_n(\theta)&=\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta+\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}(\sin\theta\cos\alpha_i+\cos\theta\sin\alpha_i)=\\&\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right)\cos\theta+\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\right)\sin\theta\leqslant\\&\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\right)^2}\end{aligned}$$

即式(E) 成立,等号成立仅当

$$\tan\theta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{A_i}{n-2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{A_i}{n-2}}$$

4　指数推广

由于正弦和三角不等式(A)

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

左边三项正弦函数值均为正,因此我们可以从指数方面将它推广成:

推广 5　设 $0\leqslant k\leqslant 2$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\sin^k A+\sin^k B+\sin^k C\leqslant 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \tag{F}$$

等号成立仅当 $k=0$ 或 $\triangle ABC$ 为正三角形.

显然,当 $k=0$ 时,式(F)左、右两边相等,均为 3,当 $k=1$ 时,式(F)化为式(A).因此,我们只须证明 $0<k\leqslant 2$ 时,式(E)成立即可.

证明　由于 $\angle A,\angle B,\angle C$ 三个角中,至少有两个锐角,由对称性,不妨设

$$0<\angle A<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\cos A<1\Rightarrow\sum\cos 2A=\cos 2A+2\cos(B+C)\cos(B-C)=$$

$$2\cos^2A-1-2\cos A\cos(B-C)\geqslant 2\cos^2A-1-2\cos A=$$

$$2\left(\cos A-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\sum\sin^2A=\frac{1}{2}\sum(1-\cos 2A)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum\cos 2A\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\sum\sin^2A\leqslant\frac{9}{4}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sum\sin^kA}{3}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\left(\frac{\sum\sin^2A}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\sum\sin^kA\leqslant 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

等号成立仅当 $\angle B=\angle C$,及 $\cos\angle A=\dfrac{1}{2}$,即 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$.

(1) 如果我们在式(F)中取 $k=2$,则得到

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leqslant\frac{9}{4}\Rightarrow \tag{①}$$

$$\sum\sin A\leqslant\sqrt{3\sum\sin^2A}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3} \tag{②}$$

因此式①显然是式②的一个加强.

(2) 若应用正弦定理,可将式②转化为一个众所周知的几何不等式

$$a+b+c\leqslant 3\sqrt{3}R \tag{③}$$

再将公式 $R=abc$ 代入上式得

$$3\sqrt{3}abc\geqslant 4(a+b+c)\Delta\Leftrightarrow 27a^2b^2c^2\geqslant 16(a+b+c)^2\Delta^2 \tag{④}$$

如果我们再作代换

$$(a,b,c)=(y+z,z+x,x+y)\Rightarrow\Delta^2=xyz(x+y+z)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\left(\frac{z+x}{2}\right)^2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\geqslant xyz\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^3 \tag{⑤}$$

这样,我们又得到了一个结构对称、外观漂亮的代数不等式.可见,代数、三角、几何本为

一家,密不可分,且可以互相转化.

令人高兴的是,式 ② 可以加强性推广为:

推广 6 设 $\theta_i \in [0,\pi](1 \leqslant i \leqslant n, 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i = \pi$,则有

$$\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \cdots + \sin^2\theta_n \leqslant \frac{9}{4} \tag{G}$$

显然,当 $n = 3$ 时,取 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (A, B, C)$ 时,式(G) 化为式 ①.

比较式(G) 和式 ① 知:

式 ① 的定义域包含于式(G) 的定义域,即

$$(0,\pi) \in [0,\pi]$$

将式 ① 中的三个角 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$,细分为式(G) 中的几个角 $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = \pi$,但式(G) 左边的最大值和式 ① 一样,并未增加或减少丝毫,故表明式(G) 暗示我们:它的等号成立的条件应当是 n 个角 $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n (n \geqslant 3)$ 中有 3 个取 $60°$,其余 $n - 3$ 个均取 0.

这一现象真奇怪,好像我们做了徒劳的无用功.

综述

证明 (1) 当 $n = 2$ 时

$$s = \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 = \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 \leqslant 2$$

式(G) 成立.

(2) 当 $n = 3$ 时,我们已证.

(3) 当 $n \geqslant 4$ 时,我们设

$$\left.\begin{array}{l}\alpha, \beta \in [0,\pi] \\ \alpha + \beta \in [0,\pi]\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\alpha + \beta}{2} \geqslant \left|\frac{\alpha - \beta}{2}\right| \Rightarrow \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \leqslant \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \Rightarrow$$

$$2\left(\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \leqslant 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \Rightarrow$$

$$1 + \cos(\alpha + \beta) \leqslant \cos\alpha + \cos\beta$$

设 $x_i = 2\theta_i (1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 2\pi$,再设 $2\pi \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$,所以

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1 - \cos x_i) = \frac{1}{2}\left(n - \sum_{i=1}^{n}\cos x_i\right) \leqslant \\
&\frac{1}{2}\{(n - 1) - [\cos x_1 + \cdots + \cos x_{n-2} + \cos(x_{n-1} + x_n)]\} \leqslant \\
&\frac{1}{2}\{(n - 2) - [\cos x_1 + \cdots + \cos x_{n-3} + \cos(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)]\} \leqslant \cdots \leqslant \\
&\frac{1}{2}\{3 - [\cos x_1 + \cos x_2 + \cos(x_3 + \cdots + x_n)]\} = \\
&\frac{1}{2}\{3 - [\cos x_1 + \cos x_2 + \cos(2\pi - x_1 - x_2)]\} = \\
&2 - \frac{1}{2}\{1 + \cos(x_1 + x_2) + \cos x_1 + \cos x_2\} \leqslant
\end{aligned}$$

$$2-\frac{1}{2}(1+\cos 2x_1+2\cos x_1)=$$
$$2-\cos^2 x_1-\cos x_1=$$
$$\frac{9}{4}-(\cos x_1+\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{9}{4}$$

即式(G)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}x_1=x_2=x_3=120^\circ\\x_4=\cdots=x_n=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=\theta_2=\theta_3=60^\circ\\\theta_4=\cdots=\theta_n=0\end{cases}$$

以上证法采用的是调整法,否则优美的式(G)就有失这漂亮的证明.

5 新奇结论

在本节,我们建立几个出奇不意的新结论.

我们在前面介绍了:当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,有

$$\sum\sin 2A\leqslant\sum\sin A \tag{①}$$

其实,上式可以从系数方面加权推广为:

结论 1 设 $\lambda,\mu,v\in(0,1)$ 且 $\lambda+\mu+v=1$,则对于锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\lambda\sin 2A+\mu\sin 2B+v\sin 2C\leqslant K(\lambda\sin A+\mu\sin B+v\sin C) \tag{a}$$

其中

$$K=\frac{\mu v}{\lambda}+\frac{v\lambda}{\mu}+\frac{\lambda\mu}{v} \tag{②}$$

特别地,当 $\lambda=\mu=v=\frac{1}{3}$ 时,$K=1$,式(a)化为式①.

证明 依题意不妨设

$$0<\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}0<\sin A\leqslant\sin B\leqslant\sin C\\\cos A\geqslant\cos B\geqslant\cos C>0\end{cases}\Rightarrow$$

$\sum\lambda\sin 2A=2\sum\lambda\sin A\cos A$(应用切比雪夫不等式的加权推广)$\leqslant$

$2\left(\sum\lambda\sin A\right)\left(\sum\lambda\cos A\right)$(应用三角母不等式)$\leqslant$

$$\left(\sum\frac{\mu v}{\lambda}\right)\sum\lambda\sin A\Rightarrow\sum\lambda\sin 2A\leqslant K\sum\lambda\sin A$$

等号成立仅当 $\lambda=\mu=v=\frac{1}{3}$ 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

对于任意 $\triangle ABC$,应用切比雪夫不等式易推得

$$\sum\sin A\leqslant\sqrt{3}\sum\sin\frac{A}{2} \tag{③}$$

我们先将式③推广为:

推广 7 设 $1\leqslant n\in\mathbf{N}$,对于任意 $\triangle ABC$ 有

$$\sum\sin A\leqslant 2^{n-1}(\sqrt{3})\sum\sin\left(\frac{A}{2^n}\right) \tag{b}$$

证明 设 $K\in\mathbf{N}$,注意到当 $K\geqslant 1$ 时

$$\left(\frac{A}{2^k},\frac{B}{2^k},\frac{C}{2^k}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sum\cos\left(\frac{A}{2^k}\right)\leqslant 3\cos\left(\frac{\sum A}{3\times 2^k}\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^k}\right)$$

设

$$0<A\leqslant B\leqslant C<\pi\Rightarrow\begin{cases}0<\sin\left(\frac{A}{2^k}\right)\leqslant\sin\left(\frac{B}{2^k}\right)\leqslant\sin\left(\frac{C}{2^k}\right)\\ \cos\left(\frac{A}{2^k}\right)\geqslant\cos\left(\frac{B}{2^k}\right)\geqslant\cos\left(\frac{C}{2^k}\right)>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$S_{k-1}=\sum\sin\left(\frac{A}{2^{k-1}}\right)=$$

$$2\sum\sin\left(\frac{A}{2^k}\right)\cos\left(\frac{A}{2^k}\right)\text{(应用切比雪夫不等式)}\leqslant$$

$$\frac{2}{3}\sum\sin\left(\frac{A}{2^k}\right)\sum\cos\left(\frac{A}{2^k}\right)=$$

$$\frac{2}{3}S_k\sum\cos\left(\frac{A}{2^k}\right)\leqslant 2S_k\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^k}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{S_{k-1}}{S_k}\leqslant 2\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^k}\right)\Rightarrow$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{S_{k-1}}{S_k}\right)\leqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^k}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{S_0}{S_n}\leqslant 2^n\cos\frac{\pi}{6}=2^{n-1}(\sqrt{3})\Rightarrow$$

$$S_0\leqslant 2^{n-1}(\sqrt{3})S_n\Rightarrow$$

$$\sum\sin A\leqslant 2^{n-1}(\sqrt{3})\sum\sin\left(\frac{A}{2^n}\right)$$

等号成立仅当 $n=1$,且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

前面的式 ③ 与式 ① 结构一致,外形略有差异,也有加权推广:

结论 2 设 x,y,z 均为正数,$\lambda,\mu,v\in(0,1)$,且 $\lambda+\mu+v=1$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$2\lambda\sin A+\mu\sin B+v\sin C\leqslant m\left(\lambda\sin\frac{A}{2}+\mu\sin\frac{B}{2}+v\sin\frac{C}{2}\right)\tag{c}$$

其中

$$m=(x+y+z)\left(\frac{x\lambda^2+y\mu^2+zv^2}{xyz}\right)^{\frac{1}{2}}\tag{④}$$

特别地,当 $\lambda=\mu=v=\frac{1}{3}$,$x=y=z$ 时,式(c) 即化为式 ③.

证明 应用三角母不等式有

$$2\sum yz\cos A\leqslant\sum x^2\Rightarrow 2\sum yz\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)\leqslant\sum x^2\Rightarrow$$

$$4\sum yz\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\sum x^2+2\sum yz\Rightarrow\tag{⑤}$$

$$\sum yz\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\sum x\right)^2 \qquad ⑥$$

等号成立仅当

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C} \qquad ⑦$$

应用柯西不等式有

$$\sum \lambda\cos\frac{A}{2} \leqslant \left[\left(\sum\frac{\lambda^2}{yz}\right)\sum yz\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad ⑧$$

等号成立仅当

$$\frac{yz\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2}{(\lambda^2/yz)} = \frac{zx\left(\cos\frac{B}{2}\right)^2}{(\mu^2/zx)} = \frac{xy\left(\cos\frac{C}{2}\right)^2}{(v^2/xy)} \Rightarrow$$

$$\lambda x\sec\frac{A}{2} = \mu y\sec\frac{B}{2} = vz\sec\frac{C}{2} \qquad ⑨$$

⑥,⑧ 两式结合得

$$\sum\lambda\cos\frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}\left(\sum x\right)\left(\sum\frac{\lambda^2}{yz}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad ⑩$$

现设

$$0 < A \leqslant B \leqslant C < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin\frac{A}{2} \leqslant \sin\frac{B}{2} \leqslant \sin\frac{C}{2} \\ \cos\frac{A}{2} \geqslant \cos\frac{B}{2} \geqslant \cos\frac{C}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\sum\lambda\sin A = 2\sum\lambda\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$(应用切比雪夫不等式的加权推广)$\leqslant$

$2\left(\sum\lambda\sin\frac{A}{2}\right)\left(\sum\lambda\cos\frac{A}{2}\right) \leqslant$

$m\sum\lambda\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \sum\lambda\sin A \leqslant m\sum\lambda\sin\frac{A}{2}$

等号成立仅当

$$\left.\begin{array}{r} \sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2} \\ \text{或}\ \cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3} \qquad ⑪$$

将 ⑦,⑨,⑪ 三式综合得,式(c)等号成立仅当 $\lambda = \mu = v = \frac{1}{3}, x = y = z$,且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

无独有偶,三角形正切和不等式

$$\tan A + \tan B + \tan C \geqslant 3\sqrt{3} \qquad ⑫$$

也来"凑热闹"——要求我们建立类似的结论:

结论 3 设 $\lambda,\mu,v \in (0,1)$,且 $\lambda + \mu + v = 1, 1 \leqslant n \in \mathbf{N}$,则对锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\lambda\tan A + \mu\tan B + v\tan C \geqslant$$

$$K_n\left[\lambda\tan\left(\frac{A}{2^n}\right)+\mu\tan\left(\frac{B}{2^n}\right)+v\tan\left(\frac{C}{2^n}\right)\right] \tag{d}$$

其中

$$K_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{v})^{2n} \tag{13}$$

特别地，当取 $n=1,\lambda=\mu=v=\frac{1}{3}$ 时，式(d) 化为特例

$$\tan A+\tan B+\tan C\geqslant 3\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) \tag{14}$$

因此式(d) 是式 ⑭ 的"指数 - 系数" 推广.

证明　应用三角恒等式有

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant\sum\tan\frac{B}{2}\sum\tan\frac{C}{2}=1\Rightarrow$$

$$\sum\left[1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\right]=3-\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\leqslant 2\Rightarrow$$

$$2\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2}\right]\geqslant\sum\left[1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\right]\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2}\right]\text{(应用柯西不等式)}\geqslant$$

$$\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\Rightarrow\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2}\right]\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2 \tag{15}$$

设

$$0<A\leqslant B\leqslant C<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}0<\tan\frac{A}{2}\leqslant\tan\frac{B}{2}\leqslant\tan\frac{C}{2}\\0<\frac{1}{1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2}\leqslant\frac{1}{1-\left(\tan\frac{B}{2}\right)^2}\leqslant\frac{1}{1-\left(\tan\frac{C}{2}\right)^2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\sum\lambda\tan A=\sum\left[\frac{2\lambda\tan\frac{A}{2}}{1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2}\right]\text{(应用切比雪夫不等式的加权推广)}\geqslant$$

$$2\left(\sum\lambda\tan\frac{A}{2}\right)\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2}\right]\geqslant\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\sum\lambda\tan\frac{A}{2} \tag{16}$$

现设 $2\leqslant k\in\mathbf{N}$，且

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{A}{2^{k-1}},\frac{B}{2^{k-1}},\frac{C}{2^{k-1}}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$$

$$\sum\left[1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]=3-\sum\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2<3\Rightarrow$$

$$3\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]>\sum\left[1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]\geqslant\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]>\frac{1}{3}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\Rightarrow \tag{17}$$

$$\sum\lambda\tan\alpha=\sum\left[\frac{2\lambda\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]\geqslant 2\left(\sum\lambda\tan\frac{\alpha}{2}\right)\sum\left[\frac{\lambda}{1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]>$$

$$\frac{2}{3}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\cdot\sum\lambda\tan\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\sum\lambda\tan\left(\frac{A}{2^{k-1}}\right)>\frac{2}{3}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\sum\lambda\tan\left(\frac{A}{2^k}\right) \tag{18}$$

如今,我们记

$$T_k=\sum\lambda\tan\left(\frac{A}{2^{k-1}}\right),2\leqslant k\in\mathbf{N}$$

那么式 ⑯ 可表示为

$$T_1\geqslant\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2T_2 \tag{19}$$

式 ⑱ 可表示为

$$T_{k-1}>\frac{2}{3}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2T_k \tag{20}$$

这是一个递推不等式

$$\frac{T_{k-1}}{T_k}>\frac{2}{3}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\Rightarrow$$

$$\frac{T_2}{T_3}\cdot\frac{T_3}{T_4}\cdot\cdots\cdot\frac{T_n}{T_{n+1}}>\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^{2(n-1)}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{T_2}{T_{n+1}}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^{2(n-1)}\\ \dfrac{T_1}{T_2}\geqslant\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{T_1}{T_{n+1}}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^{2n}\Rightarrow$$

$$T_1\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\sqrt{\lambda}\right)^{2n}T_{n+1}\Rightarrow\sum\lambda\tan A\geqslant K_n\sum\lambda\tan\left(\frac{A}{2^n}\right)$$

即式(d) 成立,等号成立仅当 $n=1,\lambda=\mu=v=\frac{1}{3}$,且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

现在,当我们回首反顾结论 1 和结论 3 时,我们发现,式(b) 和式(d) 均可加强,不过较复杂.

在本小节的末尾,我们再做一件有趣的事:

我们知道,有普通不等式链

$$\sqrt[3]{\prod\sin\frac{A}{2}}\leqslant\frac{\sum\sin\frac{A}{2}}{3}\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{12}\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \tag{21}$$

如果应用幂平均不等式,可将不等式链 ㉑ 统一成推广式

$$\left[\frac{\left(\sin\frac{A}{2}\right)^k+\left(\sin\frac{B}{2}\right)^k+\left(\sin\frac{C}{2}\right)^k}{3}\right]^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{2} \tag{22}$$

其中 $k\leqslant 1$.

由不等式

$$\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{4} \tag{23}$$

知,当 $k\geqslant 2$ 时,有

$$\left[\frac{\left(\sin\frac{A}{2}\right)^k+\left(\sin\frac{B}{2}\right)^k+\left(\sin\frac{C}{2}\right)^k}{3}\right]^{\frac{1}{k}}\geqslant\frac{1}{2} \tag{24}$$

如果能将式㉒和㉔“珠联璧合”成一个统一推广式,那该多好!

结论 4 设 $k\notin(1,2)$, $D(k)=|k-2|-|k-1|$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\left[\frac{\left(\sin\frac{A}{2}\right)^k+\left(\sin\frac{B}{2}\right)^k+\left(\sin\frac{C}{2}\right)^k}{3}\right]^{\frac{D(k)}{k}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{D(k)} \tag{e}$$

综述

显然有

$$D(k)=|k-2|-|k-1|=\begin{cases}1, k\leqslant 1\\ -1, k\geqslant 2\end{cases} \tag{25}$$

因此,当 $k\leqslant 1$ 时 $D(k)=1$,式(e)化为式㉒,当 $k\geqslant 2$ 时, $D(k)=-1$,式(e)化为式㉔.

式(e)的巧妙在于构造函数 $D(k)$.

6 加权推广 Ⅰ

我们在前文中,将 $\triangle ABC$ 的余弦和不等式

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2} \tag{1}$$

推广成带权系数的“三角母不等式”

$$x\cos A+y\cos B+z\cos C\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right) \tag{2}$$

其中 $xyz>0$.

而式①的配对正弦和不等式,我们在前面从角倍数、角参数、指数几个方面均进行了推广,那么,很自然的问题是: $\triangle ABC$ 的正弦和不等式也有加权推广吗?

其实,早在 1964 年,Vasic 就从系数角度给出了正弦和不等式

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3} \tag{A}$$

的第一个加权推广:

推广 8(Vasic) 设 $x,y,z>0$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$x\sin A + y\sin B + z\sin C \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \tag{H}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $x = y = z$.

显然,当 $x = y = z$ 时,式(H)立即化为式(A).当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(H)化为代数不等式

$$x + y + z \leqslant \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \tag{③}$$

从式(H)的外观结构上看,它显然与式②外观结构完全一致,因此足有资格与绝美的式②"天生一对,地配一双".

证法 1 作代换,设 $p,q,r > 0$,且

$$\left.\begin{array}{l} x = qr \\ y = rp \\ z = pq \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = \sqrt{yz/x} \\ q = \sqrt{zx/y} \\ r = \sqrt{xy/z} \end{array}\right\} \Rightarrow x\sin A + y\sin B + z\sin C(\text{应用柯西不等式}) \leqslant$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)\sum \sin^2 A} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{q^2r^2 + r^2p^2 + p^2q^2} \leqslant \frac{3}{2}\left(\frac{p^2 + q^2 + r^2}{\sqrt{3}}\right) \leqslant$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)$$

即式(H)成立,等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $p^2 = q^2 = r^2 \Rightarrow x = y = z$.

证法 2 由于

$$\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)^2 = 2\sum x^2 + \sum \frac{y^2z^2}{x^2} = 2\sum x^2 + \frac{1}{2}\sum\left(2\frac{y^2z^2}{x^2}\right) =$$

$$2\sum x^2 + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}\right) \geqslant$$

$$2\sum x^2 + \sum\left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}}\right)z^2 =$$

$$2\sum x^2 + \sum z^2 = 3\sum x^2 \Rightarrow$$

$$\sum x^2 \leqslant \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)\right]^2 \Rightarrow$$

$$\sum x\sin A \leqslant \sqrt{\left(\sum x^2\right)\left(\sum \sin^2 A\right)}(\text{应用柯西不等式}) \leqslant$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\sum x^2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum \frac{yz}{x} \Rightarrow \sum x\sin A \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum \frac{yz}{x}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $x = y = z$.

由于资料奇缺,笔者未曾见到Vasic的证明,上述两种证法仅是笔者向大家提供的参考证法.不过,证法1中代换得巧妙,证法2推导得自然,而且,我们还发现,式(H)可以加强为

$$x\sin A + y\sin B + z\sin C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{H}'$$

且只须 $x, y, z \in \mathbf{R}$ 即可.

不仅如此,式(H)还有第二个加强,便是1984年M.S.Klamkin建立的:

推广9(Klamkin) 设 $x, y, z > 0$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$x\sin A + y\sin B + z\sin C \leqslant \frac{1}{2}(yz + zx + xy)\sqrt{\frac{x + y + z}{xyz}} \tag{I}$$

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $x = y = z$.

显然,当 $x = y = z$ 时,式(I)化为式(A),当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(I)化为代数不等式

$$\frac{1}{2}(yz + zx + xy)\sqrt{\frac{x + y + z}{xyz}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y + z) \Leftrightarrow$$

$$yz + zx + xy \geqslant \sqrt{3xyz(x + y + z)} \tag{④}$$

比较式(H)和式(I)的右边,欲说明式(I)比式(H)强,必须充分证明

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \geqslant \left(\frac{yz + zx + xy}{2}\right)\sqrt{\frac{x + y + z}{xyz}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) \geqslant$$
$$(yz + zx + xy)\sqrt{xyz(x + y + z)} \tag{⑤}$$

而利用式④有

$$3\sum(yz)^2 \geqslant \left(\sum yz\right)^2 = \left(\sum yz\right)\left(\sum yz\right) \geqslant \left(\sum yz\right)\sqrt{3xyz\left(\sum x\right)} \Rightarrow$$
$$\sqrt{3}\sum y^2z^2 \geqslant \left(\sum yz\right)\sqrt{xyz\left(\sum x\right)}$$

这正是式⑤.

现在我们用两种方法证明式⑤.

证法1 应用3元对称不等式有

$$(yz + zx + xy)^2 \geqslant 3(yz \cdot zx + zx \cdot xy + xy \cdot yz) = 3xyz(x + y + z) \Rightarrow$$
$$yz + zx + xy \geqslant \sqrt{3xyz(x + y + z)} \Rightarrow$$
$$\sqrt{3}(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}(yz + zx + xy)^2 =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}(yz + zx + xy)(yz + zx + xy) \geqslant$$
$$(yz + zx + xy)\sqrt{xyz(x + y + z)} \Rightarrow$$
$$\left(\frac{yz + zx + xy}{2}\right)\sqrt{\frac{x + y + z}{xyz}} \leqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}{xyz}\right) =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)$$

等号成立仅当 $x = y = z$.

证法 2 记

$$\begin{cases} y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = t \\ xyz(x + y + z) = r \end{cases}$$

那么式 ⑤ 化为

$$\sqrt{3}t \geqslant (yz + zx + xy)\sqrt{r} \Leftrightarrow \qquad ⑥$$

$$3t^2 \geqslant r(yz + zx + xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$3t^2 \geqslant r(t + 2r) \Leftrightarrow$$

$$(t - r)(3t + 2r) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$t \geqslant r \Leftrightarrow$$

$$2t - 2r = 2\sum y^2z^2 - 2xyz\sum x =$$

$$\sum x^2(y^2 - 2yz + z^2) = \sum x^2(y - z)^2 \geqslant 0$$

即 $t \geqslant r$ 成立,逆推之式 ⑥ 成立,从而式 ⑤ 成立.

进一步地,我们猜测式(I) 比式(H) 强,即

$$\frac{1}{2}\left(\sum yz\right)\sqrt{\frac{\sum x}{xyz}} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\sum x^2} \Leftrightarrow \left(\sum yz\right)^2\left(\sum x\right) \leqslant 9xyz\left(\sum x^2\right) \qquad (?)$$

行文至此,我们还未证明推广 9 中的式(I),关于它的证明,我们把它留在后面作为特例体现.

7 加权推广 Ⅱ

如果说 Vasic 不等式和 Klamkin 不等式非常美丽的话,那么我们觉得它们美中不足的是:① 外形结构比较单一;② 等号成立的条件太特殊($\triangle ABC$ 为正三角形,$x = y = z$),为了将它们变得更完美,我们分两步进行工作:第一步,在外形结构上引进参数;第二步,改进等号成立的条件.

下面我们先进行第一步工作:

推广 10 对于任意正数 x, y, z, λ, μ, v 和任意 $\triangle ABC$,有

$$x\sin A + y\sin B + z\sin C \leqslant \frac{3}{2}\sqrt[4]{(\lambda x^2 + \mu y^2 + vz^2)\left(\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} + \frac{z^2}{v}\right)} \qquad (J)$$

等号成立仅当 $x = y = z, \lambda = \mu = v$,且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

特别地,当 $\lambda = \mu = v$ 时,式(J) 化为式(H);当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(J) 化为代数不等式

$$\sqrt[4]{\left(\sum \lambda x^2\right)\left(\sum \frac{x^2}{\lambda}\right)} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}(x + y + z) \qquad ①$$

当 $x = y = z$ 时,式(J) 化为

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt[4]{(\lambda+\mu+v)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{v}\right)} \quad ②$$

证明 应用柯西不等式和三角不等式$\sum\sin^2A\leqslant\frac{9}{4}$有

$$\sum x\sin A\leqslant\sqrt{\left(\sum x^2\right)\left(\sum\sin^2A\right)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{\sum x^2}=$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\sum\left(\sqrt{\lambda}x\cdot\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{\left(\sum\lambda x^2\right)\left(\sum\frac{x^2}{\lambda}\right)}$$

即式(J)成立,等号成立仅当$x=y=z,\lambda=\mu=v$和$\triangle ABC$为正三角形.

推广 11 对任意正数x,y,z,λ,μ,v和任意$\triangle ABC$有

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant$$

$$\frac{3\left[(\mu+v)\frac{yz}{x}+(v+\lambda)\frac{zx}{y}+(\lambda+\mu)\frac{xy}{z}\right]}{4\sqrt{\mu v+v\lambda+\lambda\mu}} \quad (K)$$

等号成立仅当$x=y=z,\lambda=u=v$,且$\triangle ABC$为正三角形.

特别地,当$u=v=\lambda$时,式(K)化为式(H),即化为Vasic不等式

综述

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right) \quad (H)$$

当$\triangle ABC$为正三角形时,式(K)化为代数不等式

$$\sum(u+v)\frac{yz}{x}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sum x\right)\left(\sum uv\right)^{\frac{1}{2}} \quad ③$$

当$x=y=z$时,式(K)化为

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3(\lambda+u+v)}{2\sqrt{uv+v\lambda+\lambda u}} \quad ④$$

证明 应用杨克昌不等式有

$$M=\sum(u+v)\frac{yz}{x}\geqslant2\left[\left(\sum uv\right)\sum\left(\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=2\left(\sum uv\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$\left(\sum x^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{M}{2\left(\sum uv\right)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\sum x\sin A\leqslant\left(\sum x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\sin^2A\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\frac{3}{2}\left(\sum x^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{3\sum(u+v)\frac{yz}{x}}{4\left(\sum uv\right)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\sum x\sin A\leqslant\frac{3\sum(u+v)\frac{yz}{x}}{4\left(\sum uv\right)^{\frac{1}{2}}}$$

即式(K)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}\frac{\lambda x}{yz}=\frac{uy}{zx}=\frac{vz}{xy}\Rightarrow\lambda x^2=uy^2=vz^2\\ x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C\\ \angle A=\angle B=\angle C=60^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=z\\ \lambda=u=v\\ \angle A=\angle B=\angle C=60^\circ\end{cases}$$

推广10和推广11虽然引进了参数,但得式(J)和式(K)外观结构不再那么单一,但

它们等号成立的条件仍然很特殊：$x=y=z,\lambda=u=v$，$\triangle ABC$ 为正三角形.

造成这种改革不彻底的根本原因是，过分依赖三角不等式

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4} \tag{⑤}$$

而此式等号成立的条件是 $\triangle ABC$ 为正三角形，这一特殊条件导致了 $x=y=z,\lambda=u=v$.

8　加权推广 Ⅲ

为了改进前面各式等号成立的特殊性，我们须将上面的式 ⑤ 进行加权推广，然后再应用这个推广结论，就能达到再度改进的目的，可见，文化的改进是要付出代价的。

推广 12　设实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足条件 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0$，则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\frac{\sin^2 A}{\lambda_1}+\frac{\sin^2 B}{\lambda_2}+\frac{\sin^2 C}{\lambda_3}\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \tag{L}$$

等号成立仅当

$$\frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1)}{\sin^2 A}=\frac{\lambda_2(\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2)}{\sin^2 B}=\frac{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)}{\sin^2 C} \tag{①}$$

或

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C \tag{②}$$

如果我们在式(L)中作代换

$$(\lambda,u,v)=\left(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3}\right)\Rightarrow\lambda\sin^2 A+u\sin^2 B+v\sin^2 C\leqslant\frac{(uv+v\lambda+\lambda u)^2}{4\lambda uv} \tag{L$'$}$$

等号成立仅当

$$\lambda\sin 2A=u\sin 2B=v\sin 2C \tag{③}$$

当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，式(L)′ 化为代数不等式

$$(uv+v\lambda+\lambda u)^2\geqslant 3\lambda uv(\lambda+u+v) \tag{④}$$

当 $\lambda=u=v$ 时，式(L)′ 化为

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4} \tag{⑤}$$

证法 1　应用三角母不等式，并作置换

$$\left.\begin{cases}2\sum\lambda_2\lambda_3\cos A\leqslant\sum\lambda_1^2\\(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C)\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$2\sum\lambda_2\lambda_3\cos(\pi-2A)\leqslant\sum\lambda_1^2\Rightarrow$$

$$-2\sum\lambda_2\lambda_3\cos 2A\leqslant\sum\lambda_1^2\Rightarrow$$

$$-2\sum\lambda_2\lambda_3(1-2\sin^2 A)\leqslant\sum\lambda_1^2\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}4\sum\lambda_2\lambda_3\sin^2 A\leqslant\sum\lambda_1^2+2\sum\lambda_2\lambda_3=\left(\sum\lambda_1\right)^2\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum \frac{\sin^2 A}{\lambda_1} \leqslant \frac{\left(\sum \lambda_1\right)^2}{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

即式(L)成立,等号成立仅当

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \sin(\pi - 2A) : \sin(\pi - 2B) : \sin(\pi - 2C) = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$

证法 2 注意到

$$\cos 2A = \cos(2B + 2C) = \cos 2B\cos 2C - \sin 2B\sin 2C$$

有

$$\left(\sum \lambda_1\right)^2 - 4\sum \lambda_2\lambda_3(1 - 2\sin^2 A) = \sum \lambda_1^2 + 2\sum \lambda_2\lambda_3\cos 2A =$$
$$(\lambda_1 + \lambda_3\cos 2B + \lambda_2\cos 2C)^2 + \lambda_2^2(1 - \cos^2 2C) +$$
$$\lambda_3^2(1 - \cos^2 2B) + 2\lambda_2\lambda_3(\cos 2A - \cos 2B\cos 2C) =$$
$$(\lambda_1 + \lambda_3\cos 2B + \lambda_2\cos 2C)^2 + \lambda_2^2\sin^2 2C + \lambda_3^2\sin^2 2B - 2\lambda_2\lambda_3\sin 2B\sin 2C =$$
$$(\lambda_1 + \lambda_3\cos 2B + \lambda_2\cos 2C)^2 + (\lambda_2\sin 2C - \lambda_3\sin 2B)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 4\sum \lambda_2\lambda_3\sin^2 A \leqslant \left(\sum \lambda_1\right)^2 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum \frac{\sin^2 A}{\lambda_1} \leqslant \frac{\left(\sum \lambda_1\right)^2}{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

综述

等号成立仅当 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3\cos 2B + \lambda_2\cos 2C = 0 \\ \lambda_2\sin 2C - \lambda_3\sin 2B = 0 \end{cases}$

设 $\begin{cases} \lambda_2 = k\sin 2B \\ \lambda_3 = k\sin 2C \end{cases}, k \neq 0$

$$\lambda_1 = k(-\cos 2B\sin 2C - \sin 2B\cos 2C) = -k\sin(2B + 2C) = k\sin 2A \Rightarrow$$
$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$

注 应用正弦定理和余弦定理

$$\frac{\sin 2A}{\lambda_1} = \frac{\sin 2B}{\lambda_2} = \frac{\sin 2C}{\lambda_3} \Rightarrow$$
$$\frac{\sin A\cos A}{\lambda_1} = \frac{\sin B\cos B}{\lambda_2} = \frac{\sin C\cos C}{\lambda_3} \Rightarrow$$
$$\frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{\lambda_1 bc} = \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{\lambda_2 ca} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{\lambda_3 ab} \Rightarrow$$
$$\frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{\lambda_1} = \frac{b^2(c^2 + a^2 - b^2)}{\lambda_2} = \frac{c_2(a^2 + b^2 - c^2)}{\lambda_3} \qquad ⑥$$

现在我们验证式 ①:

$$t^2\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1) =$$
$$a^2(b^2 + c^2 - a^2)[b^2(c^2 + a^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) - a^2(b^2 + c^2 - a^2)] =$$
$$a^2(b^2 + c^2 - a^2)[a^4 - (b^4 - 2b^2c^2 + c^4)] =$$
$$a^2(b^2 + c^2 - a^2)[a^4 - (b^2 - c^2)^2] = a^2\delta$$

其中 $\delta = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$

于是有
$$\frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1)}{a^2}=\frac{\delta}{t^2}=k$$

同理可得
$$\frac{\lambda_2(\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2)}{b^2}=\frac{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)}{c^2}=k$$

因此式 ① 成立,且 ①⇔②,即式 ① 与式 ② 是等价的.

有了推广 12,我们就可建立:

推广 13 设 λ,u,v 为正数,x,y,z 为实数,则对任意 $\triangle ABC$ 有
$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\left(\frac{\lambda+u+v}{2}\right)\sqrt{\frac{x^2}{uv}+\frac{y^2}{v\lambda}+\frac{z^2}{\lambda u}}\tag{M}$$

等号成立仅当
$$\begin{cases}\lambda:u:v=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C\\ x:y:z=\sec A:\sec B:\sec C\end{cases}\tag{⑦}$$

式(M) 与前面的几个推广式相比较,不仅右边多了参数 λ,u,v,而等号成立的条件不再特殊,且与 $\angle A,\angle B,\angle C$"亲如一家,密不可分"。

当 $\lambda=u=v$ 时,式(M) 化为我们熟悉的
$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\tag{⑧}$$

当 $x=y=z$ 时,式(M) 化为
$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\left(\sqrt{\frac{(\lambda+u+v)^3}{\lambda uv}}\right)\times\frac{1}{2}\tag{⑨}$$

当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(M) 化为代数不等式
$$\sqrt{3}(x+y+z)\leqslant(\lambda+u+v)\sqrt{\frac{x^2}{uv}+\frac{y^2}{v\lambda}+\frac{z^2}{\lambda u}}\tag{⑩}$$

证明 应用式(L) 和柯西不等式有
$$\sum x\sin A=\sum\left(x\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\sin A}{\sqrt{\lambda}}\right)\leqslant\left[\sum(x\sqrt{\lambda})^2\sum\left(\frac{\sin A}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$
$$\left[\left(\sum\lambda x^2\right)\left(\sum\frac{\sin^2 A}{\lambda}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\left[\left(\sum\lambda x^2\right)\frac{\left(\sum\lambda\right)^2}{4\lambda uv}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\sum\frac{x^2}{uv}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sum\lambda}{2}\right)\tag{⑪}$$

即式(M) 成立,等号成立仅当
$$\frac{\sin 2A}{\lambda}=\frac{\sin 2B}{u}=\frac{\sin 2C}{v}\tag{⑫}$$

及
$$x\sqrt{\lambda}:\frac{\sin A}{\sqrt{\lambda}}=y\sqrt{u}:\frac{\sin B}{\sqrt{u}}=z\sqrt{v}:\frac{\sin C}{\sqrt{v}}\Rightarrow\frac{\sin A}{\lambda x}=\frac{\sin B}{uy}=\frac{\sin C}{vz}\tag{⑬}$$

⑫ ÷ ⑬ 得

$$\frac{x\sin 2A}{\sin A}=\frac{y\sin 2B}{\sin B}=\frac{z\sin 2C}{\sin C}\Rightarrow x\cos A=y\cos B=z\cos C \qquad ⑭$$

式 ⑫ 和式 ⑭ 联合即得式 ⑪.

有趣的是：

(1) 如果在式(M) 中令

$$(p,q,r)=\left(\sqrt{\frac{x^2}{uv}},\sqrt{\frac{y^2}{v\lambda}},\sqrt{\frac{z^2}{\lambda u}}\right)$$

应用不等式

$$\sum\frac{qr}{p}\geqslant\sqrt{3\sum p^2}\Rightarrow\sqrt{3\sum\frac{x^2}{uv}}\leqslant\sum\frac{yz}{\lambda x}\Rightarrow$$

$$\sum x\sin x\leqslant\left(\frac{\sum\lambda}{2}\right)\left(\sum\frac{x^2}{uv}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{\sum\lambda}{2\sqrt{3}}\right)\sum\frac{yz}{\lambda x}$$

这样,我们又得到了式(M) 的一个漂亮推论

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{\lambda+u+v}{2\sqrt{3}}\left(\frac{yz}{\lambda x}+\frac{zx}{uy}+\frac{xy}{vz}\right) \qquad (\mathrm{N})$$

综述

等号成立的条件再加

$$\lambda x^2=uy^2=vz^2 \qquad ⑮$$

在式(N) 中令$(\lambda,u,v)=\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q},\frac{1}{r}\right)$又得

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{qr+rp+pq}{2\sqrt{3}pqr}\left(\frac{yz}{x}p+\frac{zx}{y}q+\frac{xy}{z}r\right) \qquad (\mathrm{O})$$

(2) 如果 $x,y,z>0$,再设 $\alpha,\beta\in(0,1)$ 且 $\alpha+\beta=1$,应用式(L) 和赫尔特不等式有

$$\sum x(\sin A)^{2\alpha}\leqslant\left(\sum\frac{\sin^2A}{\lambda}\right)^{\alpha}\left[\sum(x\lambda^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\beta}\leqslant$$

$$\left[\frac{(\lambda+u+v)^2}{4\lambda uv}\right]^{\alpha}\left[\sum(x\lambda^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\beta}\Rightarrow\sum x(\sin A)^{2\alpha}\leqslant$$

$$\left(\frac{\lambda+u+v}{2}\right)^{2\alpha}\left[\sum\left(\frac{x}{(uv)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\beta} \qquad (\mathrm{P})$$

式(P) 即为式(M) 的指数推广,等号成立仅当

$$\lambda:u:v=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$$

$$x:y:z=\frac{(\sin A)^{\beta-\alpha}}{\cos A}:\frac{(\sin B)^{\beta-\alpha}}{\cos B}:\frac{(\cos C)^{\beta-\alpha}}{\cos C} \qquad ⑯$$

显然,当 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 时,式(P) 即为式(M).

可见,应用式(L)"开山劈路" 建设三角形正弦和不等式的加权推广是行之有效的.下面我们再举两例,说明式(L) 应用的重要性.

推广 14 设 λ,u,v,x,y,z 均为正数,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{xyz}{2}\left(\frac{\lambda}{x^2}+\frac{u}{y^2}+\frac{v}{z^2}\right)\sqrt{\frac{\lambda+u+v}{\lambda uv}} \qquad (\mathrm{Q})$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}x\cos A = y\cos B = z\cos C \\ \lambda\cot A = u\cot B = v\cot C\end{cases} \tag{17}$$

特别地,若令$(\lambda,u,v)=(x,y,z)$,则式(Q)左边为

$$\frac{1}{2}xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}=\frac{1}{2}(yz+zx+xy)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}$$

这样式(Q)化为推论

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant\frac{1}{2}(yz+zx+xy)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} \tag{I}$$

这正是推广9中我们尚未证明的Klamkin不等式,因此式(Q)是式(I)的一个参数推广。

证明　应用式(I)有

$$\begin{cases}\dfrac{\sin^2A}{\lambda_1}+\dfrac{\sin^2B}{\lambda_2}+\dfrac{\sin^2C}{\lambda_3}\leqslant\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \\ \text{令}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\left(\dfrac{\lambda}{x^2},\dfrac{u}{y^2},\dfrac{v}{z^2}\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\sum\frac{x^2\sin^2A}{\lambda}\leqslant\frac{(xyz)^2}{4\lambda uv}\left(\sum\frac{\lambda}{x^2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\left(\sum x\sin A\right)^2\leqslant\left(\sum\lambda\right)\left(\sum\frac{x^2\sin^2A}{\lambda}\right)\leqslant$$

$$\frac{\sum\lambda}{\lambda uv}\cdot\left(\frac{xyz}{2}\sum\frac{\lambda}{x^2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\sum x\sin A\leqslant\frac{xyz}{2}\left(\sum\frac{\lambda}{x^2}\right)\left(\frac{\sum\lambda}{\lambda uv}\right)^{\frac{1}{2}}$$

这即为式(Q),等号成立仅当

$$\begin{cases}\dfrac{x^2\sin 2A}{\lambda}=\dfrac{y^2\sin 2B}{u}=\dfrac{z^2\sin 2C}{v} \\ \dfrac{x\sin A}{\lambda}=\dfrac{y\sin B}{u}=\dfrac{z\sin C}{v}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\cos A=y\cos B=z\cos C \\ \lambda\cot A=u\cot B=v\cot C\end{cases}$$

9　加权推广Ⅳ

回顾我们在前面介绍的式(H)(Vasic不等式)、式(I)(Klamkin不等式)及

$$\sum x\sin A\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{\sum x^2}$$

它们的共同之处是:权系数单一(不含参数),导致了等号成立的条件特殊.

事实是这样绝对的吗?在20世纪90年代我国的杨克昌老师就百次打破了现状,首先建立了:

推广15(杨克昌)　对任意正数x,y,z及任意$\triangle ABC$,有

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}\sin A+\sqrt{\frac{y}{z+x}}\sin B+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\sin C\leqslant\sqrt{\frac{(x+y+z)^3}{(y+z)(z+x)(x+y)}}\quad(\mathrm{R})$$

等号成立仅当

$$\frac{\sin^2A}{x(y+z)}=\frac{\sin^2B}{y(z+x)}=\frac{\sin^2C}{z(x+y)}\quad ①$$

可见,虽然式(R)不含参数,但等号成立的条件式①都风采别致,令人满意,因此,式(R)的外观结构与众不同,别具一格.

证明　在式(L)中作置换,应用柯西不等式有

$$\begin{cases}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(y+z,z+x,x+y)\\ \sum\frac{\sin^2A}{\lambda_1}\leqslant\frac{\left(\sum\lambda_1\right)^2}{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\end{cases}\Rightarrow\sum\frac{\sin^2A}{y+z}\leqslant\frac{\left(\sum x\right)^2}{\prod(y+z)}\Rightarrow\quad ②$$

$$\left(\sum\sqrt{\frac{x}{y+z}}\sin A\right)^2\leqslant\left(\sum x\right)\sum\frac{\sin^2A}{y+z}\leqslant\frac{\left(\sum x\right)^3}{\prod(y+z)}\Rightarrow$$

$$\sum\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}\sin A\right)\leqslant\sqrt{\frac{\left(\sum x\right)^3}{\prod(y+z)}}$$

即式(R)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}\frac{\sin 2A}{y+z}=\frac{\sin 2B}{z+x}=\frac{\sin 2C}{x+y}\\ \frac{\sin^2A}{x(y+z)}=\frac{\sin^2B}{y(z+x)}=\frac{\sin^2C}{z(x+y)}\end{cases}\Rightarrow\frac{x(y+z)}{a^2}=\frac{y(z+x)}{b^2}=\frac{z(x+y)}{c^2}$$

进一步地,如果应用加权不等式有

$$\sum\sqrt{\frac{x}{y+z}}\sin A=\sum\left(x\cdot\frac{\sin A}{\sqrt{x(y+z)}}\right)\geqslant\left(\sum x\right)\left[\prod\left(\frac{\sin A}{\sqrt{x(y+z)}}\right)^x\right]^{1/\sum x}\quad ③$$

再结合式(R),我们得到一个漂亮的推论

$$\sin^xA\sin^yB\sin^zC\leqslant\sqrt{\frac{\left(\prod x^x\right)\left(\sum x\right)^{\sum x}}{\prod(y+z)^{y+z}}}\quad(\mathrm{S})$$

且等号成立的条件仍然是式①,丝毫未变.此外,如果我们仍设 x,y,z,λ,u,v 均为正数,应用式(L)和加权不等式,有

$$\frac{\left(\sum\lambda\right)^2}{4\lambda uv}\geqslant\sum\frac{\sin^2A}{\lambda}=\sum\frac{x}{2}\left(\frac{2\sin^2A}{\lambda x}\right)\geqslant\left(\sum\frac{x}{2}\right)\left[\prod\left(\frac{2\sin^2A}{\lambda x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{\sum x}}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\sum x\right)\cdot 2\left[\prod\left(\frac{\sin A}{\sqrt{\lambda x}}\right)^x\right]^{\frac{2}{\sum x}}\Rightarrow$$

$$\prod\left(\frac{\sin A}{\sqrt{\lambda x}}\right)^x\leqslant\left(\frac{\sum\lambda}{2\sqrt{\lambda uv}}\right)^{\sum x}\Rightarrow$$

$$\prod(\sin A)^x\leqslant\prod(\sqrt{\lambda x})^x\left(\frac{\sum\lambda}{2\sqrt{\lambda uv}}\right)^{\sum x}\Rightarrow$$

综述

$$(\sin A)^x(\sin B)^y(\sin C)^z \leqslant$$
$$[(\lambda x)^x(uy)^y(vz)^z]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda+u+v}{2\sqrt{\lambda uv}}\right)^{x+y+z} \tag{S_1}$$

这又是一个漂亮的新推论,等号成立仅当

$$\begin{cases}\lambda : u : v = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \\ \dfrac{\sin^2 A}{\lambda x} = \dfrac{\sin^2 B}{uy} = \dfrac{\sin^2 C}{vz}\end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases}\lambda : u : v = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \\ x : y : z = \sec A : \sec B : \sec C\end{cases} \tag{④}$$

如果令 $x + y + z = \lambda + u + v = 1$,那么式($S_1$)可简化为

$$(\sin A)^x(\sin B)^y(\sin C)^z \leqslant \sqrt{\frac{(\lambda x)^x(uy)^y(vz)^z}{4\lambda uv}}$$

进一步地,令人振奋激动的是,式(R)还有非常优美的指数推广:

推广 16 设 $0 \leqslant s \leqslant 1$,则对任意 $\triangle ABC$ 及任意正数 x,y,z 有

$$\frac{x^{1-s}}{(y+z)^s}(\sin A)^{2s} + \frac{y^{1-s}}{(z+x)^s}(\sin B)^{2s} + \frac{z^{1-s}}{(x+y)^s}(\sin C)^{2s} \leqslant$$
$$\frac{(x+y+z)^{1+s}}{[(y+z)(z+x)(x+y)]^s} \tag{T}$$

等号成立仅当

$$\frac{x(y+z)}{a^2} = \frac{y(z+x)}{b^2} = \frac{z(x+y)}{c^2} \tag{⑤}$$

可见,式(R)虽然上升到了指数推广的式(T),但等号成立的条件“依然如故”,这种“忠贞之情”难能可贵.

特别地,当 $s = 0$ 时,式(T)变为等式

$$x + y + z = x + y + z$$

当 $s = 1$ 时,式(T)等价于式(L);当 $s = \frac{1}{2}$ 时,式(T)化为式(R).可见式(T)在这范畴内“包罗万象”.

如果仅从外观看,式(T)威风凛凛,雄居南山,其实,它是纸老虎,只要我们巧妙应用赫尔特不等式或加权幂平均不等式,就轻松地征服它.

证法 1 我们只须证明 $0 < s < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - s < 1$ 时的情形即可.注意到 $s + (1 - s) = 1$,应用赫尔特不等式有

$$\left(\sum x\right)^{1-s}\left(\sum \frac{\sin^2 A}{y+z}\right)^s \geqslant \sum\left[x^{1-s}\left(\frac{\sin^2 A}{y+z}\right)^s\right] = \sum \frac{x^{1-s}}{(y+z)^s}(\sin A)^{2s} \tag{⑥}$$

等号成立仅当

$$\frac{\sin^2 A}{x(y+z)} = \frac{\sin^2 B}{y(z+x)} = \frac{\sin^2 C}{z(x+y)} \tag{⑦}$$

再结合式(L)有

$$\sum \frac{\sin^2 A}{y+z} \leqslant \frac{\left(\sum x\right)^2}{\prod (y+z)} \tag{⑧}$$

等号成立的条件为式 ⑦,式 ⑥,⑧ 结合得

$$\sum \frac{x^{1-s}}{(y+z)^s}(\sin A)^{2s} \leqslant \left(\sum x\right)^{1-s}\left[\frac{\left(\sum x\right)^2}{\prod (y+z)}\right]^s = \frac{\left(\sum x\right)^{1+s}}{\left[\prod (y+z)\right]^s}$$

即式(T) 成立.等号成立的条件为 ⑦.

证法 2 注意到 $0 < s < 1$ 应用加权幂平均不等式有

$$\left\{\frac{\sum x\left(\frac{\sin^2 A}{x(y+z)}\right)^s}{\sum x}\right\}^{\frac{1}{s}} \leqslant \frac{\sum x\left(\frac{\sin^2 A}{x(y+z)}\right)}{\sum x} =$$

$$\left(\frac{1}{\sum x}\right)\sum \frac{\sin^2 A}{y+z} \leqslant \frac{\sum x}{\prod (y+z)} \Rightarrow$$

$$\sum x\left(\frac{\sin^2 A}{x(y+z)}\right)^s \leqslant \left[\frac{\sum x}{\prod (y+z)}\right]^s\left(\sum x\right) \Rightarrow$$

$$\sum \frac{x^{1-s}}{(y+z)^s}(\sin A)^{2s} \leqslant \frac{\left(\sum x\right)^{1+s}}{\left[\prod (y+z)\right]^s}$$

等号成立仅当

$$\frac{\sin^2 A}{x(y+z)} = \frac{\sin^2 B}{y(z+x)} = \frac{\sin^2 C}{z(x+y)}$$

当你回首细看式(R)时,才发现它的左边 $\sin A, \sin B, \sin C$ 的系数庞大,不便应用,纵然相逢,也会避而不取.

其实,只要我们作转化,令

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} = \alpha,\quad \sqrt{\frac{y}{z+x}} = \beta,\quad \sqrt{\frac{z}{x+y}} = \gamma$$

则有

推广 17(杨克昌) 若正数 α, β, γ 满足条件

$$\frac{1}{\alpha^2+1} + \frac{1}{\beta^2+1} + \frac{1}{\gamma^2+1} = 2 \tag{⑨}$$

则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C \leqslant \sqrt{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)} \tag{U}$$

等号成立仅当

$$\frac{\alpha a}{\alpha^2+1} = \frac{\beta b}{\beta^2+1} = \frac{\gamma c}{\gamma^2+1} \tag{⑩}$$

瞧!经过这样一转化,庞大臃肿的"胖美人"式(S),立即"减肥"成为一个"婀娜苗条"的"天仙"式(U).

综述

一般地,若权系 α,β,γ 不满足式 ①,那么我们总可以引入正参数 k,使得

$$\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{k}}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{\sqrt{k}}\right)^2+1}=2 \tag{11}$$

显然,这样的 k 是存在的,也是唯一的.实际上,关于 k 的方程 ⑪ 变形整理得

$$k^3-(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)k-2(\alpha\beta\gamma)^2=0 \tag{12}$$

因此可以推知这一关于 k 的三次方程有唯一正根,同时,由

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

不难验证方程 ⑫ 的唯一正根为

$$k=2\left(\sqrt{\frac{u}{3}}\right)\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}(\alpha\beta\gamma)^2}{u\sqrt{u}}\right) \tag{13}$$

其中
$$u=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$$

且还易推之
$$\frac{\alpha}{\alpha^2+k},\quad \frac{\beta}{\beta^2+k},\quad \frac{\gamma}{\gamma^2+k}$$

这三个量均满足三角形的三边长度关系.

于是又得到一个新的推广式:

推广 18(杨克昌) 设正数 α,β,γ,k 满足条件

$$\frac{1}{\alpha^2+k}+\frac{1}{\beta^2+k}+\frac{1}{\gamma^2+k}=\frac{2}{k} \tag{14}$$

则对于任意 $\triangle ABC$ 有

$$\alpha\sin A+\beta\sin B+\gamma\sin C\leqslant\sqrt{\frac{1}{k^3}(\alpha^2+k)(\beta^2+k)(\gamma^2+k)} \tag{V}$$

等号成立仅当

$$\frac{\alpha\sin A}{\alpha^2+k}=\frac{\beta\sin B}{\beta^2+k}=\frac{\gamma\sin C}{\gamma^2+k} \tag{15}$$

其中

$$\begin{cases} k=2\left(\sqrt{\frac{u}{3}}\right)\cos\theta \\ u=(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2 \\ \theta=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}(\alpha\beta\gamma)^2}{u\sqrt{u}}\right) \end{cases} \tag{16}$$

10 再度推广

关于三角形的正弦和不等式,我们已经建立了它的一系列推广,但这些推广均在 $\triangle ABC$ 内,活动范围太狭窄,不够宽广.为了拓宽视野,开阔眼界,必须让我们的思维发散创新.

推广 19(杨学枝) 设 x,y,z 是使 $xyz>0$ 的任意实数,λ,u,v 为任意正数,α,β,γ 是

任意实数,且满足 $\alpha+\beta+\gamma=n\pi(n\in\mathbf{Z})$,则

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}\lambda+\frac{zx}{y}u+\frac{xy}{z}\gamma\right)\sqrt{\frac{\lambda+u+v}{\lambda uv}}\tag{W}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma\\ \lambda\cot\alpha=u\cot\beta=v\cot\gamma\end{cases}\tag{①}$$

本推广是杨学枝老师于20世纪90年代建立的,他把 $\triangle ABC$ 中的 $\angle A,\angle B,\angle C$ 推广为满足条件 $\alpha+\beta+\gamma=n\pi(n\in\mathbf{Z})$ 的任意实数,真是一反常规,出手不凡.

特别地,当取 $(\lambda,u,v)=(x,y,z),(\alpha,\beta,\gamma)=(A,B,C)$ 时,式(W)成立刻化为 Klamkin 不等式.

证法1 在 $\triangle ABC,\triangle A'B'C'$ 中,我们过去有结论

$$\sum x^2\tan A\geqslant 2\sum yz\sin A'\tag{②}$$

令 $(A',B',C')=(\alpha,\beta,\gamma)$,并注意到 $xyz>0$ 有

$$2\sum yz\sin\alpha\leqslant\sum x^2\tan A\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\sum\left(\frac{\sin\alpha}{x}\right)\leqslant\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x}{yz}\tan A\right)\\ \text{作置换}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)\to(x,y,z)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\tag{③}$$

$$\sum x\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}\sum\left(\frac{yz}{x}\tan A\right)\tag{④}$$

现设

$$\left.\begin{matrix}(\tan A,\tan B,\tan C)=(\lambda t,ut,vt)(t>0)\\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$(\lambda+u+v)t=\lambda uvt^3\Rightarrow t=\sqrt{\frac{\lambda+u+v}{\lambda uv}}\Rightarrow$$

$$\sum x\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum\frac{yz}{x}\lambda\right)t$$

即式(W)成立,等号成立仅当

$$\begin{cases}\frac{(\lambda t)^{-1}}{yz}\sin\alpha=\frac{(ut)^{-1}}{zx}\sin\beta=\frac{(vt)^{-1}}{xy}\sin\gamma\\ \frac{\cos\alpha}{yz}=\frac{\cos\beta}{zx}=\frac{\cos\gamma}{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma\\ \lambda\cot\alpha=u\cot\beta=v\cot\gamma\end{cases}$$

至于 α,β,γ 的其他情况,总有

$$\sum x^2\tan A\geqslant 2\sum yz\cos A'\geqslant 2\sum yz\cos\alpha$$

证法2 (略证)我们只对 n 是偶数的情况加以证明,至于 n 是奇数,只要用 $\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$ 分别取代 α,β,γ 即可.

应用叶军不等式并令

$$(x,y,z)=(x_2x_3,x_3x_1,x_1x_2)\Rightarrow\sum x\sin\alpha=\sum x_2x_3\sin\alpha=$$
$$\sum x_2x_3\frac{\cos(\alpha-\theta_1)}{\sin\theta_1}+\sum x_2x_3\cot\theta_1\cos(\pi-\alpha)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\sum(x_2^2+x_3^2)\cot\theta_1+\frac{1}{2}\left(\prod\cot\theta_1\right)\sum x_1^2\tan^2\theta_1=$$
$$\frac{1}{2}\sum x_1^2\tan\theta_1=\frac{1}{2}\sum\frac{yz}{x}\tan\theta_1=$$
$$\frac{1}{2}t\left(\sum\frac{yz}{x}\lambda\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sum\lambda}{\lambda uv}}\right)\left(\sum\frac{yz}{x}\lambda\right)$$

即式(W)成立.

前面的证法1是笔者提供的,证法2是浓缩杨老师的.此外,杨学枝老师还为我们建立了一个更漂亮的:

推广20(杨学枝) (条件同上)则有

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma\leqslant$$
$$\left[\frac{\sqrt{\lambda(u+v)}}{x}+\frac{\sqrt{u(v+\lambda)}}{y}+\frac{\sqrt{v(\lambda+u)}}{z}\right]^2\frac{xyz}{4\sqrt{\lambda uv(\lambda+u+v)}}\tag{X}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma\\ \dfrac{\sqrt{\lambda(u+v)}}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{u(v+\lambda)}}{\sin\beta}=\dfrac{\sqrt{v(\lambda+u)}}{\sin\gamma}\end{cases}\tag{5}$$

提示:用式(L)可推广为

$$\frac{\left(\sum\lambda_1\right)^2}{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\geqslant\sum\frac{\sin^2\alpha}{\lambda_1}\tag{6}$$

令

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\left(\frac{\sqrt{\lambda(u+v)}}{x},\frac{\sqrt{u(v+\lambda)}}{y},\frac{\sqrt{v(\lambda+u)}}{z}\right)\Rightarrow$$
$$m^2\left(\frac{\sum\lambda}{\prod(u+v)}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sum\frac{x\sin^2\alpha}{\sqrt{\lambda(u+v)}}\tag{7}$$

其中 m^2 表示式(X)的右边.应用柯西不等式

$$m^2\sum x\sqrt{\lambda(u+v)}\cdot\left(\frac{\sum\lambda}{\prod(u+v)}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant$$
$$\left(\sum x\sqrt{\lambda(u+v)}\right)\cdot\sum\frac{x\sin^2\alpha}{\sqrt{\lambda(u+v)}}\geqslant\left(\sum x\sin\alpha\right)^2\Rightarrow$$
$$\sum x\sin\alpha\leqslant m\left[\sum x\sqrt{\lambda(u+v)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sum\lambda}{\prod(u+v)}\right]^{\frac{1}{4}}\tag{8}$$

因此只须证明

$$\left[\sum x\sqrt{\lambda(u+v)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sum\lambda}{\prod(u+v)}\right]^{\frac{1}{4}}\leqslant m \tag{9}$$

即得

$$\sum x\sin\alpha\leqslant m^2 \tag{10}$$

对于正弦和不等式,我们在前面介绍了近20个推广式,它们个个花枝招展,优雅美丽.但它们均涉及一个$\triangle ABC$或一组角度α,β,γ,我们可以将它们从一个$\triangle ABC$推广到多个三角形$\{\triangle A_nB_nC_n\}$吗?其实,只要应用赫尔特不等式均可.

赫尔特不等式 设$a_{ij}>0,\alpha_{ij}>0(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m;2\leqslant m,n\in\mathbf{N})$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\alpha_i}\geqslant\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_i}\right) \tag{*}$$

等号成立仅当

$$\frac{a_{1l}}{a_{1s}}=\frac{a_{2l}}{a_{2s}}=\cdots=\frac{a_{nl}}{a_{ns}},l,s=1,2,\cdots,m \tag{11}$$

综述

对于前面正弦和不等式的加权推广,均可统一表示成

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C\leqslant M_k \tag{12}$$

其中

$$M_k=M_k\left(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{u},\frac{z}{v}\right),k=1,2,\cdots$$

表示关于正权系数x,y,z与正参数λ,u,v的共同代数表达式.

那么,对于$n(n\in\mathbf{N})$个三角形:$\triangle A_1B_1C_1,\triangle A_2B_2C_2,\cdots,\triangle A_nB_nC_n$,应用赫尔特不等式有

$$\begin{aligned}&x\prod_{i=1}^{n}(\sin A_i)^{\alpha_i}+y\prod_{i=1}^{n}(\sin B_i)^{\alpha_i}+z\prod_{i=1}^{n}(\sin C_i)^{\alpha_i}=\\&\prod_{i=1}^{n}(x\sin A_i)^{\alpha_i}+\prod_{i=1}^{n}(y\sin B_i)^{\alpha_i}+\prod_{i=1}^{n}(z\sin C_i)^{\alpha_i}\leqslant\\&\prod_{i=1}^{n}M_k^{\alpha_i}=M_k^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}=M_k\Rightarrow\sum x\prod_{i=1}^{n}(\sin A_i)^{\alpha_i}\leqslant M_k\end{aligned} \tag{Y}$$

比如,对于$\theta\in(0,1)$,我们应用式(P)有

$$\sum x\prod_{i=1}^{n}(\sin^{2\theta}A_i)^{\alpha_i}\leqslant\left(\frac{\lambda+u+v}{2}\right)^{2\theta}\left\{\sum\left[\frac{x}{(uv)^{\theta}}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}\right\}^{1-\theta} \tag{Z}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}\lambda:u:v=\sin 2A_i:\sin 2B_i:\sin 2C_i\\x:y:z=\dfrac{(\sin A_i)^{1-2\theta}}{\cos A_i}:\dfrac{(\sin B_i)^{1-2\theta}}{\cos B_i}:\dfrac{(\sin C_i)^{1-2\theta}}{\cos C_i}\end{cases} \tag{13}$$

式⑬表示为

$$\begin{cases}\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \cdots \backsim \triangle A_nB_nC_n \\ \lambda : u : v = \sin 2A_1 : \sin 2B_1 : \sin 2C_1 \\ x : y : z = \dfrac{(\sin A_1)^{1-2\theta}}{\cos A_1} : \dfrac{(\sin B_1)^{1-2\theta}}{\cos B_1} : \dfrac{(\sin C_1)^{1-2\theta}}{\cos C_1}\end{cases} \tag{14}$$

应用赫尔特不等式,又易得到结论,对于凸 n 边形 $A_{1i}A_{2i}\cdots A_{ni}(1 \leqslant i \leqslant m \in \mathbf{N}, 3 \leqslant n \in \mathbf{N})$,有

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(\sin A_{ij})^{\alpha_i} \leqslant n\sin\frac{2\pi}{n} \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{A_{ij}}{n-2}\right)^{\alpha_i} \leqslant n\sin\frac{\pi}{n} \tag{16}$$

其中 $\alpha_i > 0$,且$\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$.

11　四元推广

我们在前面加权推广了的不等式,均为3元$\angle A,\angle B,\angle C$或$\alpha,\beta,\gamma$的三角不等式,为了更好地继承和发展这一"文化".我们尊敬的杨学枝老师又"重出江湖",施展"奇招异术",建立了涉及四个角的三角不等式的加权推广:

推广 21(杨学枝)　设 $x,y,z,w > 0, \alpha + \beta + \gamma + \theta = (2k+1)\pi(k \in \mathbf{Z})$,则有

$$x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma + w\sin\theta \leqslant \sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}} \tag{A$_1$}$$

等号成立仅当

$$x\cos\alpha = y\cos\beta = z\cos\gamma = w\cos\theta \tag{1}$$

可见,不论从题意上看,还是从外观结构上看,此推广在三角不等式范畴内,具有罕见的美,独特的妙,且证明并非高不可攀,可堪称稀世珍宝,足可收藏!

证明　为了方便起见,设

$$\begin{cases}u = x\sin\alpha + y\sin\beta \\ v = z\sin\gamma + w\sin\theta\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}u^2 = {} & x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + 2xy\sin\alpha\sin\beta = \\ & x^2 + y^2 - (x^2\cos^2\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta + y^2\cos^2\beta) - 2xy(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\ & x^2 + y^2 - (x\cos\alpha - y\cos\beta)^2 - 2xy\cos(\alpha+\beta) \leqslant \\ & x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha+\beta) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta) \leqslant \frac{x^2+y^2-u^2}{2xy} \\ &\text{同理 } \cos(\gamma+\theta) \leqslant \frac{z^2+w^2-v^2}{2zw}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma+\theta)\leqslant\dfrac{x^2+y^2-u^2}{2xy}+\dfrac{z^2+w^2-v^2}{2zw}\\ \alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma+\theta)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{x^2+y^2-u^2}{2xy}+\frac{z^2+w^2-v^2}{2zw}\geqslant 0\Rightarrow$$

$$\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\leqslant\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}=\frac{(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}\Rightarrow$$

$$M=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}\right)(xy+zw)=$$

$$\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}\geqslant$$

$$(xy+zw)\left(\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\right)(\text{应用柯西不等式})\geqslant$$

$$(u+v)^2\Rightarrow u+v\leqslant\sqrt{M}$$

即式(A_1)成立.等号成立仅当

$$\begin{cases}x\cos\alpha=y\cos\beta & ②\\ z\cos\gamma=w\cos\theta & ③\end{cases}$$

综

及

述

$$\begin{cases}\dfrac{u^2}{xy}:xy=\dfrac{v^2}{zw}:zw & ④\\ \alpha+\beta+\gamma+w=(2k+1)\theta & ⑤\end{cases}$$

由式②和③可设

$$\begin{cases}x=t\cos\beta\\ y=t\cos\alpha\end{cases},t>0$$

$$\begin{cases}z=k\cos\theta\\ w=k\cos\gamma\end{cases},k>0$$

由④有

$$\frac{u}{xy}=\frac{v}{zw}\Rightarrow\frac{x\sin\alpha+y\sin\beta}{xy}=\frac{z\sin\gamma+w\sin\theta}{zw}=$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{t\sin(\alpha+\beta)}{t^2\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{k\sin(\gamma+\theta)}{k^2\cos\gamma\cos\theta}\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin(\gamma+\theta)\end{array}\right\}\Rightarrow t\cos\alpha\cos\beta=k\cos\gamma\cos\theta=y\cos\beta=z\cos\gamma \qquad ⑥$$

②,③,⑥三式结合得式(A_1),等号成立为式①.

(1)上述证法先用u,v巧作代换,运用已知条件配方,再应用柯西不等式推导出

$$u+v\leqslant\sqrt{M}$$

达到了证明的目的.仅就证明过程而言,篇幅并非较长,只是技巧性非常强.

不过,凡是这类优美妙题,求导它的等号成立的条件是颇费周折,但又必须得完成的事情,因为推导过程不仅复杂,技巧性强,且书写篇幅也较长,有时甚至超过证明过程的

篇幅,这就是三角不等式的特性.

(2) 本推广又是一道奥赛名题,如花朵和星月一样令人喜爱.

如果取 $\theta = (k+1)\pi \Rightarrow \sin\theta = 0$,那么又可得到一个非常漂亮的推论

$$x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma \leqslant \sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}} \tag{A_2}$$

等号成立仅当

$$w = x\cos\alpha = y\cos\beta = z\cos\gamma \tag{7}$$

其中

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

式(A_2)可视为正弦和不等式的一个新的加权推广,其中 x,y,z 是权系数,只有 w 一个是参数,因此与以前介绍的一系列加权推广相比较,式(A_2)倍显与众不同,特殊奇异.

也许有人对式(A_2)表示怀疑,那就让我们验证一下吧!

验证:记 $p = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,有

$$xy + zw = \frac{w^2}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{w^2}{\cos\gamma} = \frac{w^2}{p}(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma) =$$

$$\frac{w^2}{p}[\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)] = \frac{w^2}{p}\sin\alpha\sin\beta \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} xy + zw = \dfrac{w^2}{p}\sin\alpha\sin\beta \\ \text{同理}\begin{cases} yz + zw = \dfrac{w^2}{p}\sin\beta\sin\gamma \\ zx + yw = \dfrac{w^2}{p}\sin\gamma\sin\alpha \end{cases} \end{array}\right\}$$

(注 M 表示式(A_2)右边,且 $xyzw = w^4/p$)$\Rightarrow$

$$M = w\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

又

$$x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma = w\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\right) =$$

$$\left.\begin{array}{l} w(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma) \\ \alpha + \beta + \gamma = k\pi (k \in \mathbf{Z}) \end{array}\right\} = w\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

这充分说明式①确为式(A_2)等号成立的条件.

(3) 现在,我们把式(A_2)列为:

推广 22(杨学枝) 设 $x,y,z,w > 0, \alpha + \beta + \gamma = k\pi (k \in \mathbf{Z})$,则有

$$x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma \leqslant \sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}} \tag{A_2}$$

等号成立仅当

$$w = x\cos\alpha = y\cos\beta = z\cos\gamma \tag{8}$$

如果要求我们单独证明式(A_2),则是很困难的,因为我们不知怎样去处理参数 w,也不知它从何而来,好像是"天外来客".在证明时要先假设 $\alpha + \beta + \gamma + \theta = (2k+1)\pi$,证毕了前面的式($A_1$)后,再令 $\theta = (k+1)\pi$,得 $\sin\theta = 0 \Rightarrow w\sin\theta = 0$,这样就消去了 $z\sin\theta$

这一项,从式(A_1)转化为式(A_2),达到证明式(A_2)的目的.

(4) 如果我们仍记式(A_1)右边为$\sqrt{M}$,并记

$$\begin{cases}P = x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma + w\sin\theta \\ Q = x\cos\theta + y\cos\gamma + z\cos\beta + w\cos\alpha\end{cases}$$

并删去条件"$\alpha + \beta + \gamma + \theta = (2k+1)\pi$",那么第 2003 年我国的一道奥赛题等价于

$$P^2 + Q^2 \leqslant 2M \tag{9}$$

通过探索,我们发现,式 ⑨ 不仅美妙著名,而且还可以推广为:

推广 23 设 $\lambda_i > 0$ 为常数,$\theta_i \in \mathbf{R}(1 \leqslant i \in n, 2 \leqslant n \in \mathbf{N})$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sin\theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cos\theta_{n+1-i}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}\right) \tag{A$_3$}$$

证明 为了简便起见,我们作代换

$$\begin{cases}x_i = \sin\theta_i \\ y_i = \cos\theta_i\end{cases} \Rightarrow x_i^2 + y_i^2 = 1, 1 \leqslant i \leqslant n$$

首先注意到

$$s = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1-i}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i} \tag{10}$$

记

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_{n+1-i}$$

应用柯西不等式有

$$\alpha^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1-i}}\right) \Rightarrow \alpha^2 \leqslant s\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\lambda_{n+1-i}x_i^2) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\beta^2 &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_{n+1-i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{n+1-i}y_i\right)^2 \leqslant \\ &\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-i}}{\lambda_i}\right) = \\ &s\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i}y_i^2\right)\end{aligned} \tag{12}$$

应用 $x_i^2 + y_i^2 = 1(1 \leqslant i \leqslant n)$,⑪ + ⑫ 得

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqslant s\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i\lambda_{n+1-i}(x_i^2 + y_i^2)] \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \leqslant s\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i} \tag{13}$$

此即为式(A_3),等号成立的条件是

$$\begin{cases}\lambda_n x_1 = \lambda_{n-1}x_2 = \cdots = \lambda_1 x_n \\ \lambda_1 y_1 = \lambda_2 y_2 = \cdots = \lambda_n y_n \\ x_i^2 + y_i^2 = \sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i = 1\end{cases}$$

特别地,当 $n = 2k(k \in \mathbf{N})$ 为偶数时,由于

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_{n+1-i} = \sum_{i=1}^{2k}\lambda_i\lambda_{2k+1-i} = 2\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\lambda_{2k+1-i} \tag{14}$$

综述

这样,式(A_3)又化为

$$\left(\sum_{i=1}^{2k}\lambda_i x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2k}\lambda_{2k+1-i}y_i\right)^2\leqslant$$
$$2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\lambda_{2k+1-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{2k}\frac{\lambda_{2k+1-i}}{\lambda_i}\right)\tag{A_3)$'$}$$

在上式中取 $k=2$,并作置换后可得

$$P^2+Q^2\leqslant 2M \tag{15}$$

顺便指出:注意到$\sum\limits_{i=1}^{n}y_{n+1-i}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$并应用柯西不等式有

$$\left.\begin{cases}\alpha^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\\ \beta^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_{n+1-i}\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_{n+1-i}^2\right)\end{cases}\right.=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\Rightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)\Rightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\tag{A_3)$''$}$$

这又是一个新的结论.

12 多元推广

三角形余弦和不等式的加权推广便是三角母不等式,而三角母不等式有漂亮的多元推广.正弦和不等式至今已被推到四元加权推广,那么,我们能在多元上建立正弦和不等式的加权推广吗?为此,我们努力吧!

我们首先有

结论 5 设 $x_i>0,\theta_i\in[0,\pi](i=1,2,\cdots,n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i=\pi$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\sin\theta_i\leqslant\frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\tag{S_1}$$

证明 应用我们过去建立的结论

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i\leqslant\frac{9}{4}$$

及柯西不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\sin\theta_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

等号成立仅当 $n=3$ 且 $x_1=x_2=x_3$ 及 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{\pi}{3}$.

式(S_1)等号成立的条件太特殊,不是我们所期望的.这时,我们想到了应用赫尔特不等式.

结论 6 设$0<k<1, x_i>0(1\leqslant i\leqslant n, 3\leqslant n\in\mathbf{N})$,则对任意凸$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(\sin A_i)^k\leqslant\left(n\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\frac{1}{1-k}}\right)^{1-k}\tag{S_2}$$

证明 应用赫尔特不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(\sin A_i)^k\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sin A_i\right)^k\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\frac{1}{1-k}}\right)^{1-k}\leqslant$$

$$\left(n\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)^k\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\frac{1}{1-k}}\right)^{1-k}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(\sin A_i)^k\leqslant\left(n\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\frac{1}{1-k}}\right)^{1-k}$$

等号成立仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$,$A_1A_2\cdots A_n$为正n边形.

可见,式(S_2)也不是我所要追求的推广式.

为了建立更好的推广式,须应用我们在前文中介绍的:

引理 1(叶军) 设实数$\varphi_i(1\leqslant i\leqslant n)$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z}, 3\leqslant n\in\mathbf{N})$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\pi(\alpha_i>0)$,则对任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$(约定$x_{n+1}\equiv x_1$)有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+x_{i+1}^2)\cot\alpha_i\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\left(x_ix_{i+1}\frac{\cos\varphi_i}{\sin\alpha_i}\right)\tag{*}$$

其中等号成立仅当

$$x_1x_2\frac{\sin\varphi_1}{\sin\alpha_1}=x_2x_3\frac{\sin\varphi_2}{\sin\alpha_2}=\cdots=x_{n-1}x_n\frac{\sin\varphi_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}=x_nx_1\frac{\sin\varphi_n}{\sin\alpha_n}$$

在式(*)中取$\alpha_i=\frac{\pi}{n}(1\leqslant i\leqslant n)$得

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\varphi_i\leqslant\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2\tag{\triangle}$$

等号成立仅当

$$x_1x_2\sin\varphi_1=x_2x_3\sin\varphi_2=\cdots=x_{n-1}x_n\sin\varphi_{n-1}=x_nx_1\sin\varphi_n$$

此外,在前面推广 21 的式(A_1)中,作代换

$$\begin{cases}(x,y,z,w)=(x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,x_4x_1)\\(\alpha,\beta,\gamma,\theta)=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\end{cases}\Rightarrow$$

$$x_1x_2\sin\theta_1+x_2x_3\sin\theta_2+x_3x_4\sin\theta_3+x_4x_1\sin\theta_4\leqslant$$

$$\sqrt{2(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_4^2)}\tag{A_1'}$$

等号成立仅当

$$x_1x_2\cos\theta_1=x_2x_3\cos\theta_2=x_3x_4\cos\theta_3=x_4x_1\cos\theta_4$$

注意到

$$\sqrt{2(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_4^2)} \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{4}x_ix_{i+1}\sin\theta_i \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right) \tag{A_1}''$$

可见,式$(A_1)'$不仅比式(A_1)简洁紧凑,而且还新生了漂亮的推论式$(A_1)''$,进一步地,式$(A_1)''$又进化出了优美的推广式.

结论 7 设 $n=4m,\sum_{i=1}^{n}\theta_i=(2k-1)\pi(1\leqslant k\leqslant m\in\mathbf{N}),x_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$,约定 $x_{n+1}\equiv x_1$,有

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\sin\theta_i \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \tag{S_3}$$

显然,当 $n=4$ 时,式(S_3)化为式$(A_1)''$.

证明 令

$$\varphi_i=\frac{\pi}{2}-\theta_i(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right)=\frac{n}{2}\pi-\sum_{i=1}^{n}\theta_i=$$
$$2m\pi-(2k-1)\pi=[2(m-k)+1]\pi$$

符合引理要求条件,应用引理,有

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right)\leqslant\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\sin\theta_i\leqslant\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

等号成立仅当

$$x_1x_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=x_2x_3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)=\cdots=x_nx_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)\Rightarrow$$

$$x_1x_2\cos\theta_1=x_2x_3\cos\theta_2=\cdots=x_nx_1\cos\theta_n$$

为了应用引理,本结论设定 $n=4m$ 为 4 的倍数,即 $n=4,8,\cdots,4m(m\in\mathbf{N})$.

现在,我们建立更好的:

结论 8 设 $n=2m+1,\sum_{i=1}^{n}\theta_i=k\pi(m,k\in\mathbf{N}),\lambda_i>0,x_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$,约定 $x_{n+1}\equiv x_1$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sin\theta_i\leqslant\sqrt{M\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{x_ix_{i+1}}\right)} \tag{S_4}$$

其中

$$M=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\right]$$

证明 令

$$\varphi_i=(\pi-2\theta_i)(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \sum_{i=1}^{n}(\pi - 2\theta_i) = n\pi - 2\sum_{i=1}^{n}\theta_i =$$
$$(2m+1)\pi - 2k\pi = [2(m-k)+1]\pi$$

符合引理条件,于是

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos\varphi_i \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos(\pi - 2\theta_i) \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 =$$
$$-\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cos 2\theta_i \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \Rightarrow -\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}(1-2\sin^2\theta_i) \leqslant \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\sin^2\theta_i \leqslant M = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\right] \Rightarrow$$
$$M\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{x_ix_{i+1}}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{x_ix_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\sin^2\theta_i\right)\text{(应用柯西不等式)} \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sin\theta_i \leqslant \sqrt{M\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{x_ix_{i+1}}\right)}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases} x_1x_2\sin\varphi_1 = x_2x_3\sin\varphi_2 = \cdots = x_nx_1\sin\varphi_n \\ \dfrac{x_1x_2\sin\theta_1}{\lambda_1} = \dfrac{x_2x_3\sin\theta_2}{\lambda_2} = \cdots = \dfrac{x_nx_1\sin\theta_n}{\lambda_n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1x_2\sin 2\theta_1 = x_2x_3\sin 2\theta_2 = \cdots = x_nx_1\sin 2\theta_n \\ \dfrac{x_1x_2\sin\theta_1}{\lambda_1} = \dfrac{x_2x_3\sin\theta_2}{\lambda_2} = \cdots = \dfrac{x_nx_1\sin\theta_n}{\lambda_n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1x_2\sin 2\theta_1 = x_2x_3\sin 2\theta_2 = \cdots = x_nx_1\sin 2\theta_n \\ \dfrac{\cos\theta_1}{\lambda_1} = \dfrac{\cos\theta_2}{\lambda_2} = \cdots = \dfrac{\cos\theta_n}{\lambda_n} \end{cases}$$

特别地,当取 $n = 3$ 时

$$M = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3}x_ix_{i+1}\right) = \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3)^2 \Rightarrow$$
$$\lambda_1\sin\theta_1 + \lambda_2\sin\theta_2 + \lambda_3\sin\theta_3 \leqslant$$
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2}\right)\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{x_2x_3} + \frac{\lambda_2^2}{x_3x_1} + \frac{\lambda_3^2}{x_1x_2}}$$

这便是我们过去建立的结果.

其中要注意的是,此结论中的 $n = 3,5,7,\cdots,2m+1$ 为奇数.与前面几个结论相比较,这个结论是最好的.

13 正切和不等式

(1) 送君千里,终有一别;巨篇长文,总有终结.在本文的末尾,我们简单谈谈 $\triangle ABC$ 的正切和不等式.

我们知道,对于任意 $\triangle ABC$ 有恒等式

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1 \quad ①$$

$$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1 \quad ②$$

这是两个非常基础又很重要的三角恒等式,在式 ② 中,如果作置换

$$(A,B,C)\to\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) \quad ③$$

立即化为式 ①.

如果 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,并在式 ① 中作置换

$$(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C) \quad ④$$

立即得到式 ②.

如果记置换 ③ 为 $T\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$,置换式 ④ 为 $T(\pi-2A)$,那么 ①,② 两式的相互转化关系为

$$\text{式 ①}\underset{T\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)}{\overset{T(\pi-2A)}{\rightleftharpoons}}\text{式 ②}$$

而且式 ① 又可变形为

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \quad ⑤$$

式 ② 相应地也变形为

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C \quad ⑥$$

在式 ① 中,应用 3 元对称不等式有

$$1=\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3} \quad ⑦$$

若在式 ① 中应用平均值不等式有

$$1=\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\geqslant3\left(\prod\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^{1/3}=3\left(\prod\tan\frac{A}{2}\right)^{2/3}\Rightarrow$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \quad ⑧$$

将 ⑦,⑧ 两式结合得到

$$\frac{\sum\tan\frac{A}{2}}{3}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\geqslant\left(\prod\tan\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad ⑨$$

可见,普通的数字$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 介入其间,左右逢源,将式 ⑦,⑧ 两式配搭成一个双向不等式,恰似一只飘飞的蝴蝶.

进一步地,在式 ⑤ 中应用平均值不等式有

$$\sum \cot \frac{A}{2} = \prod \cot \frac{A}{2} \leqslant \left(\frac{\sum \cot \frac{A}{2}}{3}\right)^3 \Rightarrow \sum \cot \frac{A}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \quad ⑩$$

且

$$\prod \cot \frac{A}{2} = \sum \cot \frac{A}{2} \geqslant 3\left(\prod \cot \frac{A}{2}\right)^{1/3} \Rightarrow \prod \cot \frac{A}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \quad ⑪$$

由式 ⑩,⑪ 结合得

$$\frac{\sum \cot \frac{A}{2}}{3} \geqslant \sqrt{\frac{\sum \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}}{3}} \geqslant \left(\prod \cot \frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \sqrt{3} \quad ⑫$$

如果 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,在式 ⑨ 中作置换$(A,B,C) \to (\pi - 2A, \pi - 2B, \pi - 2C)$得

$$\frac{\sum \cot A}{3} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \geqslant \left(\prod \cot A\right)^{\frac{1}{3}} \quad ⑬$$

式 ⑫ 也随之化为

$$\frac{\sum \tan A}{3} \geqslant \sqrt{\frac{\sum \tan B \tan C}{3}} \geqslant \left(\prod \tan A\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \sqrt{3} \quad ⑭$$

综

述

(2) 对于 $\triangle ABC$,如果我们已知

$$\tan A : \tan B : \tan C = \lambda : u : v \quad ⑮$$

其中 $\lambda, u, v > 0$ 为常数,那么我们可设 $t > 0$,且

$$\left.\begin{array}{l}(\tan A, \tan B, \tan C) = (\lambda t, ut, vt) \\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\lambda + u + v)t = \lambda u v t^3 = t = \sqrt{\frac{\lambda + u + v}{\lambda u v}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\tan A = \lambda\left(\sqrt{\dfrac{\lambda + u + v}{\lambda u v}}\right) \\ \tan B = u\left(\sqrt{\dfrac{\lambda + u + v}{\lambda u v}}\right) \\ \tan C = v\left(\sqrt{\dfrac{\lambda + u + v}{\lambda u v}}\right)\end{cases} \quad ⑯$$

另外,如果我们设 $a > b > c > d > 0$,且 $ac > bd$ 及

$$\tan A = \frac{a + b}{a - b}, \quad \tan B = \frac{c + d}{c - d} \quad ⑰$$

那么有

$$\sum \tan A = \prod \tan A \Rightarrow \frac{a + b}{a - b} + \frac{c + d}{c - d} + \tan C =$$

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)\left(\frac{c + d}{c - d}\right)\tan C \Rightarrow \tan C = \frac{ac - bd}{ad + bc} \quad ⑱$$

以上式 ⑯ ~ ⑱ 是很有趣的结果,应用它们可将三角不等式转化为代数不等式.

(3) 现在,我们建立几个漂亮的结论.

结论 9 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{1}{2})$，且 $\alpha+\beta+\gamma=1$，则有

$$(\tan A)^{\alpha}(\tan B)^{\beta}(\tan C)^{\gamma}\geqslant m \tag{T_1}$$

其中

$$m=[(1-2\alpha)^{2\alpha-1}(1-2\beta)^{2\beta-1}(1-2\gamma)^{2\gamma-1}]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

特别地，当取 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$ 时，式(T_1)化为 $\tan A\tan B\tan C\geqslant\sqrt{3}$.

证明 设 $p,q,r\in(0,1)$ 且 $p+q+r=1$，应用加权不等式和三角恒等式

$$\begin{aligned}\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C=\\ p\left(\frac{\tan A}{p}\right)+q\left(\frac{\tan B}{q}\right)+\gamma\left(\frac{\tan C}{\gamma}\right)\geqslant\\ \left(\frac{\tan A}{p}\right)^{p}\cdot\left(\frac{\tan B}{q}\right)^{q}\cdot\left(\frac{\tan C}{\gamma}\right)^{\gamma}\Rightarrow\\ (\tan A)^{1-p}\cdot(\tan B)^{1-q}\cdot(\tan C)^{1-\gamma}\geqslant(p^{p}q^{q}\gamma^{\gamma})^{-1}\end{aligned} \tag{20}$$

令

$$\begin{cases}1-p=2\alpha\\1-q=2\beta\\1-\gamma=2\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{1}{2})\\ \alpha+\beta+\gamma=1\end{cases}\Rightarrow(\tan A)^{\alpha}(\tan B)^{\beta}(\tan C)^{\gamma}\geqslant m$$

等号成立仅当

$$\frac{\tan A}{p}=\frac{\tan B}{q}=\frac{\tan C}{\gamma}\Rightarrow\frac{\tan A}{1-2\alpha}=\frac{\tan B}{1-2\beta}=\frac{\tan C}{1-2\gamma} \tag{21}$$

应用式(T_1)不难得到推论

$$\alpha\tan A+\beta\tan B+\gamma\tan C\geqslant m \tag{22}$$

$$(\tan A+\cot A)^{\alpha}(\tan B+\cot B)^{\beta}(\tan C+\cot C)^{\gamma}\geqslant m+\frac{1}{m} \tag{23}$$

$$(\lambda\tan A+u\cot B)(\lambda\tan B+u\cot C)(\lambda\tan C+u\cot A)\geqslant\left(\frac{3\lambda+u}{\sqrt{3}}\right)^{3} \tag{24}$$

其中 $3\lambda>u>0$.

结论 10 设 $\lambda,u,v>0$，则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$(u+v)\tan\frac{A}{2}+(v+\lambda)\tan\frac{B}{2}+(\lambda+u)\tan\frac{C}{2}\geqslant2\sqrt{uv+v\lambda+\lambda u} \tag{T_2}$$

只要应用恒等式

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

及我们常用的引理立即可导出式(T_2)，等号成立仅当

$$\lambda\cot\frac{A}{2}=u\cot\frac{B}{2}=v\cot\frac{C}{2} \tag{25}$$

应用式(T_2)可得到漂亮的推论：设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 为任意三角形，则

$$\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\tan\frac{A'}{2}\geqslant2 \tag{26}$$

等号成立仅当

$$\frac{\tan\frac{A'}{2}}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{\tan\frac{B'}{2}}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{\tan\frac{C'}{2}}{\tan\frac{C}{2}}\Rightarrow$$

$$(A,B,C)=(A',B',C')\Rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

我们在前文证明了结论

$$\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\geqslant\frac{5}{2} \tag{27}$$

若记

$$f\left(\cos\frac{A}{2}\right)=\sum\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

那么

$$f\left(\cos\frac{A}{2}\right)=\frac{\sum\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}{\prod\cos\frac{A}{2}}\leqslant\frac{\left(\sum\cos^2\frac{A}{2}\right)^2}{3\prod\cos\frac{A}{2}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4\prod\sec\frac{A}{2}$$

因此$f\left(\cos\frac{A}{2}\right)$只有最小值$\frac{5}{2}$,而无最大值.但是,却有双向不等式

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4\prod\sec\frac{A}{2}\geqslant f\left(\cos\frac{A}{2}\right)\geqslant\frac{5}{2} \tag{28}$$

等号成立仅当$\triangle ABC$为正三角形.

有许多代数不等式都有配对式,而三角不等式更是如此.

结论 11 设$\lambda,u,v>0$,且满足条件

$$S=2(uv+v\lambda+\lambda u)-\lambda^2-u^2-v^2>0$$

则对任意$\triangle ABC$有

$$\lambda\left(\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right)+u\left(\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\right)+v\left(\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{3\delta}) \tag{T_3}$$

$$\lambda\left(\frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}\right)+u\left(\frac{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}\right)+v\left(\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{C}{2}}\right)\geqslant\sqrt{\delta} \tag{T_4}$$

$$\lambda\left(\sqrt{\frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}}}\right)+u\left(\sqrt{\frac{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}}\right)+v\left(\sqrt{\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{C}{2}}}\right)\geqslant\sqrt{\sqrt{3}\delta} \tag{T_5}$$

提示 设$x,y,z>0$,应用杨克昌不等式

$$\lambda x + uy + vz \geqslant \sqrt{\delta(yz + zx + xy)} \quad ㉙$$

有式(T_3)左边大于等于

$$\sqrt{\delta \sum \left(\sin \frac{A}{2}\right)^2} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3\delta}$$

再注意到

$$\sum \left(\tan \frac{A}{2}\right)^2 \geqslant \begin{cases} 3\sum \left(\tan \frac{B}{2}\tan \frac{C}{2}\right)^2 \\ \frac{1}{3}\left(\sum \tan \frac{A}{2}\right)^2 \end{cases} \geqslant \sum \tan \frac{B}{2}\tan \frac{C}{2} = 1 \quad ㉚$$

$$式(T_4)左边 \geqslant \sqrt{\delta \sum \left(\tan \frac{A}{2}\right)^2} \geqslant \sqrt{\delta}$$

$$式(T_5)左边 \geqslant \sqrt{\delta \sum \tan \frac{A}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{3}\delta}$$

(T_3),(T_4),(T_5)三式等号成立仅当 $\lambda = u = v$ 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(4) 关于正切和不等式的结论,是很多的.

结论 12 对于锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\sum \tan A \geqslant 3\sum \cot A \geqslant \sum \cot \frac{A}{2} \geqslant 3\sum \tan \frac{A}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \quad (T_6)$$

$$\sum \tan A \tan B \geqslant \sum \cot \frac{A}{2}\cot \frac{B}{2} \quad (T_7)$$

$$\frac{r}{4\Delta^2} \geqslant \sum \tan \frac{A}{2} \geqslant \sqrt{4 - \frac{2r}{R}} \quad (T_8)$$

$$\left(\sum \tan^2 \frac{A}{2}\right)\left(\sum \cos B\cos C\right) \leqslant \frac{3}{4} \quad (T_9)$$

$$\frac{3}{4}\prod \sec\left(\frac{B-C}{2}\right) \geqslant \sum \sin^2 \frac{A}{2} \geqslant \frac{3}{4} \quad (T_{10})$$

$$\sum \sqrt{\tan A} \geqslant \frac{3\sqrt{\Delta}}{S}\sum \sec A \quad (T_{11})$$

$$[(\tan B\tan C)^{\frac{k}{2}} - 1][(\tan C\tan A)^{\frac{k}{2}} - 1] \cdot$$
$$[(\tan A\tan B)^{\frac{k}{2}} - 1] \geqslant [(\sqrt{3})^k - 1]^3, k \in \mathbf{N} \quad (T_{12})$$

$$\sum \tan^2 \frac{A}{2} + 3\left(\prod \tan \frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant 2 \quad (T_{13})$$

(5) 我们在前面的结论 10 中,建立了不等式

$$(u+v)\tan \frac{A}{2} + (v+\lambda)\tan \frac{B}{2} + (\lambda+u)\tan \frac{C}{2} \geqslant 2\sqrt{uv + v\lambda + \lambda u} \quad (T_2)$$

它是不等式

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3} \quad ㉛$$

的加权推广.

相应地,不等式

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 1 \tag{32}$$

的加权推广却不止一个.

结论 13 设 $\lambda,u,v>0$,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$(u+v)\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2+(v+\lambda)\left(\tan\frac{B}{2}\right)^2+(\lambda+u)\left(\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 2\left(\sqrt{\frac{uv+v\lambda+\lambda u}{3}}\right) \tag{T_{14}}$$

$$\lambda\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2+u\left(\tan\frac{B}{2}\right)^2+v\left(\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant\frac{3\lambda uv}{uv+v\lambda+\lambda u} \tag{T_{15}}$$

略证 $\sum(u+v)\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant 2\sqrt{\left(\sum(uv)\right)\sum\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}\geqslant$

$$2\sqrt{\frac{1}{3}\left(\sum uv\right)}\left(\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{3}\sum uv}$$

$$\left[\sum\lambda\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\right]\sum uv\geqslant\left(\sum\sqrt{\lambda uv}\tan\frac{A}{2}\right)^2=\lambda uv\left(\sum\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant 3\lambda uv\Rightarrow$$

$$\sum\lambda\left(\tan\frac{A}{2}\right)\geqslant 3\lambda uv/\left(\sum uv\right)$$

式(T_{14})和(T_{15})等号成立仅当 $\lambda=u=v$ 及 $\triangle ABC$ 为正三角形.

特别地,1983 年,Garfunkel 曾提出问题:能将两个熟知的反向不等式

$$\begin{cases}\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 1\\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1\end{cases}$$

统一成一个更强的不等式

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}+8\prod\sin\frac{A}{2}\geqslant 2 \tag{T_{16}}$$

吗?式(T_{16})就是著名的 Garfunkel 不等式,它有多种证法,两个等价形式,一系列的推广.比如,应用三角母不等式就可简洁漂亮地证明.

证明 在三角母不等式

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$$

中令

$$(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$$

并注意到

$$\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

及

$$\sum\sin A=4\prod\cos\frac{A}{2}$$

则有

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2\geqslant 2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cos A=$$

$$2\sum\tan\frac{B}{2}\sum\tan\frac{C}{2}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)=$$

$$2\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-4\sum\sin^2\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=$$

$$2-4\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$2-4\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)\frac{\sum\sin A}{2\prod\cos\frac{A}{2}}=$$

$$2-8\prod\sin\frac{A}{2}\Rightarrow\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8\prod\sin\frac{A}{2}$$

等号成立仅当

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{\tan\frac{B}{2}}{\sin B}=\frac{\tan\frac{C}{2}}{\sin C}\Rightarrow\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2=\left(\cos\frac{B}{2}\right)^2=\left(\cos\frac{C}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$$

美丽的 Garfunkel 不等式至少有四个指数推广，如：

当 $k=1$ 或 $k\geqslant\frac{3}{2}$ 时

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}\left(2-8\prod\sin\frac{A}{2}\right)\tag{T_{17}}$$

当 $k\geqslant 1$ 时

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}\left(1+k-8k\prod\sin\frac{A}{2}\right)\tag{T_{18}}$$

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 2\times 3^{1-k}-3\left(\frac{8}{3}\prod\sin\frac{A}{2}\right)^k\tag{T_{19}}$$

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}+8^{1-k}-8\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^k\tag{T_{20}}$$

显然，当 $k=1$ 时，以上四式均化为 Garfunkel 不等式(T_{16})，且它们个个“如花似玉，貌若天仙”，特别地，式(T_{20}) 最娟秀可爱.

证明　我们简记 $t=\prod\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{8}$，$s=3+8\left(\frac{3}{8}\right)^k$，式($T_{16}$) 化为

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\geqslant 2-8t$$

$$P(k)=\sum\left(\tan^2\frac{A}{2}\right)^k+8t^k=\sum\left(\tan^2\frac{A}{2}\right)^k+8t^k=$$

$$\sum\left(\tan^2\frac{A}{2}\right)^k+8\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{8}{3}t\right)^k\Rightarrow$$

$$\frac{P(k)}{s}=\frac{1}{s}\left[\sum\left(\tan^2\frac{A}{2}\right)^k+8\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{8}{3}t\right)^k\right]$$

(应用加权幂平均不等式) $\geqslant$

$$\left\{\frac{1}{s}\left[\sum\tan^2\frac{A}{2}+8\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{8}{3}t\right)\right]\right\}^k\text{(应用式}(T_{16}))\geqslant$$

$$\left\{\frac{1}{s}\left[(2-8t)+8\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\left(\frac{8}{3}t\right)\right]\right\}^{k}=$$

$$\left\{\frac{2-8\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}\right]t}{s}\right\}^{k}\geqslant$$

$$\left\{\frac{2-\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}\right]}{s}\right\}^{k}=\left[\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}}{s}\right]^{k}\Rightarrow$$

$$P(k)\geqslant\frac{\left[1+\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}\right]^{k}}{s^{k-1}}=$$

$$\frac{\left[1+\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}\right]^{k}}{\left[3+8\left(\frac{3}{8}\right)^{k}\right]^{k-1}}=\frac{(3^{1-k}+8^{1-k})^{k}}{(3^{1-k}+8^{1-k})^{k-1}}\Rightarrow$$

$$P(k)\geqslant 3^{1-k}+8^{1-k}\Rightarrow$$

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}+8^{1-k}-8\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^{k}$$

综述

等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(6) 我们在前面的结论 10 中,建立了不等式

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$$

的加权推广

$$(u+v)\tan\frac{A}{2}+(v+\lambda)\tan\frac{B}{2}+(\lambda+u)\tan\frac{C}{2}\geqslant 2\sqrt{uv+v\lambda+\lambda u}\qquad (\mathrm{T}_2)$$

现在,我们再从角参数 θ 方面再度推广式(T_2):

结论 14 设 λ,u,v 为正数,$\triangle ABC$ 为任意三角形,角参数 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{6}$ 使 $\theta+\frac{A}{2}$,$\theta+\frac{B}{2}$,$\theta+\frac{C}{2}$ 均为锐角,并满足条件

$$S(\theta)=\sum\tan\left(\theta+\frac{B}{2}\right)\tan\left(\theta+\frac{C}{2}\right)<9 \qquad ㉝$$

则

$$T_{\lambda}(\theta)=(u+v)\tan\left(\theta+\frac{A}{2}\right)+(v+\lambda)\tan\left(\theta+\frac{B}{2}\right)+(\lambda+u)\tan\left(\theta+\frac{C}{2}\right)\geqslant 2\sqrt{(uv+v\lambda+\lambda u)(1+Q(\theta))}\qquad (\mathrm{T}_{21})$$

其中

$$Q(\theta)=\frac{8\tan 3\theta}{\tan 3\theta+3\cot\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\geqslant 0 \qquad ㉞$$

显然,当 $\theta=0$ 时,$Q(\theta)=0$,$S(\theta)=\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1<9$,式($\mathrm{T}_{21}$)化为式($\mathrm{T}_2$),等号成立仅当

$$\lambda\cot\frac{A}{2}=u\cot\frac{B}{2}=v\cot\frac{C}{2} \tag{35}$$

证明　由已知条件有 $\tan 3\theta\geqslant 0$，且设

$$\begin{cases}(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\theta+\frac{A}{2},\theta+\frac{B}{2},\theta+\frac{C}{2}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\(x,y,z)=(\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma)\\t=\tan 3\theta\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+3\theta\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta=\left(\frac{\pi}{2}+3\theta\right)-\gamma=\frac{\pi}{2}-(\gamma-3\theta)\Rightarrow\frac{x+y}{1-xy}=\frac{1+tz}{z-t}\Rightarrow$$

$$S(\theta)=yz+zx+xy=t(x+y+z-xyz)+1 \tag{36}$$

且

$$\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x+y+z\geqslant 3\tan\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=3\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \tag{37}$$

利用式㊱及不等式

$$\left(\sum x\right)S(\theta)=\left(\sum x\right)\left(\sum yz\right)\geqslant 9xyz\Rightarrow S(\theta)\geqslant t\left[\sum x-\frac{1}{9}\left(\sum x\right)S(\theta)\right]+1=$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{9}t\left(\sum x\right)[9-S(\theta)]+1\\9>S(\theta)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$S(\theta)\geqslant\frac{t}{3}\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)[9-S(\theta)]+1\Rightarrow$$

$$\left[3+t\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]S(\theta)\geqslant 9t\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+3\Rightarrow$$

$$s(\theta)\geqslant\frac{3+9\tan 3\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{3+\tan 3\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$1+\frac{8\tan 3\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{3+\tan 3\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$1+\frac{8\tan 3\theta}{3\cot\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\tan 3\theta}=1+Q(\theta)\Rightarrow$$

$$s(\theta)\geqslant 1+Q(\theta)\Rightarrow \tag{38}$$

$$T_\lambda(\theta)=\sum(u+v)\tan\alpha=\sum(u+v)x\geqslant$$

$$2\sqrt{\left(\sum uv\right)\left(\sum yz\right)}=2\sqrt{\left(\sum uv\right)s(\theta)}\Rightarrow$$

$$T_\lambda(\theta)\geqslant 2\sqrt{\left(\sum uv\right)(1+Q(\theta))}$$

即式(T_{21})成立.

当 $\theta=0$ 时，式(T_{21})等号成立仅当

$$\lambda\cot\frac{A}{2}=u\cot\frac{B}{2}=v\cot\frac{C}{2}$$

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 时,式(T_{21}) 等号成立仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\lambda = u = v$.

当我们细细品味(T_{20}) 与(T_{21}) 时,我们只感到回味无穷,妙不可言.

(7) 现在,我们知道,对于 $\triangle ABC$ 半角正切和不等式

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3} \tag{39}$$

不仅有加权推广

$$\sum(u + v)\tan\frac{A}{2} \geqslant 2\sqrt{uv + v\lambda + \lambda u}$$

而且还有多边形推广

$$\sum_{i=1}^{n}\tan\frac{A_i}{n-2} \geqslant n\tan\frac{\pi}{n} \tag{40}$$

当取 $n = 4$ 时,对于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 有

$$\tan\frac{A_1}{2} + \tan\frac{A_2}{2} + \tan\frac{A_3}{2} + \tan\frac{A_4}{2} \geqslant 4 \tag{41}$$

那么式 ㊶ 也能"随波逐流""赶时髦",建立相应的加权推广吗?为此,我们首先想到过去建立的:

引理 2(笔者)　设 $\lambda_i > 0, x_i > 0(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}u_ix_i \geqslant 2\left[\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{42}$$

其中

$$u_i = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right) - \lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n$$

等号成立仅当

$$\frac{\lambda_1}{x_1} = \frac{\lambda_2}{x_2} = \cdots = \frac{\lambda_n}{x_n} \tag{43}$$

引理 3(华罗庚)　记从 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中每次取出 k 个数的积的算术平均为 $A_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n \in \mathbf{N})$,且 $P_k = (A_n^{(k)})^k$,则

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n \tag{44}$$

巧妙地应用这两个引理,我们就可建立引人入胜的:

结论 15　设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 均为正数,则对任意四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 有不等式

$$x_1\tan\frac{A_1}{2} + x_2\tan\frac{A_2}{2} + x_3\tan\frac{A_3}{2} + x_4\tan\frac{A_4}{2} \geqslant$$
$$3\cdot\sqrt[3]{16(\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3)}$$

其中

$$x_i = \left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\right) - \lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant 4 \tag{T_{22}}$$

等号成立仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$,且 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形.

从外观结构上看,式(T_{22}) 与式(T_2) 何其相似,那真是天合之作.

略证 在引理 3 中取 $n=4$ 有

$$\left[\frac{1}{6}(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1+a_4a_1+a_2a_4+a_3a_1)\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$\left[\frac{1}{4}(a_2a_3a_4+a_3a_4a_1+a_4a_1a_2+a_1a_2a_3)\right]^{\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1+a_2a_4+a_3a_1\geqslant$$

$$6\left(\frac{a_2a_3a_4+a_3a_4a_1+a_4a_1a_2+a_1a_2a_3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{45}$$

记

$$\lambda=\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\lambda_1+\lambda_4\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{46}$$

$$t_i=\tan\frac{A_i}{2},i=1,2,3,4$$

则

$$A_1+A_2+A_3+A_4=2\pi\Rightarrow\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{2}=\pi-\left(\frac{A_3}{2}+\frac{A_4}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{2}\right)=-\tan\left(\frac{A_3}{2}+\frac{A_4}{2}\right)\Rightarrow\frac{t_1+t_2}{1-t_1t_2}=-\left(\frac{t_3+t_4}{1-t_3t_4}\right)\Rightarrow$$

$$T=t_2t_3t_4+t_3t_4t_1+t_4t_1t_2+t_1t_2t_3=t_1+t_2+t_3+t_4\Rightarrow$$

$$T=t_1+t_2+t_3+t_4\geqslant\sqrt[3]{16T}(\text{应用引理 3})\Rightarrow T\geqslant 4 \tag{47}$$

在引理 2 中取 $n=4$ 有

$$x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3+x_4t_4\geqslant 2\left[\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_i\lambda_j\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}t_it_j\right)\right]^{\frac{1}{2}}(\text{应用式⑮})\geqslant$$

$$2\left[6\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{\frac{2}{3}}6\left(\frac{T}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant 3\times4\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=3(16\lambda)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3+x_4t_4\geqslant 3\sqrt[3]{16\lambda} \tag{48}$$

此即为式(T_{22}),易知,等号成立仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ 且 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形.

式(T_{22})不便于应用,可设

$$s=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i$$

$$x_i=s-\lambda_i=3K_i(1\leqslant i\leqslant 4)\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}x_i=3s=3\sum_{i=1}^{n}K_i\Rightarrow$$

$$s=\sum_{i=1}^{4}K_i\Rightarrow\lambda_i=s-3K_i\Rightarrow\lambda_i=\sum_{i=1}^{4}K_i-3K_i(1\leqslant i\leqslant 4)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{4}K_i\tan\frac{A_i}{2}\geqslant[16(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\lambda_1+\lambda_4\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)]^{\frac{1}{3}} \tag{T_{22})'}$$

同理可得式(T_{22})' 的配对式为

$$\sum_{i=1}^{4}K_i\cot\frac{A_i}{2}\geqslant[16(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\lambda_1+\lambda_4\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)]^{\frac{1}{3}} \tag{T_{23}}$$

如果进一步探索,还有新结论:

结论 16 设 $K_i>0(1\leqslant i\leqslant 4)$,则对任意四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 有

$$\sum_{i=1}^{4}K_i\cot\frac{A_3}{2}\geqslant 4\left[\prod_{i=1}^{4}\left(s-\sqrt{K_i}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{T$_{24}$}$$

其中 $s=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sqrt{K_i}$.

(8) 春种秋收,只要我们辛勤耕耘,就会建立许多更美好更新奇的结论来.

如:当我们回首反顾结论 13 中的式(T_{14}) 和式(T_{15}) 时,我们发现:第一,虽然它俩外观结构简洁美观,但比较单一;第二,等号成立的条件是"$x=y=z$ 及 $\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$",显得"夫妻分离",为此,我们应用赫尔特不等式将结论 13 改进成:

结论 17 设 $k>1,x,y,z,\lambda,u,v$ 均为正数,则对任意 $\triangle ABC$ 有

$$x\left(\tan\frac{A}{2}\right)^k+y\left(\tan\frac{B}{2}\right)^k+z\left(\tan\frac{C}{2}\right)^k\geqslant$$

$$\frac{(2\sqrt{uv+v\lambda+\lambda u})^k}{\left[\sqrt[k-1]{\frac{(u+v)^k}{x}}+\sqrt[k-1]{\frac{(v+\lambda)^k}{y}}+\sqrt[k-1]{\frac{(\lambda+u)^k}{z}}\right]^{k-1}} \tag{T$_{25}$}$$

综述

特别地,当 $k=2$ 时,上式化为

$$x\left(\tan\frac{A}{2}\right)^2+y\left(\tan\frac{B}{2}\right)^2+x\left(\tan\frac{C}{2}\right)^2\geqslant\frac{4(uv+v\lambda+\lambda u)}{\frac{(u+v)^2}{x}+\frac{(v+\lambda)^2}{y}+\frac{(\lambda+u)^2}{z}} \tag{T$_{26}$}$$

以上两式虽然外形庞大,但却"亭亭玉立,楚楚动人",美得令人神往,令人心醉.

略证 注意到

$$k>1\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{k}+\frac{k-1}{k}=1\\ \frac{1}{k},\frac{k-1}{k}\in(0,1)\end{cases}\left[\sum x\left(\tan\frac{A}{2}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}}\left[\sum\sqrt[k-1]{\frac{(u+v)^k}{x}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\geqslant$$

$$\sum\left\{\left[x\left(\tan\frac{A}{2}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}}\left[\sqrt[k-1]{\frac{(u+v)^k}{x}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}=$$

$$\sum\left[\left(x^{\frac{1}{k}}\tan\frac{A}{2}\right)\left(\frac{u+v}{x^{\frac{1}{k}}}\right)\right]=$$

$$\sum(u+v)\tan\frac{A}{2}\geqslant 2\sqrt{\sum uv}\Rightarrow\sum x\left(\tan\frac{A}{2}\right)^k\geqslant$$

$$\left(2\sqrt{\sum uv}\right)^k\Big/\left[\sum\sqrt[k-1]{\frac{(u+v)^k}{x}}\right]^{k-1}$$

此即为式(T_{25}),等号成立仅当

$$\lambda\cot\frac{A}{2}=u\cot\frac{B}{2}=v\cot\frac{C}{2}$$

且

$$\frac{x\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{k}}{\left[\frac{(u+v)^{k}}{x}\right]^{\frac{1}{k-1}}}=\frac{y\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{k}}{\left[\frac{(v+\lambda)^{k}}{y}\right]^{\frac{1}{k-1}}}=\frac{z\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{k}}{\left[\frac{(\lambda+u)^{k}}{z}\right]^{\frac{1}{k-1}}}\Rightarrow$$

$$\frac{x\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{k-1}}{u+v}=\frac{y\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{k-1}}{v+\lambda}=\frac{z\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{k-1}}{\lambda+u} \quad ㊿$$

放眼展望以上各式知,结论 17 弥补了结论 13 的两点不足,推广和美化了结论 13.

第49届IMO试题解答

武瑞新

1. H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，以 BC 的中点为圆心作一个过 H 的圆，与 BC 相交于点 A_1,A_2，类似地我们作出 B_1,B_2 和 C_1,C_2. 证明：A_1,A_2,B_1,B_2 和 C_1,C_2 这六个点共圆.

证法1　如图1，设 BC,CA,AB 的中点分别为 D,E,F，$\triangle ABC$ 的外心为 O，联结 EF，AH,EH,FH.

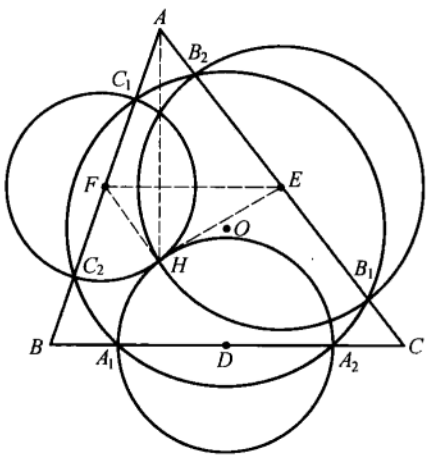


图1

由圆幂定理知

$$AC_1 \cdot AC_2 = AF^2 - FH^2$$

$$AB_1 \cdot AB_2 = AE^2 - EH^2$$

又 $EF \parallel BC, AH \perp BC$，故

$$AH \perp EF$$

$$AF^2 - FH^2 = AE^2 - EH^2$$

$$AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$$

于是 C_1,C_2,B_1,B_2 四点共圆.

易知所共圆的圆心为 O，故

$$OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2$$

同理可证 $OB_1 = OB_2 = OA_2 = OA_1$.

故 A_1,A_2,B_1,B_2 和 C_1,C_2 六点共圆.

证法 2 如图 1,联结 AH,EF,易知 $AH\perp EF$,故 AH 为圆 E 和圆 F 的根轴

$$AC_1\cdot AC_2=AB_1\cdot AB_2$$

于是 C_1,C_2,B_1,B_2 四点共圆.

易知所共圆的圆心为 O,故

$$OB_1=OB_2=OC_1=OC_2$$

同理可证 $$OB_1=OB_2=OA_2=OA_1$$

故 A_1,A_2,B_1,B_2 和 C_1,C_2 六点共圆.

证法 3 如图 2,联结 $DE,CH,OD,OE,DH,EH,OA_2,OB_1$.

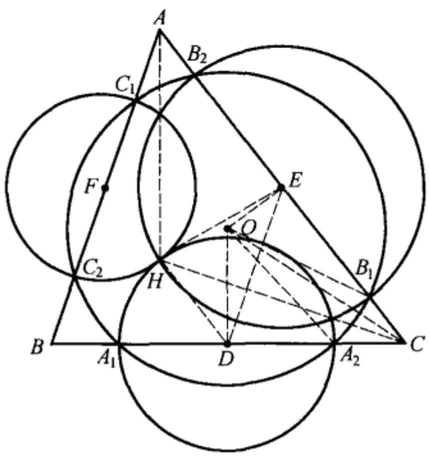


图 2

则 $DE\perp CH,OD\perp BC$,故

$$OC^2-OA_2^2=CD^2-DA_2^2=CD^2-DH^2$$

$$OC^2-OB_1^2=CE^2-EB_2^2=CE^2-EH^2$$

由 $DE\perp CH$ 知 $$CD^2-DH^2=CE^2-EH^2$$

知 $OA_2^2=OB_1^2$,同理 $OB_2^2=OC_1^2$,故

$$OB_1=OB_2=OA_2=OA_1=OC_1=OC_2$$

故 A_1,A_2,B_1,B_2 和 C_1,C_2 六点共圆.

证法 4 如图 3,设 AH 交 BC 于 L,联结 OA_1,OD,DH,BH,设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R.易知,$\angle BHL=\angle C,\angle BOD=\angle A$,则

$$BH=2R\cos B,HL=2R\cos B\cos C$$

$$OD=R\cos A,BD=R\sin A$$

故 $$OA_1^2=OD^2+DA_1^2=OD^2+DH^2=DL^2+HL^2+OD^2=$$

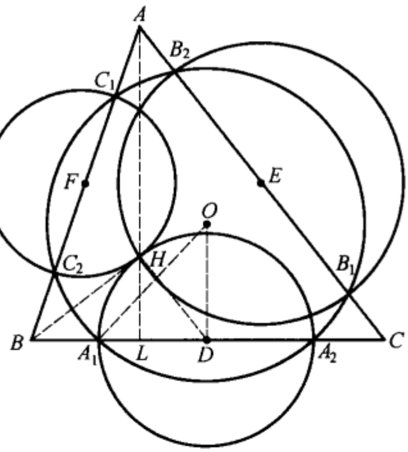


图 3

$$(R\cos A)^2+(2R\cos B\cos C)^2+(R\sin A-2R\cos B\sin C)^2=$$
$$R^2[\cos^2 A+4\cos^2 B\cos^2 C+(\sin A-2\cos B\sin C)^2]=$$
$$R^2(1+4\cos^2 B-4\cos B\sin A\sin C)=$$
$$R^2[1+4\cos B(\cos B-\sin A\sin C)](\cos B=\sin A\sin C-\cos A\cos C)=$$
$$R^2(1-4\cos A\cos B\cos C)$$

同理 $$OB_1^2=OB_2^2=OC_1^2=OC_2^2=R^2(1-4\cos A\cos B\cos C)$$

故 A_1,A_2,B_1,B_2 和 C_1C_2 六点共圆.

证法 5 如图 4,以 O 为原点建立直角坐标系,设重心为 G,外接圆半径为 R,则

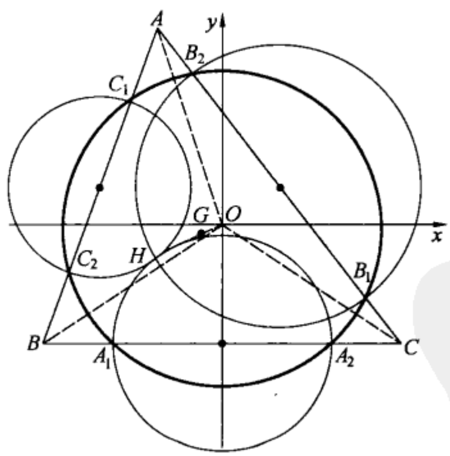


图 4

$$A(R\cos\alpha,R\sin\alpha),B(R\cos\beta,R\sin\beta),C(R\cos\gamma,R\sin\gamma)$$

则 $$G(\frac{R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}{3},\frac{R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{3})$$

则由欧拉定理,O,G,H 共线,且 $OH=3OG$,故

$$H(R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma),R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma))$$

又
$$D(\frac{R(\cos\beta+\cos\gamma)}{2},\frac{R(\sin\beta+\sin\gamma)}{2})$$

故
$$OA_1^2=OD^2+DA_1^2=OD^2+DH^2=$$
$$R^2[\frac{1}{4}(\cos\beta+\cos\gamma)^2+\frac{1}{4}(\sin\beta+\sin\gamma)^2+$$
$$(\cos\alpha+\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{2})^2+(\sin\alpha+\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{2})^2]=$$
$$R^2[2+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)]$$

同理

$$OB_1^2=OB_2^2=OC_1^2=OC_2^2=R^2[2+\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)]$$

故 A_1,A_2,B_1,B_2 和 C_1,C_2 六点共圆.

注 建议读者通过建立高线方程,求 H 的坐标——这是一个非常不错的三角练习题!当然本题还有其他的解析法.

2. 设 x,y,z 是三个不等于 1 的实数,且满足 $xyz=1$.

(1) 证明

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1$$

(2) 证明:存在无穷多组有理数 (x,y,z),上述不等式中的等号成立.

证法 1 (1) 作变换

$$x=\frac{a^2}{bc},y=\frac{b^2}{ca},z=\frac{c^2}{ab}$$

原不等式即
$$\sum\frac{a^4}{(a^2-bc)^2}\geqslant 1$$

即
$$\frac{\sum a^4(b^2-ca)^2(c^2-ab)^2}{\prod(a^2-bc)^2}\geqslant 1$$

即
$$\frac{\sum a^4(b^2-ca)^2(c^2-ab)^2-\prod(a^2-bc)^2}{\prod(a^2-bc)^2}\geqslant 0$$

$$\prod(a^2-bc)^2=[\prod(a^2-bc)]^2=$$
$$[\prod a(\sum a^3)-\sum a^3b^3]^2\sum a^4(b^2-ca)^2(c^2-ab)^2=$$
$$[\sum a^2(b^2-ca)(c^2-ab)]^2-2\prod(a^2-bc)(\sum a^2b^2(c^2-ab))=$$
$$[3\prod a^2-2\sum a^3b^3+\prod a(\sum a^3)]^2-$$
$$2(\prod a(\sum a^3)-\sum a^3b^3)(3\prod a^2-\sum a^3b^3)$$
$$\frac{\sum a^4(b^2-ca)^2(c^2-ab)^2-\prod(a^2-bc)^2}{\prod(a^2-bc)^2}=$$
$$\frac{(\sum a^3b^3-3\prod a^2)^2}{\prod(a^2-bc)^2}=$$

$$\frac{(\sum ab)^2[\sum a^2b^2-\prod a(\sum a)]^2}{\prod(a^2-bc)^2}\geqslant 0$$

(2) 等号成立的条件为

$$\sum ab=0 \qquad ①$$

或

$$\sum a^2b^2-\prod a(\sum a)=0 \qquad ②$$

若 ② 成立将导致 $a=b=c$,这时 $x=y=z=1$ 与题设矛盾!

故$\sum ab=0$,有

$$xy+yz+zx=\frac{\sum a^3b^3}{\prod a^2}=\frac{3\prod ab}{\prod a^2}=3$$

由

$$xyz=1$$
$$xy+yz+zx=3$$
$$xy=\frac{1}{z}$$
$$x+y=\frac{1}{z}(3-\frac{1}{z})$$

故 x,y 满足方程

$$t^2-\frac{1}{z}(3-\frac{1}{z})t+\frac{1}{z}=0$$
$$\Delta=\frac{(1-z)^2(1-4z)}{z^4}$$

设 k 为正整数(其实,只须 k 为任意不等于 -1 的有理数),令 $z=-k(k+1)$,则

$$1-4z=(2k+1)^2$$

此时我们可得一组解$(x,y,z)=\left(\frac{k}{(k+1)^2},-\frac{k+1}{k^2},-k(k+1)\right)$满足条件,故有无穷多组有理数使等号成立.

证法 2 原不等式即

$$\sum\frac{x^2}{(x-1)^2}\geqslant 1$$

即

$$\frac{\sum x^2(y-1)^2(z-1)^2-\prod(x-1)^2}{\prod(x-1)^2}\geqslant 0$$

而

$$\begin{aligned}\sum x^2(y-1)^2(z-1)^2=&[\sum x(y-1)(z-1)]^2-2\prod(x-1)(\sum xy(z-1))=\\&(3\prod x-2\sum xy+\sum x)^2-2(\sum x-\sum xy)\cdot\\&(3\prod x-\sum xy)\end{aligned}$$

$$\prod(x-1)^2=(\prod(x-1))^2=(\sum x-\sum xy)^2$$

注意到$\prod x=1$,于是

$$\frac{\sum x^2(y-1)^2(z-1)^2-\prod(x-1)^2}{\prod(x-1)^2}=\frac{(\sum xy-3)^2}{\prod(x-1)^2}\geqslant 0$$

以下同证法 1.

证法 3 设

$$a=\frac{x}{1-x},b=\frac{y}{1-y},c=\frac{z}{1-z}$$

则
$$a+1=\frac{1}{1-x},b+1=\frac{1}{1-y},c+1=\frac{1}{1-z}$$

所以
$$abc=\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}=(a+1)(b+1)(c+1)$$

故
$$ab+bc+ca+a+b+c+1=0$$

故
$$\sum\frac{x^2}{(x-1)^2}=\sum a^2=(\sum a)^2-2\sum ab=$$
$$\sum a^2+2\sum a+2=(\sum a+1)^2+1\geqslant 1$$

等号成立的条件是
$$\sum a=-1$$
$$\sum ab=0$$

故
$$a+b=-1-c$$
$$ab=c(c+1)$$

a,b 满足方程

$$s^2+(c+1)s+c(c+1)=0$$

$$\Delta=(c+1)^2-4c(c+1)=(c+1)(1-3c)=\frac{1-4z}{(1-z)^2}$$

设 k 为正整数

$$z=-k(k+1)$$

得
$$(a,b,c)=\left(\frac{k}{k^2+k+1},-\frac{k+1}{k^2+k+1},\frac{-k(k+1)}{k^2+k+1}\right)$$

进而
$$(x,y,z)=\left(\frac{k}{(k+1)^2},-\frac{k+1}{k^2},-k(k+1)\right)$$

所以有无穷多组有理数(x,y,z)使等号成立.

3.证明:存在无穷多个正整数 n,使得 n^2+1 存在一个素因子大于 $2n+\sqrt{2n}$.

证明 任取一个 $4k+1$ 型素数 $p\geqslant 29$,则存在 n 使 n^2+1 被 p 整除,且 $n<\frac{p}{2}$,$(n\in\{1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\})$,令

$$a=p-2n$$

则 $a^2+4=p^2-4np+(4n^2+4)$ 被 p 整除,故

$$a^2+4\geqslant p$$

故
$$a\geqslant\sqrt{p-4}\geqslant 5$$

故
$$a\geqslant\sqrt{p-4}=\sqrt{2n+a-4}>\sqrt{2n}$$

所以
$$p=2n+a>2n+\sqrt{2n}$$

因 $4k+1$ 型素数有无穷多个,故存在无穷多正整数 n 满足要求.

我们可以使上述过程得到的 n 互不相同.设已得到(p_1,n_1),我们再取一个 $4k+1$ 型素数 p_2 使 $n_2^2+1\geqslant p_2\geqslant n_1^2+2$,故 $n_2>n_1$,假设已经取定 $n_1<n_2<\cdots<n_k$,我们再取$p_{k+1}\geqslant n_k^2+2$,此时 $n_{k+1}^2+1\geqslant p_{k+1}\geqslant n_k^2+2$,故 $n_{k+1}>n_k$,这样我们就得到满足要求的无穷多个正整数 n,本题的本质是 $4k+1$ 型素数有无穷多个.

4.求所有的函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$,满足对所有的正实数 $w,x,y,z,wx=yz$ 都有

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

解　在已知条件中令 $w=x=y=z=1$ 得 $f(1)=1$,而对于 $x\in(0,+\infty)$,因

$$x\cdot 1=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$$

故
$$\frac{(f(x))^2+(f(1))^2}{f(x)+f(x)}=\frac{x^2+1}{2x}$$

即
$$\frac{(f(x))^2+1}{f(x)}=\frac{x^2+1}{x}$$

$$x(f(x))^2-(x^2+1)f(x)+x=0$$

$$(xf(x)-1)(f(x)-x)=0$$

故 $f(x)=x$ 或$f(x)=\dfrac{1}{x}$.

容易验证这两个函数满足要求.

5.设 n 和k 是正整数,$k\geqslant n$,且 $k-n$ 是一个偶数,$2n$ 盏灯依次编号为 $1,2,\cdots,2n$.每盏灯可以"开" 和"关",开始时,所有的灯都是"关" 的.对这些灯可进行操作,一次操作只改变其中一盏灯的开关状态(即"开" 变成"关" 或"关" 变成"开"),我们考虑长度为 k 的操作序列,序列中的第 i 项就是第i 次操作时被改变开关状态的那盏灯的编号.

设 N 是k 次操作后使得灯 $1,2,\cdots,n$ 是"开" 的,灯 $n+1,\cdots,2n$ 是"关" 的状态所有不同的操作序列的个数.

设 M 是k 次操作后使得灯 $1,2,\cdots,$是"开" 的,灯 $n+1,\cdots,2n$ 是"关" 的,但是灯 $n+1,\cdots,2n$ 始终没有被开过的所有不同的操作序列的个数.

求比值$\dfrac{N}{M}$.

解　设"M" 型操作序列的个数为 a_m,因对灯 $1,2,\cdots,n$ 的操作次数必须为奇数,则其母函数为

$$\prod_n\left(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots\right)=\frac{1}{2^n}(e(x)-e(-x))^n=$$

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i e((n-2i)x)=$$

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n-2i)^j}{j!}\cdot x^j$$

故
$$M=a_k=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-2i)^k$$

设"N"型操作序列的个数为 b_m,因对灯 $n+1,\cdots,2n$ 的操作次数必须为偶数,则其母函数为

$$\prod_n\left(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots\right)\prod_n\left(1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\cdots\right)=$$

$$\frac{1}{2^n}(e(x)-e(-x))^n\cdot\frac{1}{2^n}(e(x)+e(-x))^n=$$

$$\frac{1}{2^{2n}}(e(2x)-e(-2x))^n=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i e((2n-4i)x)=$$

$$\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i e(2(n-2i)x)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j(n-2i)^j}{j!}\cdot x^j$$

故
$$N=b_k=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^k (n-2i)^k$$

所以
$$\frac{N}{M}=\frac{\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^k(n-2i)^k}{\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-2i)^k}=2^{k-n}$$

不难验证若 $k-n$ 为奇数,则 $N=M=0$,这是明显的.

6. 在凸四边形 $ABCD$ 中,$BA\neq BC$,ω_1,ω_2 分别是$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 的内切圆.假设存在一个圆 ω 与射线 BA 相切(切点不在线段 BA 上),且与射线 BC 相切(切点不在线段 BC 上)并与直线 AD 和直线 CD 都相切,证明:圆 ω_1 和 ω_2 的两条外公切线的交点在圆 ω 上.

证法1 如图5,BA,CD 及AD,BC 两组对边延长后必相交.设交点为 S,T.由切线的性质有

$$BH=BE \quad ①$$
$$FS=HS \quad ②$$
$$DF=DG \quad ③$$
$$ET=TG \quad ④$$

四式相加得

$$BS+DS=BT+TD \quad (*)$$
$$AH=AG \quad ⑤$$
$$CF=CE \quad ⑥$$
$$FS=HS \quad ⑦$$
$$ET=TG \quad ⑧$$

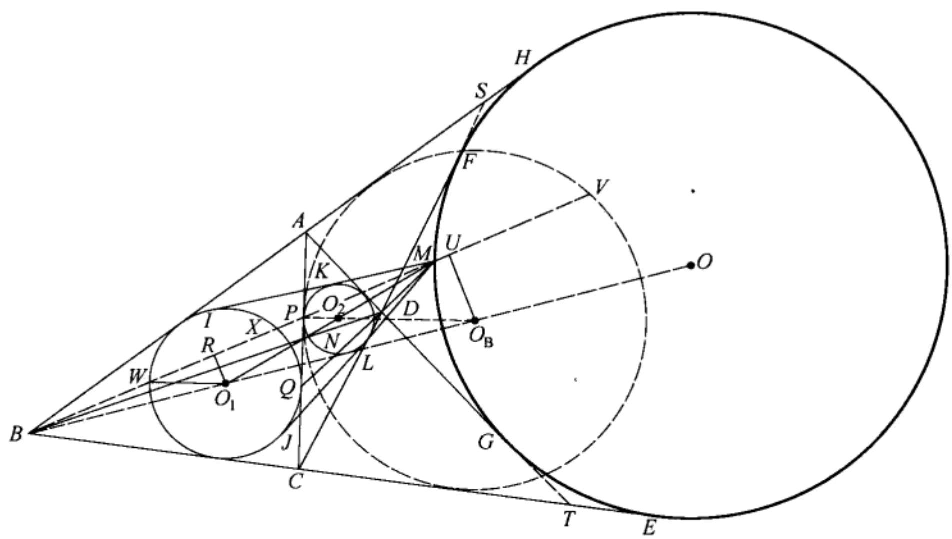


图 5

四式相加得

$$AS + SC = AT + TC \quad (**)$$

由(*)、(**)得 $\quad BA - DC = BC - AD$

设圆 ω_1 和 ω_2 分别与 AC 切于 P,Q,$\triangle ABC$ 关于点 B 的旁切圆为 ω_B,圆心为 O_B,半径为 r_B,$\triangle ADC$ 关于点 D 的旁切圆为 ω_D,圆心为 O_D,半径为 r_D,ω_1,ω_2,ω 的半径分别为 r_1,r_2,r.圆心为 O_1,O_2,O,ω_1 切 AC 于 Q,ω_2 切 AC 于 P,ω_B 切 AC 于 P^*,ω_D 切 AC 于 Q^*.ω_1,ω_2 的外公切线 IK,JL 及直线 O_1O_2 交于 M.

$$AP = \frac{1}{2}(AC + AD - CD) = CQ^*$$

$$CQ = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = AP^*$$

故 $\quad AP = AP^* = CQ^* = CQ$

P,P^* 重合,Q,Q^* 重合.

ω_B 与 ω_2 内切于 P,ω_D 与 ω_1 内切于 Q.

联结 BP 交 ω_1 于 W,X 交 ω_B 于 V,WX 的中点为 R,PV 的中点为 U.

$$\frac{O_1R}{O_BU} = \frac{O_1B}{O_BB} = \frac{r_1}{r_B} = \frac{O_1W}{O_BP}$$

故 $\quad \mathrm{Rt}\triangle WO_1R \backsim \mathrm{Rt}\triangle PO_BU$

$$\angle UPO_B = \angle RWO_1$$

$$WO_1 \parallel PO_B$$

联结 PM,WM,有

$$\frac{O_2M}{O_1M} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{PO_2}{WO_1}$$

$$PO_2 \parallel WO_1$$

$$\angle MO_2P = \angle MO_1W$$

$$\triangle MO_2P \backsim \triangle MO_1W$$

$$\angle O_2MP = \angle O_1MW$$

故 W,P,M 共线，即 B,P,M 共线.

同理，Q,D,M 共线.

由 $BA \neq BC$ 知 P,Q 不重合，从而 BP,DQ 不重合，故 M 即 BP,DQ 之交点，如图 6 所示.

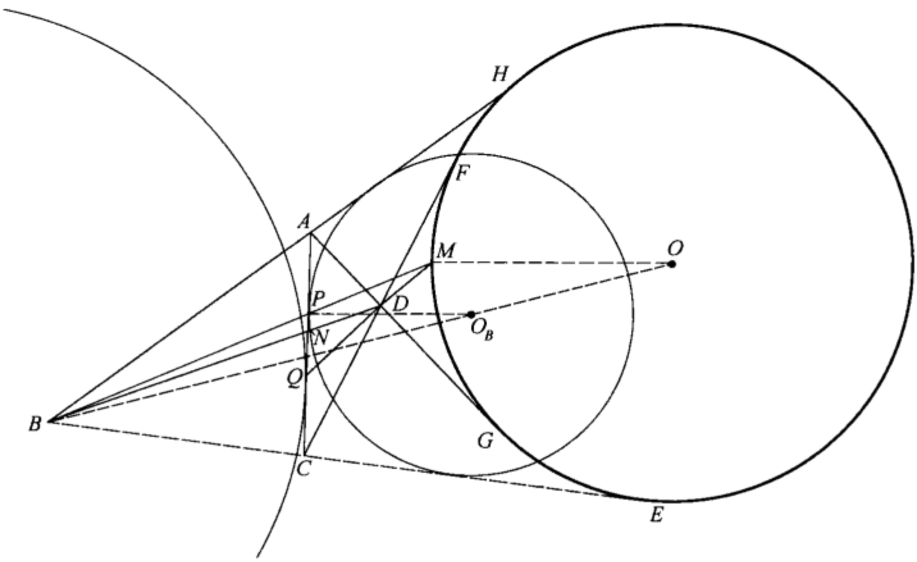


图 6

为清晰起见，我们去掉 ω_1,ω_2. 设 BP 交 ω 于 M_1，DP 交 ω 于 M_2，联结 M_1O，PO_B，M_2O，QO_D.

则易证 $M_1O \parallel PO_B$，$M_2O \parallel QO_D$，但显然 $PO_B \parallel QO_D$，故 $M_1O \parallel M_2O$，M_1，M_2 重合于 M.

命题证毕.

证法 2　我们采用证法 1 中的所有记号. 易证

$$AB - CD = BC - AD$$

设圆 ω_1 和 ω_2 分别与 AC 切于 P,Q，$\triangle ABC$ 关于点 B 的旁切圆为 ω_B，圆心为 O_B，半径为 r_B，$\triangle ADC$ 关于点 D 的旁切圆为 ω_D，圆心为 O_D，半径为 r_D，ω_1,ω_2,ω 的半径分别为 r_1,r_2,r. 圆心为 O_1,O_2,O，ω_1 切 AC 于 Q，ω_2 切 AC 于 P^*，ω_B 切 AC 于 P，ω_D 切 AC 于 Q^*. ω_1,ω_2 的外公切线 IK,JL 及直线 O_1O_2 交于 M.

$$AP = \frac{1}{2}(AC + AD - CD) = CQ^*$$

$$CQ=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)=AP^*$$

故
$$AP=AP^*=CQ^*=CQ$$

P,P^* 重合，Q,Q^* 重合.

ω_B 与 ω_2 内切于 P，ω_D 与 ω_1 内切于 Q.

$$H(B,\frac{r_1}{r_B}):\omega_1\to\omega_B$$

$$H(P,\frac{r_B}{r_2}):\omega_B\to\omega_2$$

$$H(M,\frac{r_1}{r_2}):\omega_1\to\omega_2$$

故
$$H(P,\frac{r_B}{r_2})H(B,\frac{r_1}{r_B})=H(M,\frac{r_1}{r_2})$$

由位似变换的性质知 B,P,M 共线.

同理 D,Q,M 共线.

由 $BA\neq BC$ 知 P,Q 不重合，从而 BP,DQ 不重合，故 M 即 BP,DQ 之交点.

设 BP 交 ω 于 M_1，DP 交 ω 于 M，联结 M_1O,PO_B,M_2O,QO_D.

$$H(B,\frac{r_B}{r}):\omega_B\to\omega,P\to M_1$$

$$H(D,-\frac{r}{r_D}):\omega\to\omega_D,M_2\to Q$$

$$H(D,-\frac{r}{r_D})H(B,\frac{r_B}{r})=H(N^*,-\frac{r_B}{r_D}):\omega_B\to\omega_D$$

且 D,B,N^* 共线.

因 PQ 是 ω_B,ω_D 内公切线，且 P,Q 为切点，由位似比为 $-\frac{r_B}{r_D}$ 的内位似变换及其内位似中心是唯一的(内位似中心是两条内公切线的交点)且 P,Q 为一对对应点.

故 $H(N,-\frac{r_B}{r_D}):P\to Q$，$N$ 为 AC 与 BD 的交点，故 $M_1=M_2=M$.

命题证毕.

2008年全国高中数学联合竞赛湖北省预赛试题及参考答案

一、填空题(本题满分90分,每小题9分,直接将答案写在横线上)

1. 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x-3\}$, $B=\{y\mid y=x+\frac{1}{x},x>0\}$,则 $A\cap B=$ ________.

2. 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}(n\geqslant 1)$,则 $a_{2\,008}=$ ________.

3. 函数 $y=\sin^4x+2\sin x\cos x+\cos^4x$ 的最小值为________。

4. 已知正三棱锥 $P—ABC$ 的底面正三角形的边长为1,其外接球的球心 O 满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,则这个正三棱锥的体积为________.

5. 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,已知 $\angle A=30°$, $BC=3$,则 $AH=$ ________.

6. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB\,/\!/\,CD$,且 $AB>CD$.设以 AB 为焦点且过点 D 的双曲线的离心率为 e_1,以 CD 为焦点且过点 A 的椭圆的离心率为 e_2,则 $e_1e_2=$ ________.

7. 设 $(x^2+2x-2)^6=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{12}(x+2)^{12}$,其中 a_i $(i=0,1,2,\cdots,12)$ 为实常数,则 $a_0+a_1+2a_2+\cdots+12a_{12}=$ ________.

8. 有6张分别写有1,2,3,4,5,6的卡片,每次从中抽取一张,然后放回,这样取了4次,则抽到的最大数与最小数的差等于5的概率为________.

9. 设$[x]$表示不超过 x 的最大整数,则$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 500]=$ ________.

10. 已知三个正数 a,b,c 满足$a\leqslant b+c\leqslant 3a$, $3b^2\leqslant a(a+c)\leqslant 5b^2$,则$\frac{b-2c}{a}$的最小值为________.

二、解答题(本题满分60分,每小题20分)

11. 设 P 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上的一个动点,过点 P 作椭圆的切线与圆 $O:x^2+y^2=12$ 相交于 M,N 两点,圆 O 在 MN 两点处的切线相交于点 Q.

(1) 求点 Q 的轨迹方程.

(2) 若 P 是第一象限的点,求 $\triangle OPQ$ 的面积的最大值.

12. 设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+1}^2+1}{a_n^2+1}(n\geqslant 1)$.

(1) 求 a_{n+1} 与 a_n 之间的递推关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$.

(2) 证明: $63<a_{2\,008}<78$.

13.如果正整数 n 可以写成 a^b(其中 $a,b\in\mathbf{N},a\geqslant 2,b\geqslant 2$) 的形式,则称 n 为"好数",在与 2 的正整数次幂相邻的正整数中,找出所有的好数.

参考答案

一、填空题

1. $A\cap B=[-4,-2]$

易知 $A=[-4,\infty),B=(-\infty,-2]$

2. $-\frac{1}{3}$

$a_1=\frac{1}{2},a_2=3,a_3=-2,a_4=-\frac{1}{3},a_5=\frac{1}{2},\cdots$

$\{a_n\}$ 是周期为 4 的数列,故 $a_{2\,008}=a_4=-\frac{1}{3}$

3. $-\frac{1}{2}$

$$y=\sin^4x+2\sin x\cos x+\cos^4x=-\frac{1}{2}(\sin 2x-1)^2+\frac{3}{2}$$

当 $\sin 2x=-1$ 时,$y_{\min}=-\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{12}$

设 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\alpha,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0},(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=\mathbf{0}$,即 $3OA^2+6OA^2\cos\alpha=0,\cos\alpha=\sqrt{3},\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$.

故 O 在底面 ABC 上(否则 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<360°$).

$OA=OB=OC=OP=\sqrt{3}$,锥高 $h=OP=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{12}$

5. $AH=3\sqrt{3}$

设外接圆半径为 R,则

$$2R=\frac{BC}{\sin A}=\frac{3}{\sin 30°}=6$$

故
$$AH=2R\cos A=6\cos 30°=3\sqrt{3}$$

6. $e_1e_2=1$

由双曲线及椭圆的定义可知

$$e_1e_2=\frac{AB}{BD-AD}\cdot\frac{CD}{AC+AD}=\frac{AB\cdot CD}{BD^2-AD^2}=\frac{AB\cdot CD}{BE^2-AE^2}=\frac{AB\cdot CD}{(BE+AE)(BE-AE)}=1$$

7.
$$a_0+a_1+2a_2+3a_3+\cdots+12a_{12}=2^6$$

令 $x=-2$ 得 $a_0=2^6$,对等式两边求导数得

$$6(x^2+2x-2)^5\cdot 2(x+1)=a_1+2a_2(x+2)+\cdots+12(x+2)^{11}$$

令 $x=-1$,得

得

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+12a_{12}=0$$

故

$$a_0+a_1+2a_2+3a_3+\cdots+12a_{12}=2^6$$

8. $\frac{1}{6}$

从 1,2,3,4,5,6 中取 4 个数的可重复组合数为

$$C_{6+4-1}^4=C_9^4=126$$

其中至少有一个 1 和一个 6 的可重复组合数为

$$C_{6+2-1}^2=C_7^2=21$$

故所求概率为

$$\frac{21}{126}=\frac{1}{6}$$

9.

$$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 500]=3\ 498$$

注意到,$2^k\leqslant x<2^{k+1}$ 时,$[x]=k$,可知

$$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 500]=$$

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+8\cdot 2^8-8\cdot 11=3\ 498$$

10. $-\frac{18}{5}$

由已知条件可得

$$1\leqslant\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\leqslant 3,\frac{3b^2}{a^2}\leqslant 1+\frac{c}{a}\leqslant\frac{5b^2}{a^2}$$

令$\frac{b}{a}=x,\frac{c}{a}=y,1\leqslant x+y\leqslant 3,3x^2\leqslant 1+y\leqslant 5x^2$.

目标函数 $z=x-2y$ 在$A\left(\frac{4}{5},\frac{11}{5}\right)$处取得最小值 $-\frac{18}{5}$

二、解答题

11.(1) 设 $P(x_0,y_0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),Q(x_Q,y_Q)$,则过 P 的切线方程为

$$3x_0x+4y_0y=12 \quad ①$$

切点弦 MN 的方程为

$$x_Qx+y_Qy=12 \quad ②$$

①,② 表示同一直线,故

$$x_Q=3x_0,y_Q=4y_0$$

所以

$$x_0=\frac{x_Q}{3},y_0=\frac{y_Q}{4}$$

代入椭圆方程得

$$\frac{\left(\frac{x_Q}{3}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{y_Q}{4}\right)^2}{3}=1$$

即

$$\frac{x_Q^2}{36}+\frac{y_Q^2}{48}=1$$

故点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{48}=1$$

(2) 设 $x=2\cos\theta$

$$y=\sqrt{3}\sin\theta, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

易得 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}x_0y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta$.

故当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $S_{\triangle OPQ}$ 有最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12.(1) 由

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+1}^2+1}{a_n^2+1}$$

得

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{a_n^2+1}{a_{n-1}^2+1}$$

所以

$$\frac{a_n^2+1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n-1}^2+1}{a_{n-1}}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}^2+1}{a_n}=$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}^2+1}{a_{n-1}}=\cdots=$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1^2+1}{a_2}$$

注意到

$$a_1=1, a_2=2$$

得

$$\frac{a_n^2+1}{a_{n+1}}=a_n$$

即

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$$

(2) 由 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$,可知 $a_n\geqslant 1$,对任意 $k\geqslant 2$

$$a_k^2=2+a_{k-1}^2+\frac{1}{a_{k-1}^2}$$

故

$$a_k^2-a_{k-1}^2>2$$

所以

$$a_n^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)+a_1^2(n\geqslant 2)>2(n-1)+1=2n-1$$

又

$$a_k^2-a_{k-1}^2=2+\frac{1}{a_{k-1}^2}\leqslant 3$$

所以

$$a_n^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)+a_1^2\leqslant 3(n-1)+1=3n-2$$

故对 $n\geqslant 1, n\in\mathbf{N}$

$$2n-1\leqslant a_n^2\leqslant 3n-2$$

且易知等号仅在 $n=1$ 时成立,故

故 $$63^2 < 4\,015 < a_{2\,008}^2 < 6\,002 < 78^2$$

所以 $63 < a_{2\,008} < 78$.

(1) 也可用数学归纳法证明.

$n = 2$ 时结论显然成立.

设 $n \leqslant k(k \geqslant 2)$ 时结论成立. 则 $n = k + 1$ 时

$$\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1}^2 + 1}$$

$$\frac{a_k^2 + 1}{a_{k+1}} = \frac{a_{k-1}^2 + 1}{a_{k-1}} = a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-1}} = a_k$$

所以 $$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_k} = a_k + \frac{1}{a_k}$$

故 $n = k + 1$ 时命题成立.

关键是通过计算前几项猜出规律.

13. 显然没有与 2 及 2^2 相邻的好数.

由 $|a^b - 2^n| = 1(n > 2, n \in \mathbf{N})$,我们易知 $a = 3, b = 2, n = 3$ 是满足条件的一组解,即 9 是一个与 2^n 相邻的"好数",我们证明只有这一个"好数"满足条件.

(1) 若 $a^b = 2^n + 1$,显然 a 为奇数,若 b 为奇数,由 $b \geqslant 3$

$$a^b - 1 = (a - 1)(a^{b-1} + \cdots + 1) = 2^n$$

而 $a^{b-1} + \cdots + 1$ 是一个大于 1 的奇数,这不可能.

若 b 为偶数,则

$$a^b = (2m + 1)^2 - 1(m \geqslant 1, m \in \mathbf{N}) = 4m(m + 1) = 2^n$$

因 m 或 $m + 1$ 为奇数,这只有 $m = 1$,从而 $n = 3, a = 3, b = 2$.

(2) 若 $a^b + 1 = 2^n$,显然仍有 a 为奇数且 $a \geqslant 3$,若 b 为奇数,由 $b \geqslant 3$

$$a^b + 1 = (a + 1)(a^{b-1} - a^{b-2} + \cdots + 1) = 2^n$$

但 $a^{b-1} - a^{b-2} + \cdots + 1$ 是一个大于 1 的奇数这不可能.

若 b 为偶数,则

$$a^b + 1 = (2k + 1)^2 + 1(k \geqslant 1, k \in \mathbf{N}) = 4k^2 + 4k + 2 = 2^n$$

但 $$2^n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)(n > 2), 4k^2 + 4k + 2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$$

故 $4k^2 + 4k + 2 = 2^n$ 不可能成立.

综上所述与 2^n 相邻的"好数" 只有 9.

编后语

有位知名作家对当前的社会有一个评价叫做：男人女性化，女人儿童化，儿童宠物化，宠物贵族化，贵族流氓化，流氓装文化．社会现象各有看法和见解，是每个人的自由和权力，不便妄加评论．但最后一句却颇令人感到意外，这说明文化是个好东西，是上得了台面的，不仅好人喜欢别人夸自己有文化，连流氓都唯恐别人说自己没文化，真可谓天下大势，浩浩荡荡，有文化者兴，没文化者亡．正是在这样的大背景下，《数学奥林匹克与数学文化》系列又出版了第三辑．

正如德国诗人里尔克所说："哪有什么胜利可言，挺住就是一切．"所以笔者下定决心除非遇到不可抗拒的因素就一定要将《数学奥林匹克与数学文化》系列坚持下去，那么难以坚持的关键在哪里？在本系列第一辑出版之初有读者在网上说偌大中国，区区 3 000 册一定会很快脱销，但实际上销量并不理想．这类书学生读觉得深奥，教师应该是主要读者群．但中国目前的状况是教师分为两类，有钱买书的和没钱买书的，有钱买书的很少读书，原因是要多挣钱，就要多上课，而时间是个常数，必定要挤占读书时间，而且读书与挣钱间又没有必然联系；而没钱买书又想读书的又分两类，其中一类是只买"有用"之书，类似高考辅导、应试秘籍之类，这类读者我们很难吸引，因为我们历来主张无用之用方为大用．

丹尼尔·贝尔在其名著《资本主义文化矛盾》(三联书店)中指出：资产阶级企业家在经济上积极进取，但是在道德与文化趣味方面却日益成为"保守派"。他所要求的"个人"为自律、自勉、有纪律、有上进心，其余一切按部就班，按照既有规范生活；而艺术家"个人"却日益向波希米亚人(流浪汉的别称)靠拢．展开了对于只知赚钱的"成功人士"的愤怒攻击，认为功利、实用理性和物质主义枯燥无味、烦闷无聊，压抑了个人的灵气和丰富生活的可能性．

波德莱尔的一句名言是:“我痛恨成为有用的人.”同样我们也极力避免使我们的书成为能立竿见影得到应用的书.我们的目标读者是那些爱数学爱数学书的人,他们视书籍如同空气与食物一般不可或缺.我们心目中的理想读者是像英国剑桥大学三一学院的大史学家麦考莱那样嗜书如命的人,他曾说:“书是我的一切,醒着的时候,我眼前不能没有书.”

让有钱买书的人读书,让想买书的人有钱是我们的奢望.芬兰这点值得我们学习.芬兰的义务教育在世界上是一枝独秀.从2000年起,芬兰总是在“国际学生评量计划”里头名列前茅,更令人吃惊、艳羡甚至恐惧的,是他们的学生还在不断进步,评分一年比一年高.秘诀就在于他们的老师喜欢读书学习,由于老师自己就是喜好学习并且擅长学习的人,所以他们才能教出世界上最优秀的学生.梁文道先生对此事的评论颇有新意.他说:“和注重基础教育的芬兰模式不同,‘中国模式’强调‘学习型官僚’.你现在去各大专院校的研究所点名,会发现登记册里没有几个中小学老师,倒是有不少在职官员,他们全都很踊跃地攻读着硕士、博士,颇有学政合一的古风.”(梁文道.常识.广西师范大学出版社,2009年,156页).

芬兰有一位颇有争议的大数学家奈望林纳(Nevanlinna, R. H, 1895—1980)学问一流,是复分析中的大师,早年杨乐、张广厚在熊庆来指导下做的值分布理论便是此公开创的。他在世界数学界享有很高声誉.他的子孙也引以为豪.他的孙子在学校读书时,对其数学老师报号说自己是奈望林纳之孙.其老师问奈望林纳是谁,其孙回答说,连奈望林纳都不知道,可见您的数学水平并不怎么样.这就是见识,是文化,也是传统。

本书的6位作者均系“草根”,没有响亮的名号,没有傲人的学历,没有金字的招牌.与前几期相比显得有些“山寨”.但我们一直坚信“学问在民间”.体制内的人受到的诱惑太多,搞数学身不由己,有逐利倾向,但民间人士一定是因喜爱才为之.

曾任耶鲁大学校长的小贝诺·施密德特不久前在耶鲁大学学报上公开撰文对中国某些大学近年来久盛不衰的“做大做强”之风评论说:“他们以为社会对出类拔萃的要求只是多:课程多、老师多、学生多、校舍多.他们的学者退休的意义就是告别糊口的讲台,极少数人对自己的专业还有兴趣,除非有利可图.”今年9月笔者在参加了北京国际图书博览会之后应作者之约去了天津,其间去了孙宏学老先生家拜访.所见所闻更坚定了我对学问在民间的看法,孙先生在“文革”期间靠卖苦力谋生每天收入仅一元多,但他却收集了许多很珍贵的数学名著,如高斯的《算术研究》(俄文版)、希尔伯特和柯朗的《数学物理方程》(英文版)、《黎曼全集》(俄文版)、《乌利松全集》(俄文版)、卡拉切奥多利《泛函分析》、布尔巴基学派的《数学原本》(俄文版)、谷山丰和志村五郎的《近代整数论》(日文版)等,真是不易,孙先生不仅藏书还读书,提起数学家及数学著作如数家珍.虽然长期游离于体制之外,但热情一点不亚于专业人士.多年来我们已习惯于正规军打阵地战,但也总有游击队在打地道战,比如“不变子空间问题”的解决.这是一道举世瞩目的难题,冯·诺伊曼(1930年)、博灵(1949年)、阿龙扎扬和史密斯(1954年)、罗蒙众索夫(1973年)分别做出了重要贡献,然而这一世界难题的最终解决却是一位花了9年时间才拿到博士学位(这一时间创下了圣塔芭芭拉加利福尼亚大学纪录)且穷困潦倒,已经到了走投无路境地的斯戈特·布朗.对此斯戈特对自己的评价是:“我是个牛仔,西部的牛仔.”在开发美

国蛮荒大西部的年代,最能代表拓荒者披荆斩棘、冒险前进精神的不就是人们心中的牛仔吗?我们现在数学杂志上充斥着许多四平八稳,似曾相识,严重缺乏原生态的“鸡肋”文章.我们呼唤“牛仔”,渴望“牛仔”精神.

社会要多元化,数学书刊也要多元化.郭尔凯姆在《社会分工论》(1893)中提出:“猩猩头盖骨的最大体积和最小体积相差 200 cm^3,近代成年人的最大头盖骨和最小头盖骨相差 600 ~ 700 cm^3;越是发达的民族比起落后民族,其内部成员服饰上的差距越大.”郭尔凯姆由此概括:“越是进化,物种内部从体质到文化的离散就越大.”前不久,在一本刊物上读到一篇文章,说就连人们认为最应该单一化的酒店也都多元化了,有了图书主题酒店,纽约图书馆酒店是爱书者的天堂.整个酒店藏书已超过 6 000 册.酒店本身也是按照“杜威十进分类法”的类目来取名的,3 楼为“社会科学”,4 楼为“语言”,5 楼为“数学及自然科学”,6 楼为“科技”,7 楼为“艺术”,8 楼为“文学”……每个楼层的 6 间房间,再以各小类命名,9 楼“历史”楼层的 001 号房是“二十世纪史”,004 号房是“亚洲史”等.每间房间都会提供与此房间相关的书籍.令人吃惊的是,入住这里的客人大部分是企业家,少部分是专家学者和作家,企业家觉得这里像“沙漠中的绿洲”,能给人一种休闲、思考的氛围.

按上海交大科学史系主任江晓原和北大科学哲学中心刘华杰教授所倡导的学问分阶学说,比如科学本身为一阶,则科学史为二阶,而科学编史学为三阶……但有些人借此产生偏见,以为学问中“阶”数越小则越尊贵,“阶”数越大则越可以鄙视,所以有相当一段时间清华的刘兵等专搞科学编年史的人被边缘化.现在在大学里搞竞赛数学的教师也面临此境地.为了使自己名正言顺,各师范院校纷纷设立了“数学奥林匹克研究所”,如华东师大熊斌教授组建的华东师大数学奥林匹克研究中心,湖南师范大学沈文选教授创立的湖南师大数学奥林匹克研究所,天津师大李建华教授发起的天津师大数学奥林匹克研究所,这几个机构虽然是“一两个人,七八条枪”,但“星星之火,可以燎原”.

法国科学研究中心数学家,高等科学研究所主任让·皮埃尔·布吉尼翁(J.P. Bourguignon)说:“文化的本质就是诞生于一小群人当中,然后在保留其创造性的同时,逐步发展壮大,而数学则以普遍性结构为研究对象,这也许是它最引人注目的性质之一.”

本系列从第一辑出版之日便定位于小众读物,其宗旨及历程借用中科院理论物理研究所研究员、中科院院士、两弹一星功臣彭桓武先生和陈省身的一首中英对照诗昭示:

I learn what I love to, I do what I wish to.

Fates have treated me well, Friends have helped me well.

我学我爱,我行我素。

幸运屡遇,友辈多助。

《法兰克福时报》主编的公子有一句名言:“贵族只有两件东西要自己买:一是鞋,因为鞋必须试一下才知道是不是合脚;二是书,必须自己翻看了才知道想不想读.”

翻翻本书,你一定会从中找到乐趣的.

刘培杰

2009.12.10

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00
新编平面解析几何解题方法全书	2010-01	28.00
数学眼光透视	2008-01	38.00
数学思想领悟	2008-01	38.00
数学应用展观	2008-01	38.00
数学建模导引	2008-01	28.00
数学方法溯源	2008-01	38.00
数学史话览胜	2008-01	28.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	88.00
天庭的秩序——三体问题的历史	即将出版	88.00
发展空间想象力	2010-01	38.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006-12	68.00
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006-12	18.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	即将出版	48.00
几何变换与几何证题	2010-01	88.00
500个世界著名几何名题及1000个著名几何定理	即将出版	78.00
三角形的五心	2009-06	28.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　名	出版时间	定　价
俄罗斯平面几何问题集	2009－08	88.00
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006－05	58.00
历届 CMO 试题集	2008－09	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007－03	28.00
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009－03	88.00
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006－05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008－01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008－07	58.00
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010－01	58.00
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008－06	48.00
400 个最新世界著名数学最值问题	2008－09	48.00
500 个世界著名数学征解问题	2009－06	48.00
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010－01	48.00
超越吉米多维奇——数列的极限	2009－11	48.00
初等数论难题集(第一卷)	2009－05	68.00
初等数论难题集(第二卷)(上)	即将出版	48.00
初等数论难题集(第二卷)(下)	即将出版	38.00
组合数学难题集	即将出版	38.00
数学 我爱你	2008－01	28.00
精神的圣徒　别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008－09	48.00
数学史概论	2009－06	78.00
博弈论精粹	2008－03	58.00
多项式和无理数	2008－01	68.00
模糊数据统计学	2008－03	48.00
解析不等式新论	2009－06	68.00
数学奥林匹克不等式研究	2009－08	68.00
初等数学研究(Ⅰ)	2008－09	68.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009-05	118.00
中国初等数学研究　2009卷(第1辑)	2009-05	20.00
数学奥林匹克超级题库(初中卷)	2010-01	88.00
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00
统计学专业英语	2007-03	28.00
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00
中考数学专题总复习	2007-04	28.00
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	38.00
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
邮　　编:150006
联系电话:0451-86281378　　13904613167
E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn